Terminale S-Spécialité **2017/2018**

Contrôle 2 : congruences

NOM : **Calculatrice interdite**

Exercice 1 :

Dire si chacune des propositions suivantes est Vraie ou Fausse. Justifier chaque réponse en faisant une démonstration ou en fournissant un contre-exemple.
u et v et n sont des entiers relatifs et $n \neq 0$.

1. Si $u \equiv v\ [n]$ alors $u^2 \equiv v^2\ [n]$.
   Vrai : le cours nous dit que si $a \equiv b\ [n]$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^n \equiv b^n\ [n]$.
   On applique cette propriété avec $a = u$, $b = v$ et $n = 2$.
2. Si $u \equiv v\ [n]$ alors $u^2 \equiv v^2\ [n^2]$.
   Faux : par exemple $5 \equiv 1\ [4]$.
   $5^2 = 25$, $1^2 = 1$ et $4^2 = 16$. 25 n'est pas congru à 1 modulo 16 puisque $25 - 1 = 24$ n'est pas un multiple de 16.
   On en déduit que $5^2 \not\equiv 1^2\ [4^2]$.

Exercice 2 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :
   a) Si $n \equiv 0\,[3]$ alors $5^n \equiv 1\,[31]$.
   On suppose que $n \equiv 0\ [3]$ donc qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3m$.
   On a alors $5^n = \left(5^3\right)^m = 125^m$.
   Or $125 = 4 \times 31 + 1$ donc $125 \equiv 1\ [31]$.
   On en déduit que $5^n \equiv 1^m\ [31] \equiv 1\ [31]$.
   b) Si $n \equiv 1\,[3]$ alors $5^n \equiv 5\,[31]$.
   On suppose que $n \equiv 1\,(3)$ donc qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3m + 1$.
   On a alors $5^n = 125^m \times 5$. Or $125^m \equiv 1\ [3]$ donc $5^n \equiv 5\ [3]$.
   c) Si $n \equiv 2\,[3]$ alors $5^n \equiv 25\,[31]$.
   On suppose que $n \equiv 2\,(3)$ donc qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3m + 2$.
   On a alors $5^n = 125^m \times 5^2 = 125^m \times 25$. Or $125^m \equiv 1\ [3]$ donc $5^n \equiv 25\ [3]$.
2. Déterminer le reste de la division Euclidienne de 5^{227} par 31.
   $227 = 3 \times 75 + 2$ donc $227 \equiv 2\ [3]$ et d'après la question précédente, on a $5^{227} \equiv 25\ [31]$.
   Comme $0 \leq 25 < 31$, le reste de la division euclidienne de 5^{227} par 31 est 25.

Exercice 3 :

1. Déterminer un entier n tel que $4^n \equiv 1\ [7]$.

   $4^3 = 64 = 7 \times 9 + 1$ donc $4^3 \equiv 1\ [7]$

2. Effectuer la division euclidienne de $1\,789$ par 7. En déduire le reste de la division euclidienne de $1\,789^{1\,515}$ par 7.

   $1\,789 = 7 \times 255 + 4$ et $0 \leq 4 < 7$ donc le quotient et le reste dans la division euclidienne de $1\,789$ par 7 sont respectivement 255 et 4.
   On a donc $1\,789 \equiv 4\,[7]$ donc $1\,789^{1\,515} \equiv 4^{1\,515}\,[7]$.
   De plus $1\,515 = 3 \times 505$ donc $4^{1\,515} = \left(4^3\right)^{505}$.
   Or $4^3 \equiv 1\ [7]$ donc $1\,789^{1\,515} \equiv 1^{505} \equiv 1\ [3]$.
   $0 \leq 1 < 3$ donc le reste de la division euclidienne de $1\,789^{1\,515}$ par 7 est 1.

Exercice 4 :

1. x désigne un entier relatif. Compléter le tableau suivant :

Reste de la division Euclidienne de x par 5	0	1	2	3	4
Reste de la division Euclidienne de $3x$ par 5	0	3	1	4	2

2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $3x \equiv 2\,(5)$.

   On en déduit que $3x \equiv 2\,(5) \Leftrightarrow x \equiv 4\,(5)$.
   L'ensemble des solutions de l'équation $3x \equiv 2\,(5)$ est donc l'ensemble des entiers relatifs de la forme $x = 4 + 5k$ où $k \in \mathbb{Z}$.

3. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que $3(x+1)$ soit divisible par 5.

$$\begin{aligned} 3(x+1)\text{ est divisible par }5 &\Leftrightarrow 3(x+1) \equiv 0\,(5) \\ &\Leftrightarrow 3x + 3 \equiv 0\,(5) \\ &\Leftrightarrow 3x \equiv -3\,(5) \\ &\Leftrightarrow 3x \equiv 2\,(5) \quad (\text{car } -3 \equiv 2\,(5)) \\ &\Leftrightarrow x\text{ est solution de l'équation }3x \equiv 2\,(5) \end{aligned}$$

   Ainsi l'ensemble des entiers relatifs x tels que $3(x+1)$ soit divisible par 5 est l'ensemble des entiers relatifs de la forme $x = 4 + 5k$ où $k \in \mathbb{Z}$.