Puissances d'une matrice carrée

Exercice 1 : Utiliser une décomposition pour déterminer A^n

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice J telle que $A = I_3 + J$.

   $A = I_3 + J \Leftrightarrow J = A - I_3 = \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 1 & -1-1 & -1 \\ -1 & 4 & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

2. a) Calculer J^2 et J^3.

   $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$.

   b) En déduire la matrice J^n pour tout $n \geq 3$.

   Soit $n \geq 3$, $n - 3 \geq 0$ donc la matrice J^{n-3} est définie et $J^n = J^{n-3} \times J^3 = J^{n-3} \times 0_3 = 0_3$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$,

$$A^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$$

   Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition définie pour les entiers $n \geq 2$ par

$$\text{« } A^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2 \text{ »}$$

   - Pour $n = 2$,
     $I_3 + 2J + \frac{2(2-1)}{2}J^2 = I_3 + 2J + J^2$.
     De plus, $(I_3 + J)^2 = (I_3 + J)(I_3 + J) = I_3^2 + I_3J + JI_3 + J^2 = I_3 + 2J + J^2$ car $I_3J = JI_3 = J$.
     Or $A = I_3 + J$ donc la proposition $\mathscr{P}_2$ est vraie.
   - Supposons qu'il existe $n \geq 2$ tel que $\mathscr{P}_n$ soit vraie.
     On a alors

$$
\begin{aligned}
A^{n+1} &= A^n A \\
&= \left(I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2\right)(I_3 + J) \\
&= I_3 \times I_3 + I_3 \times J + nJ \times I_3 + nJ \times J + \frac{n(n-1)}{2}J^2 \times I_3 + \frac{n(n-1)}{2}J^2 \times J \\
&= I_3 + J + nJ + nJ^2 + \frac{n(n-1)}{2}J^2 + \frac{n(n-1)}{2}J^3 \\
&= I_3 + (n+1)J + \left(n + \frac{n(n-1)}{2}\right)J^2 \\
&= I_3 + (n+1)J + \frac{2n + n(n-1)}{2}J^2 \\
&= I_3 + (n+1)J + \frac{n(n-1+2)}{2}J^2 \\
&= I_3 + (n+1)J + \frac{n(n+1)}{2}J^2 \\
&= I_3 + (n+1)J + \frac{(n+1-1)(n+1)}{2}J^2
\end{aligned}
$$

Ainsi $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. La proposition est héréditaire.

■ D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 2$, $\mathscr{P}_n$ est vraie càd

$$A^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$$

4. En déduire l'expression de la matrice A^n en fonction de n.

   On en déduit que pour tout entier $n \geq 2$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{n(3-n)}{2} & 1-2n & -n \\ n(n-2) & 4n & 1+2n \end{pmatrix}$$

   Remarque : on vérifie facilement que l'expression de la matrice A en fonction de n est aussi valable pour $n = 1$ et $n = 0$.

EXERCICE 2 : **Suite récurrente linéaire d'ordre 2**

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

- la donnée de ses premiers termes u_0 et u_1 ;
- la relation de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

On se propose de calculer l'expression des termes de cette suite par une méthode matricielle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = A \times U_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A \times U_n &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ -2u_n + 3u_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} \\ &= U_{n+1} \end{aligned}$$

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n \times U_0$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathscr{Q}_n$ la proposition $U_n = A^n \times U_0$.

   - pour $n = 0$, $A^0 \times U_0 = I_2 \times U_0 = U_0$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{Q}_n$ soit vraie.

     On a alors

     $$\begin{aligned} U_{n+1} &= A \times U_n \text{ (d'après la question précédente)} \\ &= A \times A^n \times U_0 \text{ (H.R)} \\ &= A^{n+1} \times U_0 \end{aligned}$$

     Ainsi $\mathscr{Q}_{n+1}$ est vraie et donc la proposition est héréditaire.
   - D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{Q}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, autrement dit $U_n = A^n \times U_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. **Calcul de A^n**

   a) Soient les matrices $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

   Calculer $B + 2 \times C$ et les produits $B \times C$ et $C \times B$.

   $B + 2C = A$ et $B \times C = C \times B = 0_2$.

   En déduire que $A^2 = B + 2^2 \times C$ et que $A^3 = B + 2^3 \times C$.

   $A^2 = (B + 2C)^2 = (B + 2C)(B + 2C) = B^2 + B \times 2C + 2C \times B + (2C)^2 = B^2 + 4C^2$.

   Or $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = B$

   et $C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = C$.

   On en déduit que $A^2 = B + 4C = B + 2^2 C$.

$A^3 = (B+2C)^3 = (B+2C)^2(B+2C) = (B+2^2C)(B+2C) = B^2+B\times 2C+2^2C\times B+2^2C\times 2C = B^2+2^3C^2$.

On en déduit que $A^3 = B + 2^3C$.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = B + 2^n \times C$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathscr{R}_n$ la proposition « $A^n = B + 2^n \times C$ »

- pour $n = 0$, $B + 2^0C = B + C = I_2 = A^0$.
  La proposition $\mathscr{R}_0$ est donc vraie.
- Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{R}_n$ soit vraie.
  On a alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= (B+2C)(B+2^nC) \\ &= B^2 + B \times 2^nC + 2C \times B + 2C \times 2^nC \\ &= B^2 + 2^{n+1}C^2 \\ &= B + 2^{n+1}C \end{aligned}$$

  On en déduit que $\mathscr{R}_{n+1}$ est vraie et donc que la proposition est héréditaire.
- D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ càd $A^n = B + 2^nC$.

c) En déduire l'expression de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & -1+2^n \\ 2-2^{n+1} & -1+2^{n+1} \end{pmatrix}$$

4. Déduire des questions précédentes l'expression de u_n en fonction de u_0, u_1 et n.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = A^nU_0 = \begin{pmatrix} 2-2^n & -1+2^n \\ 2-2^{n+1} & -1+2^{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-2^n)u_0 + (-1+2^n)u_1 \\ (2-2^{n+1})u_0 + (-1+2^{n+1})u_1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (2-2^n)u_0 + (-1+2^n)u_1$.

5. Existe-t-il des valeurs de u_0 et de u_1 pour lesquelles la suite (u_n) converge ?

Si oui, donner la valeur de la limite.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-u_0+u_1)2^n + 2u_0 - u_1$.

Si $-u_0 + u_1 \neq 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (-u_0+u_1)2^n = \pm\infty$ et donc (u_n) diverge.

Si $-u_0 + u_1 = 0$ alors $u_n = 2u_0 - u_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) est constante et donc elle converge.

On en conclut que $\boxed{(u_n) \text{ converge si, et seulement si } u_0 = u_1. \text{ Dans ce cas, on a } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2u_0 - u_1}$