Corrigé de l'interrogation n°2

EXERCICE 1

1) VRAI. Nous avons vu dans le cours que pour tout nombres entiers a et b, pour tout entier $n \geq 2$ et pour tout entier naturel p, si $a \equiv b[n]$ alors $a^p \equiv b^p[n]$. On en déduit que si $x \equiv 1[5]$ alors $x^2 \equiv 1^2 \equiv 1[5]$.
2) FAUX. Contre-exemple : on prend $x = 4$. On a bien $x^2 \equiv 4^2 \equiv 16 \equiv 1[5]$ mais $x \not\equiv 1[5]$.
3) VRAI. $\begin{cases} 134 = 11 \times 12 + 2 \\ 0 \leq 2 < 11 \end{cases}$ et $\begin{cases} 35 = 11 \times 3 + 2 \\ 0 \leq 2 < 11 \end{cases}$ donc 134 et 35 ont le même reste (2) dans la division euclidienne par 11 donc $134 \equiv 35[11]$.
4) FAUX. Le reste r doit vérifier $0 \leq r < 11$, comme $35 > 11$, 35 ne peux pas être le reste.

EXERCICE 2

1) $\begin{cases} 35 = 17 \times 2 + 1 \\ 0 \leq 1 < 17 \end{cases}$ donc le reste dans la division euclidienne de 35 par 17 est 1.

$\begin{cases} 50 = 17 \times 2 + 16 \\ 0 \leq 16 < 17 \end{cases}$ donc le reste dans la division euclidienne de 50 par 17 est 16.

2) On a $35 \equiv 1[17]$ donc $35^{121} \equiv 1^{121} \equiv 1[17]$ donc $8 \times 35^{121} \equiv 8 \times 1 \equiv 8[17]$.

De même, $50 \equiv 16 \equiv -1[17]$ donc $50^{251} \equiv (-1)^{251} \equiv -1[17]$ donc $-12 \times 50^{251} \equiv -12 \times (-1) \equiv 12[17]$.

On en déduit que $8 \times 35^{121} - 12 \times 50^{251} \equiv 8 + 12 \equiv 20 \equiv 3[17]$.

<u>*Conclusion :*</u> $8 \times 35^{121} - 12 \times 50^{251} \equiv 3[17]$.

EXERCICE 3

Montrer que, pour tout entier naturel n, $7^{2n} - 23^n$ est divisible par 13. On pourra procéder par récurrence.

Propriété au rang n : « $7^{2n} - 23^n$ est divisible par 13 ».

<u>*Initialisation :*</u> Pour $n = 0$, $7^{2\times 0} - 23^0 = 1 - 1 = 0$. Or $13|0$ donc la propriété est vraie au rang 0.

<u>*Hérédité :*</u>

Hypothèse de récurrence : Supposons que la propriété est vraie au rang n.

Montrons qu'elle est alors vraie au rang $n + 1$.

On a supposé que $7^{2n} - 23^n$ est divisible par 13 donc $7^{2n} - 23^n \equiv 0[13]$ donc $7^{2n} \equiv 23^n[13]$.

Or $7^{2(n+1)} = 7^{2n} \times 7^2$. De plus $7^2 \equiv 49 \equiv 10[13]$ et $23 \equiv 10[13]$ donc $7^2 \equiv 23[13]$.

Donc $7^{2(n+1)} \equiv 7^{2n} \times 7^2 \equiv_{H.R.} 23^n \times 7^2 \equiv 23^n \times 23 \equiv 23^{n+1}[13]$.

Comme $7^{2(n+1)} \equiv 23^{n+1}[13]$, $7^{2(n+1)} - 23^{n+1} \equiv 0[13]$ donc $13|(7^{2(n+1)} - 23^{n+1}$, ce qui est bien la propriété au rang $n + 1$.

<u>*Conclusion :*</u> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $13|(7^{2n} - 23^n)$.

AUTRE MÉTHODE : Soit $n \in \mathbb{N}$.

$7^2 \equiv 49 \equiv 10[13]$ donc $7^{2n} \equiv (7^2)^n \equiv 10^n[13]$.

De même, $23 \equiv 10[13]$ donc $23^n \equiv 10^n[13]$.

On en déduit que $7^{2n} - 23^n \equiv 10^n - 10^n \equiv 0[13]$ donc 13 divise $7^{2n} - 23^n$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $13|(7^{2n} - 23^n)$.

EXERCICE 4

1) Soient x et y deux entiers non nuls.

$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{4y+2x-xy}{2xy} = 0$

$\Leftrightarrow 4y + 2x - xy = 0$

Or $(x-4)(y-2) = xy - 2x - 4y + 8$.

Donc $(x-4)(y-2) = 8 \Leftrightarrow xy - 2x - 4y + 8 = 8 \Leftrightarrow xy - 2x - 4y = 0 \Leftrightarrow 4y + 2x - xy = 0$ (mult par -1)

D'où : $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4y + 2x - xy = 0 \Leftrightarrow (x-4)(y-2) = 8$.

