Exercice 120 p.464

1) On cherche tous les couples d'entiers naturels non nuls tels que $PCCD(x; y) = 1$ et $x + y = 20$.

Si $x = \cdots$ / Si $y = \cdots$	et $y = \cdots$ / Si $x = \cdots$	alors $PGCD(x; y) = \cdots$
1	19	1
2	18	2
3	17	1
4	16	4
5	15	5
6	14	2
7	13	1
8	12	4
9	11	1
10	10	10

Conclusion : Il y a 8 couples solutions.

$S = \{(1; 19); (3; 17); (7; 13); (9; 11); (11; 9); (13; 7); (17; 3); (19; 1)\}$.

2) Dans la suite, on notera « $(x'; y')$ solution de 1) » pour signifier que $(x'; y')$ est une des solutions de la question 1) c'est-à-dire que $x', y' \in \mathbb{N}^*$, $x' + y' = 20$ et $PGCD(x'; y') = 1$.

De même, on notera « $(x; y)$ solution de 2) » pour signifier que $x, y \in \mathbb{N}^*$, $x + y = 180$ et $PGCD(x; y) = 9$.

On a l'impression que si l'on prend une solution $(x'; y')$ de 1), alors $(9x'; 9y')$ sera une solution de 2). Par exemple, comme $(11; 9)$ est solution de 1), on a l'impression que $(99; 81)$ est solution de 2).

Mais deux questions se posent :

- *peut-on démontrer cette affirmation ?*
- *récupère-t-on ainsi toutes les solutions 2) ou en oublie-t-on qui ne seraient pas « associées » à une solution de 1) ?*

- Montrons que si $(x'; y')$ est solution de 1) alors le couple $(x; y)$ tel que $x = 9x'$ et $y = 9y'$ est solution de 2).

Soit un couple d'entiers $(x'; y')$.

Supposons que ce couple soit solution de 1) c'est-à-dire que :

- $x', y' \in \mathbb{N}^*$;
- $x' + y' = 20$;
- $PGCD(x'; y') = 1$.

On pose $x = 9x'$ et $y = 9y'$.

- x est le produit de deux entiers naturels non nuls donc $x \in \mathbb{N}^*$. De même, $y \in \mathbb{N}^*$.
- $x + y = 9x' + 9y' = 9(x' + y') = 9 \times 20 = 180$.
- $PGCD(x; y) = PGCD(9x'; 9y') = 9\,PGCD(x'; y') = 9 \times 1 = 9$.

Finalement, on vient de montrer que $(x; y)$ est solution de 2).

Conclusion : Si $(x'; y')$ est solution de 1), $(x; y) = (9x'; 9y')$ est solution de 2).

Arrivé à ce point de la démonstration, on sait qu'en multipliant toutes les solutions de la question 1) par 9, on obtient des solutions de 2). Par exemple, comme $(13; 7)$ était solution de 1), $(117; 63)$ sera solution de 2). Mais a-t-on toutes les solutions ?

- Montrons que si $(x; y)$ est solution de 2) alors le couple $(x'; y')$ avec $x' = \frac{x}{9}$ et $y' = \frac{y}{9}$ est solution de 1).

Soit un couple d'entiers $(x; y)$.

Supposons que ce couple soit solution de 2) c'est-à-dire que :

- $x, y \in \mathbb{N}^*$;
- $x + y = 180$;
- $PGCD(x; y) = 9$.

$PGCD(x; y) = 9$ donc d'après un théorème du cours il existe deux entiers non nuls x' et y' tels que $x = 9x'$, $y = 9y'$ et $PGCD(x'; y') = 1$.

On vérifie plusieurs choses :

- Comme x et 9 sont strictement supérieurs à 0, $x' = \frac{x}{9}$ aussi. Donc $x' \in \mathbb{N}^*$. De même, $y' \in \mathbb{N}^*$.
- $x + y = 180$ donc $9x' + 9y' = 180$ donc $x' + y' = 20$.
- $PGCD(x'; y') = 1$.

Finalement, $(x'; y')$ est donc solution de 1).

<u>*Conclusion :*</u> Si $(x; y)$ est solution de 2), le couple $(x'; y')$ avec $x' = \frac{x}{9}$ et $y' = \frac{y}{9}$ est solution de 1).

<u>*CONCLUSION :*</u> Les solutions de 2) sont exactement (il n'y a ni plus, ni moins de solutions) les solutions de 1) multipliées par 9.

L'ensemble des solutions est :

$\{(9; 171); (27; 153); (63; 117); (81; 99); (99; 81); (117; 63); (153; 27); (171; 9)\}$.