DM : nombres parfaits-Corrigé

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. n est dit parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs entiers naturels propres. (les diviseurs de n différents de n)

1 Exemples

1. Un nombre premier est-il parfait ?
   Soit p un nombre premier. Ses diviseurs sont 1 et p donc son diviseur propre est 1 qui n'est pas égal à p donc p n'est pas parfait.
2. 6 et 8 sont-ils parfaits ?
   Les diviseurs de 6 sont 1 ; 2 ; 3 et 6 donc la somme de ses diviseurs propres est $1 + 2 + 3 = 6$. 6 est donc parfait.
   Les diviseurs de 8 sont 1 ; 2 ; 4 et 8 donc la somme de ses diviseurs propres est $1 + 2 + 4 = 7$. 8 n'est donc pas parfait.
3. a. Écrire un algorithme en langage naturel permettant de déterminer si un entier naturel non nul est parfait.
   b. Programmer cet algorithme pour déterminer le deuxième nombre parfait. *Vous utiliserez de préférence le langage Python et donnerez une copie du programme et des résultats obtenus*

2 Une condition suffisante

1. Vérifier que les deux premiers nombres parfaits peuvent s'écrire sous la forme $\mathrm{N} = 2^{n-1}(2^n - 1)$ où n est un entier naturel non nul. Que dire du nombre $2^n - 1$?
   $6 = 2 \times 3 = 2^{2-1}(2^2 - 1)$ et $28 = 4 \times 7 = 2^{3-1}(2^3 - 1)$.
   On constate que l'entier $2^n - 1$ prend les valeurs 3 et 7 qui sont des nombres premiers.
2. On suppose que $n \in \mathbb{N}^*$ et que $2^n - 1$ est premier. Soit $\mathrm{N} = 2^{n-1}(2^n - 1)$.
   a. Quelle est la décomposition de N en produit de facteurs premiers ? En déduire les diviseurs de N.
   2 est premier et on suppose que $2^n - 1$ l'est aussi. On en déduit que l'écriture $2^{n-1}(2^n - 1)$ est la décomposition de N en produit de facteurs premiers.
   Les diviseurs de N sont donc les entiers de la forme $2^i(2^n - 1)^j$ où $i \in \{0; 1; \ldots; n-1\}$ et $j \in \{0; 1\}$.
   Ce sont donc les entiers de la forme 2^i et $2^i(2^n - 1)$ où $i \in \{0; 1; \ldots; n-1\}$.
   b. Montrer que N est parfait.

Calculons la somme des diviseurs propres de N. On doit retirer $2^{n-1}(2^n-1) = \mathrm{N}$ de la liste des diviseurs.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} 2^i + \sum_{i=0}^{n-2} 2^i(2^n-1) &= \frac{1-2^n}{1-2} + (2^n-1)\sum_{i=0}^{n-2} 2^i \\ &= 2^n - 1 + (2^n-1)\frac{1-2^{n-1}}{1-2} \\ &= 2^n - 1 + (2^n-1)(2^{n-1}-1) \\ &= (2^n-1)(1+2^{n-1}-1) \\ &= (2^n-1)2^{n-1} \\ &= \mathrm{N}\end{aligned}$$

On en déduit donc que N est parfait.

c. En déduire un troisième nombre parfait.

On cherche n tel que $2^n - 1$ soit premier.
Nous avons montré en exercice qu'il faut que n soit premier. (!)
Prenons $n = 5$, $2^5 - 1 = 31$ est premier. (en effet $5 < \sqrt{31} < 6$ et 31 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5)
On en déduit que $2^4(2^5-1) = 16 \times 31 = 496$ est parfait.

3 Condition nécessaire

Dans cette partie, on cherche à montre que si N est un nombre parfait **pair** alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{N} = 2^{n-1}(2^n-1)$ et $2^n - 1$ est premier.
On suppose donc que N est un entier naturel parfait pair. On note $\sigma(n)$ la somme de tous les diviseurs entiers naturels de n.

1. Montrer qu'il existe des entiers naturels a et b tels que $\mathrm{N} = 2^a \times b$ avec $a \geq 1$ et b impair.

   N est pair donc il est divisible par 2. La décomposition de N en produit de facteur premier est

   $$\mathrm{N} = 2^a \times p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$

   où les nombres $p_1, \dots, p_r$ sont des nombres premiers supérieurs à 2 donc impairs et les exposants $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont des entiers naturels non nuls.
   Le produit d'entiers impairs étant impair, $b = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ est impair.
   On a bien $\mathrm{N} = 2^a b$ où $a \geq 1$ et b est impair.

