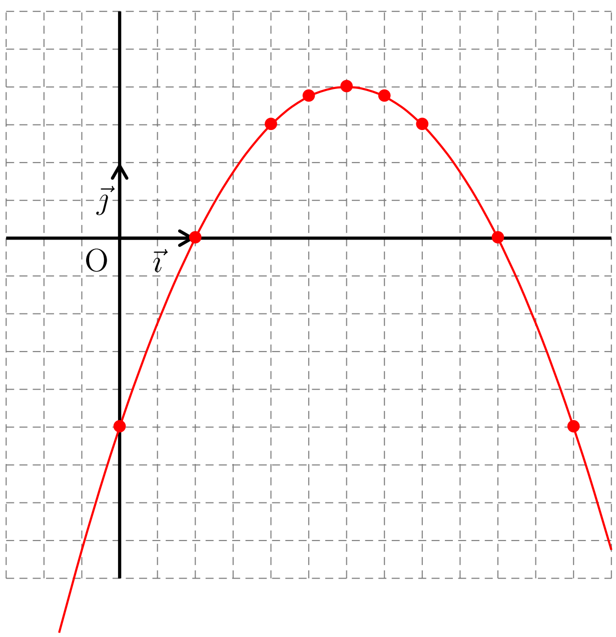
Corrigé du contrôle 6

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{1}{2}(x-3)^2 + 2$. On note $\mathscr{P}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1. Donner les réels a, α et β correspondant à la fonction f.
   $a = -\dfrac{1}{2}$, $\alpha = 3$ et $\beta = 2$.
2. Donner les coordonnées du sommet S de $\mathscr{P}$ ainsi que son axe de symétrie.
   S$(3; 2)$. $\mathscr{P}$ a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = 3$. (droite parallèle à l'axe des ordonnées)
3. Tracer $\mathscr{P}$ dans le repère donné ci-dessous. *Vous justifierez votre démarche*
   $\mathscr{P}$ étant symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, il suffit de calculer les images de réels supérieurs ou égaux à 3.

x	3	3,5	4	5	6
$f(x)$	2	1,875	3/2	0	$-5/2$



4. a) Graphiquement, lire les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{P}$ et des axes du repère.
   Graphiquement, on lit que $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées (1,0) et (5,0) et qu'elle coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; -\frac{5}{2})$.

b) Montrer que pour tout réel x,

$f(x) = -\dfrac{1}{2}(x-1)(x-5)$.

En déduire, algébriquement, les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{P}$ avec l'axe des abscisses.

D'une part,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(x-1)(x-5) &= -\frac{1}{2}(x^2-6x+5) \\ &= -\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{2} \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2}(x-3)^2+2 \\ &= -\frac{1}{2}(x^2-6x+9)+2 \\ &= -\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{9}{2}+2 \\ &= -\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{2} \end{aligned}$$

On conclut donc que pour tout réel x, $f(x) = -\dfrac{1}{2}(x-1)(x-5)$.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{P}$ avec l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$. (antécédents de 0 par f)

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff -\frac{1}{2}(x-1)(x-5) = 0 \\ &\iff (x-1)(x-5) = 0 \\ &\iff x-1 = 0 \text{ ou } x-5 = 0 \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = 5 \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont 1 et 5 donc $\mathscr{P}$ coupe bien l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(1;0)$ et $(5;0)$.

c) Déterminer algébriquement les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{P}$ avec l'axe des ordonnées.

Il suffit de calculer $f(0) = -\dfrac{1}{2}(0-3)^2+2 = -\dfrac{9}{2}+2 = -\dfrac{5}{2}$.

$\mathscr{P}$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;-\frac{5}{2})$.

Exercice 2 :

Un artisan fabrique entre 0 et 60 vases par jour et estime que le coût de production de x vases est modélisé par la fonction C définie sur $[0;+\infty[$ par $\mathrm{C}(x) = x^2 - 10x + 500$.
On note $\mathrm{R}(x)$ la recette, en euros, correspondant à la vente de x vases fabriqués.
Un vase est vendu 50 €.

1. Calculer le coût et la recette réalisée lorsque l'artisan vend 20 vases. Quel est alors son bénéfice ?
   $\mathrm{C}(20) = 20^2 - 10 \times 20 + 500 = 400 - 200 + 500 = 700$. Pour 20 vases vendus, le coût est 700 euros. Chaque vase étant vendu 50 euros, la recette est alors $\mathrm{R}(20) = 50 \times 20 = 1\,000$ euros et le bénéfice est alors $1\,000 - 700 = 300$ euros.
2. Exprimer $\mathrm{R}(x)$ en fonction de x.
   Pour $x \in [0;+\infty[$, $\mathrm{R}(x) = 50x$.
3. Vérifier que le bénéfice, en euros, réalisé par l'artisan est donné par la fonction B dont l'expression est $\mathrm{B}(x) = -x^2 + 60x - 500$.
   $\mathrm{B}(x) = \mathrm{R}(x) - \mathrm{C}(x) = 50x - (x^2 - 10x + 500) = -x^2 + 60x - 500$.
4. a) Développer l'expression $-(x-30)^2 + 400$.
   Soit $x \in [0;+\infty[$,
   $-(x-30)^2 + 400 = -(x^2 - 60x + 900) + 400 = -x^2 + 60x - 500 = \mathrm{B}(x)$.

   b) En déduire le nombre de vases à vendre pour réaliser un bénéfice maximal. Donner ce bénéfice maximal.
   $\mathrm{B}(x) = -(x-30)^2 + 400$ est la forme canonique de la fonction B.
   On a $a = -1$, $\alpha = 30$ et $\beta = 400$. On en déduit le tableau de variations suivant : (sur l'intervalle $[0;60]$)

