EXERCICE 7

On a vu dans l'exercice 5 que $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n \times a_n[11]$.

- On en déduit que $201\,520\,142\,013 \equiv 3 - 1 + 0 - 2 + 4 - 1 + 0 - 2 + 5 - 1 + 0 - 2 \equiv 3[11]$.

On en déduit donc que $201\,520\,142\,013^{2016} \equiv 3^{2016}[11]$.

Or $3^2 \equiv 9[11]$;

$3^3 \equiv 27 \equiv 5[11]$ (car $27 = 2 \times 11 + 5$) ;

$3^4 \equiv 3^3 \times 3 \equiv 5 \times 3 \equiv 15 \equiv 4[11]$ (car $15 = 11 + 4$) ;

$3^5 \equiv 3^4 \times 3 \equiv 4 \times 3 \equiv 12 \equiv 1[11]$.

De plus $2016 = 5 \times 43 + 1$, donc $3^{2016} = 3^{5\times 43+1} = (3^5)^{43} \times 3$.

Donc $3^{2016} \equiv (3^5)^{43} \times 3 \equiv (1)^{43} \times 3 \equiv 3[11]$.

Et comme $201\,520\,142\,013^{2016} \equiv 3^{2016}[11]$; $\boxed{201\,520\,142\,013^{2016} \equiv 3[11].}$

- De la manière, $2018 \equiv 8 - 1 + 0 - 2 \equiv 5[11]$ donc $2018^{672} \equiv 5^{672}[11]$

$5^2 \equiv 25 \equiv 3[11]$;

$5^3 \equiv 5 \times 5^2 \equiv 5 \times 3 \equiv 15 \equiv 4[11]$;

$5^4 \equiv 5 \times 4 \equiv 20 \equiv 9[11]$;

$5^5 \equiv 5 \times 5^4 \equiv 5 \times 9 \equiv 45 \equiv 1[11]$.

$672 = 5 \times 134 + 2$ donc $5^{672} = 5^{5\times 134+2} = (5^5)^{134} \times 5^2$.

Donc $\boxed{5^{672} \equiv (5^5)^{134} \times 5^2 \equiv (1)^{134} \times 3 \equiv 3[11].}$

Finalement, $201\,520\,142\,013^{2016} - 2018^{672} \equiv 3 - 3 \equiv 0[11]$.

__Conclusion :__ 11 divise $201\,520\,142\,013^{2016} - 2018^{672}$.

EXERCICE 8

__Exemples d'entiers impairs consécutifs :__ 3 et 5 ; 111 et 113 ; …

__Méthode 1__

Un nombre entier est congru à 0, 1, 2 ou 3 modulo 4. Donc un entier impair est congru à 1 ou à 3 modulo 4. ($4k + 2$ et $4k + 0$ sont des nombres pairs).

Soit n un entier impair. (l'entier impair consécutif est alors $n + 2$)

- Si $n \equiv 1[4]$
  $n + 2 \equiv 3[4]$ donc $n + (n + 2) \equiv 1 + 3 \equiv 4 \equiv 0[4]$.
- Si $n \equiv 3[4]$
  $n + 2 \equiv 3 + 2 \equiv 5 \equiv 1[4]$ donc $n + (n + 2) \equiv 3 + 1 \equiv 0[4]$.

Dans tous les cas, $n + (n + 2) \equiv 0[4]$.

Conclusion : La somme de deux entiers impairs consécutifs est divisible par 4.

Méthode 2

Soit n un entier impair. Le reste dans la division euclidienne de n par 4 vaut 0, 1, 2 ou 3. Mais comme n est impair il vaut nécessairement 1 ou 3 ($4k + 2$ et $4k + 0$ sont des nombres pairs).

- Si le reste vaut 1.
  Il existe un entier k tel que $n = 4k + 1$.
  On a alors $n + (n + 2) = 4k + 1 + 4k + 4 = 4(2k + 1)$.
  Donc $4|[n + (n + 2)]$.
- Si le reste vaut 3.
  Il existe un entier k tel que $n = 4k + 3$.
  On a alors $n + (n + 2) = 4k + 3 + 4k + 5 = 4(2k + 2)$.
  Donc $4|[n + (n + 2)]$.

Dans tous les cas, $4|[n + (n + 2)]$.

Conclusion : La somme de deux entiers impairs consécutifs est divisible par 4.