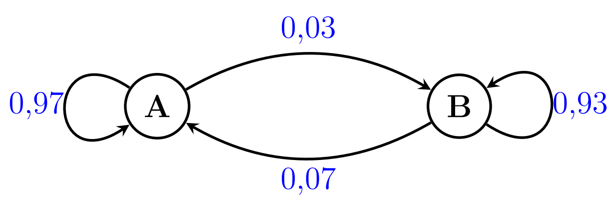
Corrigé du contrôle 3

Parmi les ordinateurs d'un parc informatique, 60 % présentent des failles de sécurité. Afin de pallier ce problème, on demande à un technicien d'intervenir chaque jour pour traiter les défaillances.
On estime que chaque jour, il remet en état 7 % des ordinateurs défaillants, tandis que de nouvelles failles apparaissent chez 3 % des ordinateurs sains. On suppose de plus que le nombre d'ordinateurs est constant sur la période étudiée.

Pour tout entier naturel n, on note a_n la proportion d'ordinateurs sains de ce parc informatique au bout de n jours d'intervention, et b_n la proportion d'ordinateurs défaillants au bout de n jours.
Ainsi $a_0 = 0{,}4$ et $b_0 = 0{,}6$.

Partie A

1. Compléter le graphe suivant dans lequel le sommet A représente l'état « être un ordinateur sain » et le sommet B représente l'état « être un ordinateur défaillant » :



2. Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
L'énoncé indique que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}97a_n + 0{,}07b_n$ et $b_{n+1} = 0{,}03a_n + 0{,}93b_n$.
Cela revient à additionner les probabilités arrivant à chaque sommet du graphe probabiliste.

3. Soit la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0{,}97 & 0{,}07 \\ 0{,}03 & 0{,}93 \end{pmatrix}$. On pose $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

   a) Justifier que pour tout entier naturel n, $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$,
   $$\mathrm{AX}_n = \begin{pmatrix} 0{,}97 & 0{,}07 \\ 0{,}03 & 0{,}93 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}97a_n + 0{,}07b_n \\ 0{,}03a_n + 0{,}93b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}.$$
   On a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n$.

   b) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $\mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{X}_0$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition « $\mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{X}_0$ »
   - pour $n = 0$, $\mathrm{A}^0\mathrm{X}_0 = \mathrm{I}_2\mathrm{X}_0 = \mathrm{X}_0$.
     Ainsi la proposition est vraie au rang 0.
   - Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$ soit vraie.
     On a alors $\mathrm{X}^{n+1} = \mathrm{AX}_n = \mathrm{AA}^n\mathrm{X}_0 = \mathrm{A}^{n+1}\mathrm{X}_0$.
     $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie. La proposition est donc héréditaire.
   - On conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ est vraie autrement dit que $\mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{X}_0$.

c) Calculer, à l'aide de la calculatrice, X_{30}. En donner une interprétation concrète (les coefficients seront arrondis au millième).
La calculatrice nous donne

```
[A]
     [[.97 .07]
      [.03 .93]]
Ans^30*[B]
 [[.6872826525]
  [.3127173475]]
```

En arrondissant au millième, on obtient

$$X_{30} = \begin{pmatrix} 0{,}687 \\ 0{,}313 \end{pmatrix}$$

On en déduit qu'au 30$^{\text{ième}}$ jours, 68,7 % des ordinateurs sont sains et 31,3 % des ordinateurs présentent des failles de sécurité.