2) *Analyse :* Soient des entiers naturels non nuls tels que $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$.

D'après la question 1), on a alors $(x-4)(y-2) = 8$. Comme $y - 2 \in \mathbb{Z}$, on a en particulier $(x-4)|8$. Or l'ensemble des diviseurs de 8 est $\{-8; -4; -2; -1; 1; 2; 4; 8\}$ donc $(x-4) \in \{-8; -4; -2; -1; 1; 2; 4; 8\}$.

Donc $x \in \{-4; 0; 2; 3; 5; 6; 8; 12\}$ et comme $x > 0$, $x \in \{2; 3; 5; 6; 8; 12\}$.

De plus :

Si $x = \cdots$	2	3	5	6	8	12
alors $x - 4 = \cdots$	-2	-1	1	2	4	8
alors $y - 2 = \cdots$	-4	-8	8	4	2	1
alors $y = \cdots$	-2	-6	10	6	4	3

Et comme on a aussi $y > 0$, les « candidats » solutions sont les couples $(x; y)$ suivants :

$(5; 10)$, $(6; 6)$, $(8; 4)$ et $(12; 3)$.

Synthèse : On vérifie que :

$\frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{2\times2+1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$\frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\frac{2}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

et $\frac{2}{12} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1+2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Conclusion : Les couples solutions sont les couples : $(5; 10)$, $(6; 6)$, $(8; 4)$ et $(12; 3)$.

EXERCICE 5

1) On $2^4 \equiv 16 \equiv 1[5]$ et $3^4 \equiv 81 \equiv 1[5]$.

2)

a) Les restes possibles sont 1, 2, 3 et 4.

b) a est congru à 1, 2, 3 ou 4 modulo 5.

Si $a \equiv \cdots [5]$	1	2	3	4
alors $a^4 \equiv \cdots$	$1[5]$	$16 \equiv 1[5]$	$81 \equiv 1[5]$	$256 \equiv 1[5]$

Dans tous les cas, $a^4 \equiv 1[5]$.

<u>Conclusion :</u> $a^4 \equiv 1[5]$.

3) $2^1 \equiv 2 \not\equiv 1[5]$; $2^2 \equiv 4 \not\equiv 1[5]$; $2^3 \equiv 8 \equiv 3 \not\equiv 1[5]$ et $2^4 \equiv 16 \equiv 1[5]$ donc l'ordre de 2 modulo 5 est 4.

$3^1 \equiv 3 \not\equiv 1[5]$; $3^2 \equiv 4 \not\equiv 1[5]$; $3^3 \equiv 27 \equiv 2 \not\equiv 1[5]$ et $3^4 \equiv 81 \equiv 1[5]$ donc l'ordre de 3 modulo 5 est 4.

$4^1 \equiv 4 \not\equiv 1[5]$ et $4^2 \equiv 16 \equiv 1[5]$ donc l'ordre de 4 modulo 5 est 2.

4) $A_{2015} = 2^{2015} + 3^{2015} + 4^{2015}$.

$2015 = 4 \times 503 + 3$;

$2^{2015} \equiv 2^{4\times 503+3} \equiv (2^4)^{503} \times 2^3 \equiv 1^{503} \times 3 \equiv 3[5]$;

$3^{2015} \equiv 3^{4\times 503+3} \equiv (3^4)^{503} \times 3^3 \equiv 1^{503} \times 2 \equiv 2[5]$;

$4^{2015} \equiv 4^{2\times 1007+1} \equiv (4^2)^{1007} \times 4 \equiv 1^{1007} \times 4 \equiv 4[5]$.

Donc $A_{2015} \equiv 3 + 2 + 4 \equiv 9 \equiv 4[5]$.

EXERCICE 6

1) Supposons que n est divisible par 6.

On sait alors qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 6k$. Et comme $n \geq 0$, on a aussi $k \geq 0$ (car $k = \frac{n}{6}$).

De plus $7^2 \equiv 49 \equiv 4[9]$ et $7^3 \equiv 7^2 \times 7 \equiv 4 \times 7 \equiv 28 \equiv 1[9]$ donc $7^6 \equiv (7^3)^2 \equiv 1^2 \equiv 1[9]$.

$7^6 \equiv 1[9]$ donc $(7^6)^k \equiv 1^k[9]$ (il est important d'avoir vérifier que $k \in \mathbb{N}$ pour cette étape) donc $(7^6)^k\backslash 1[9]$.

D'où $7^n \equiv 1[9]$.

<u>Conclusion :</u> Pour tout entier naturel n, si n est divisible par 6, alors $7^n \equiv 1[9]$.

2) La réciproque est : « Si $7^n \equiv 1[9]$, alors n est divisible par 6 ».

La réciproque est fausse. Contre-exemple : pour $n = 3$, $7^3 \equiv 7^2 \times 7 \equiv 4 \times 7 \equiv 28 \equiv 1[9]$ mais 6 ne divise pas 3.