2. Montrer que $\sigma(\mathrm{N}) = (2^{a+1} - 1)\sigma(b)$. *On pourra considérer les diviseurs de b et exprimer ceux de N en fonction des précédents.*

   Soient $b_1, \dots, b_m$ les diviseurs de b.
   Les diviseurs de 2^a sont les entiers 2^k avec $k \in \{0; 1; \dots; a\}$.
   Les diviseurs de N sont donc les entiers $2^k \times b_i$ où $k \in \{0; \dots; a\}$ et $i \in \{1; \dots; m\}$. Ce sont donc les entiers

   - $2^k b_1$ où $k \in \{0; \dots; a\}$;
   - $2^k b_2$ où $k \in \{0; \dots; a\}$;

…

- $2^k b_m$ où $k \in \{0; \dots; a\}$.

On a donc

$$\begin{aligned}
\sigma(\mathrm{N}) &= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=0}^{a} 2^k b_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{m} b_i\left(\sum_{k=0}^{a} 2^k\right)\\
&= \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{1-2^{a+1}}{1-2}\\
&= \sum_{i=1}^{m} b_i(2^{a+1}-1)\\
&= (2^{a+1}-1)\left[\sum_{i=1}^{m} b_i\right]\\
&= (2^{a+1}-1)\sigma(b)
\end{aligned}$$

3. Traduire le fait que N est parfait à l'aide de la fonction σ.

   N est parfait si, et seulement si $\sigma(\mathrm{N}) = 2\mathrm{N}$.

4. Montrer que cette condition est équivalente à $b = (\sigma(b) - b)(2^{a+1} - 1)$. Que peut-on en déduire concernant $\sigma(b) - b$?

$$\begin{aligned}
\text{N est parfait} &\iff \sigma(\mathrm{N}) = 2\mathrm{N}\\
&\iff (2^{a+1}-1)\sigma(b) = 2^{a+1}b\\
&\iff (2^{a+1}-1)\sigma(b) = 2^{a+1}b - b + b\\
&\iff (2^{a+1}-1)\sigma(b) = (2^{a+1}-1)b + b\\
&\iff (2^{a+1}-1)\sigma(b) - (2^{a+1}-1)b = b\\
&\iff (2^{a+1}-1)(\sigma(b)-b) = b
\end{aligned}$$

   On en déduit que l'entier $\sigma(b) - b$ est un diviseur de b.

5. En remarquant que $\sigma(b) = b + (\sigma(b) - b)$, montrer que b est premier puis que $b = 2^{a+1} - 1$.

   b et $\sigma(b)-b$ sont deux diviseurs de b. De plus, $a \geq 1$ donc $2^{a+1}-1 \geq 3$ et comme $(2^{a+1}-1)(\sigma(b)-b) = b$, on en déduit que $\sigma(b) - b < b$.
   Montrons que $\sigma(b) - b = 1$. Supposons, par l'absurde, que $\sigma(b) - b > 1$.
   Comme $\sigma(b)-b < b$, on aurait $\sigma(b) \geq 1+(\sigma(b)-b)+b$ donc $\sigma(b) \geq \sigma(b)+1$ ce qui est contradictoire.
   On a donc $\sigma(b) - b = 1 \iff \sigma(b) = b + 1 \iff b$ est premier.
   En reprenant la relation $(2^{a+1} - 1)(\sigma(b) - b) = b$ on obtient $b = 2^{a+1} - 1$.

6. Conclure et donner les cinq premiers nombres parfaits.

   Conclusion :
   N est un nombre parfait **pair** si, et seulement si $\mathrm{N} = 2^a(2^{a+1} - 1)$ et $2^{a+1} - 1$ est premier.

Ceci revient à dire, en posant $n = a + 1$ que $\mathrm{N} = 2^{n-1}(2^n - 1)$ avec $2^n - 1$ premier.

On cherche n tel que $2^n - 1$ soit premier pour obtenir un nombre parfait pair.
On sait, d'après un exercice fait en classe, qu'il faut que n soit lui-même premier.

- pour $n = 7$, $2^7 - 1 = 127$ qui est premier donc $2^6(2^7 - 1) = 64 \times 127 = 8\,128$ est parfait.
- pour $n = 11$, $2^{11} - 1 = 2\,047 = 23 \times 89$ n'est pas premier.
- pour $n = 13$, $2^{13} - 1 = 8\,191$ qui est premier (à vérifier) donc $2^{12} \times (2^{13} - 1) = 4\,096 \times 8\,191 = 33\,550\,336$ est parfait.