Partie B

1. On pose $D = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0{,}9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0{,}07 \\ 0{,}03 \end{pmatrix}$.

a) En remarquant que, pour tout entier naturel n, $a_n + b_n = 1$, déterminer une expression de a_{n+1} en fonction de a_n et une expression de b_{n+1} en fonction de b_n.
Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = 0{,}97a_n + 0{,}07b_n = 0{,}97a_n + 0{,}07(1 - a_n) = 0{,}97a_n - 0{,}07a_n + 0{,}07 = 0{,}9a_n + 0{,}07$$

et

$$b_{n+1} = 0{,}03a_n + 0{,}93b_n = 0{,}03(1 - b_n) + 0{,}93b_n = 0{,}93b_n - 0{,}03b_n + 0{,}03 = 0{,}9b_n + 0{,}03$$

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = DX_n + B$.
Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
DX_n + B &= \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0{,}9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}07 \\ 0{,}03 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0{,}9a_n \\ 0{,}9b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}07 \\ 0{,}03 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0{,}9a_n + 0{,}07 \\ 0{,}9b_n + 0{,}03 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} \\
&= X_{n+1}
\end{aligned}$$

On a bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{DX}_n + \mathrm{B}$.

2. On pose, pour tout entier naturel n, $\mathrm{Y}_n = \mathrm{X}_n - 10B$.

   a) Montrer que pour tout entier naturel n, $\mathrm{Y}_{n+1} = \mathrm{DY}_n$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Y}_{n+1} &= \mathrm{X}_{n+1} - 10\mathrm{B} \\ &= \mathrm{DX}_n + \mathrm{B} - 10\mathrm{B} \\ &= \mathrm{DX}_n - 9\mathrm{B} \end{aligned}$$

   Or $10\mathrm{D} = 10 \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0{,}9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = 9\mathrm{I}_2$.

   On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathrm{Y}_{n+1} &= \mathrm{DX}_n - 9\mathrm{I}_2\mathrm{B} \\ &= \mathrm{DX}_n - 10\mathrm{DB} \\ &= \mathrm{D}(\mathrm{X} - 10\mathrm{B}) \\ &= \mathrm{DY}_n \end{aligned}$$

   b) On admet que pour tout entier naturel n, $\mathrm{Y}_n = \mathrm{D}^n\mathrm{Y}_0$.

   En déduire que pour tout entier naturel n, $\mathrm{X}_n = \mathrm{D}^n\left(\mathrm{X}_0 - 10\mathrm{B}\right) + 10\mathrm{B}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Y}_n = \mathrm{D}^n\mathrm{Y}_0 &\Longleftrightarrow \mathrm{X}_n - 10\mathrm{B} = \mathrm{D}^n\left(\mathrm{X}_0 - 10\mathrm{B}\right) \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{X}_n = \mathrm{D}^n\left(\mathrm{X}_0 - 10\mathrm{B}\right) + 10\mathrm{B} \end{aligned}$$

   c) Donner, *sans justification*, l'expression de D^n puis en déduire a_n et b_n en fonction de n.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} 0{,}9^n & 0 \\ 0 & 0{,}9^n \end{pmatrix}$.

   On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_n &= \begin{pmatrix} 0{,}9^n & 0 \\ 0 & 0{,}9^n \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} - 10 \begin{pmatrix} 0{,}07 \\ 0{,}03 \end{pmatrix} \right] + 10 \begin{pmatrix} 0{,}07 \\ 0{,}03 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}9^n & 0 \\ 0 & 0{,}9^n \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}7 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 0{,}7 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}9^n & 0 \\ 0 & 0{,}9^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}3 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}7 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0{,}3 \times 0{,}9^n \\ 0{,}3 \times 0{,}9^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}7 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0{,}3 \times 0{,}9^n + 0{,}7 \\ 0{,}3 \times 0{,}9^n + 0{,}3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_n = -0{,}3 \times 0{,}9^n + 0{,}7 \\ b_n = 0{,}3 \times 0{,}9^n + 0{,}3 \end{cases}$$

3. Selon cette étude, que peut-on dire de la proportion d'ordinateurs défaillants sur le long terme ?
   $-1 < 0{,}9 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}3 \times 0{,}9^n = 0$ et donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0{,}3$.
   À long terme, la proportion d'ordinateurs défaillants tend vers 0,3. Environ 30% des ordinateurs sont défaillants à long terme dans ce modèle.