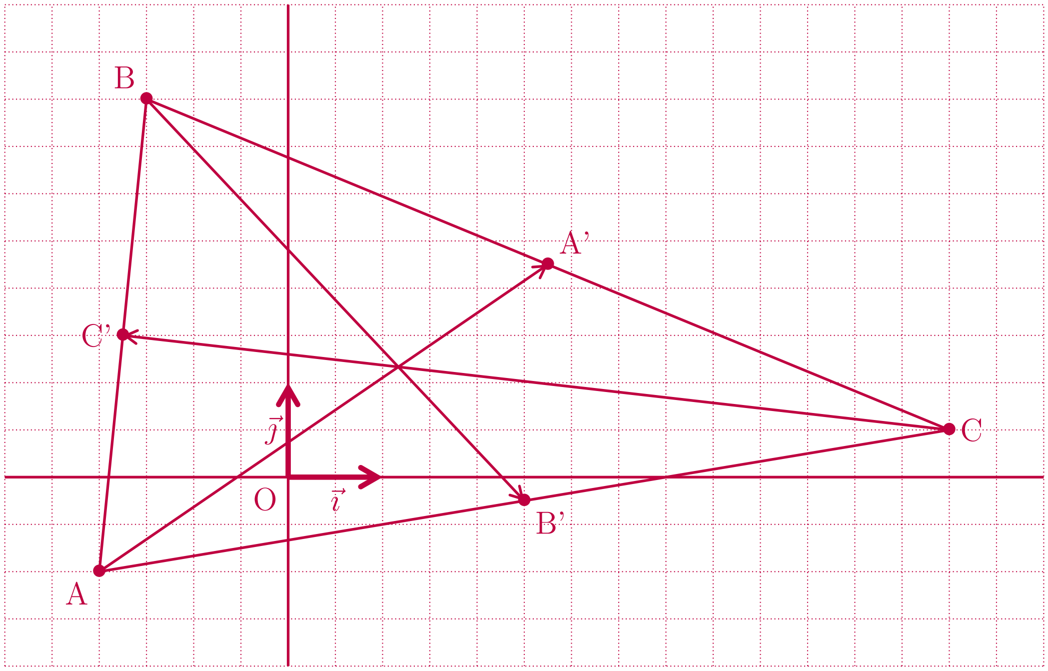
x	0		30		60
B	-500	$\nearrow$	400	$\searrow$	-500

   On en déduit que le maximum de B sur $[0;60]$ est $\mathrm{B}(30) = 400$.
   Le bénéfice est donc maximal pour 30 vases vendus et ce bénéfice maximal est 400 euros.

Exercice 3 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et on considère les points $\mathrm{A}(-2;-1)$, $\mathrm{B}(-\frac{3}{2};4)$ et $\mathrm{C}(7;\frac{1}{2})$.

1. Faire une figure qui sera complétée au fur et à mesure.



2. Soient A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB]. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{AA'}}$, $\overrightarrow{\text{BB'}}$ et $\overrightarrow{\text{CC'}}$.
   A' est le milieu de [BC] donc A'$\left(\frac{-\frac{3}{2}+7}{2}\,;\frac{4+\frac{1}{2}}{2}\right)$ donc A'$\left(\frac{\frac{11}{2}}{2}\,;\frac{\frac{9}{2}}{2}\right)$ et donc A'$\left(\frac{11}{4}\,;\frac{9}{4}\right)$.
   B' est le milieu de [AC] donc B'$\left(\frac{-2+7}{2}\,;\frac{-1+\frac{1}{2}}{2}\right)$ donc B'$\left(\frac{5}{2}\,;\frac{-\frac{1}{2}}{2}\right)$ et donc B'$\left(\frac{5}{2}\,;-\frac{1}{4}\right)$.
   C' est le milieu de [AB] donc C'$\left(\frac{-2-\frac{3}{2}}{2}\,;\frac{-1+4}{2}\right)$ donc C'$\left(\frac{-\frac{7}{2}}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$ et donc C'$\left(-\frac{7}{4}\,;\frac{3}{2}\right)$.

   On en déduit que :

   - $\overrightarrow{\text{AA'}}\left(\frac{11}{4}-(-2)\,;\frac{9}{4}-(-1)\right)$ donc $\overrightarrow{\text{AA'}}\left(\frac{19}{4}\,;\frac{13}{4}\right)$.
   - $\overrightarrow{\text{BB'}}\left(\frac{5}{2}-(-\frac{3}{2})\,;-\frac{1}{4}-4\right)$ donc $\overrightarrow{\text{BB'}}\left(4\,;-\frac{17}{4}\right)$.
   - $\overrightarrow{\text{CC'}}\left(-\frac{7}{4}-7)\,;\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)$ donc $\overrightarrow{\text{CC'}}\left(-\frac{35}{4}\,;1\right)$.

3. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{AA'}}+\overrightarrow{\text{BB'}}+\overrightarrow{\text{CC'}}$.
   Quelle interprétation pouvez-vous en faire ?
   On en déduit que $\overrightarrow{\text{AA'}}+\overrightarrow{\text{BB'}}+\overrightarrow{\text{CC'}}\left(\frac{19}{4}+4-\frac{35}{4}\,;\frac{13}{4}-\frac{17}{4}+1\right)$
   donc $\overrightarrow{\text{AA'}}+\overrightarrow{\text{BB'}}+\overrightarrow{\text{CC'}}\left(\frac{19}{4}+\frac{16}{4}-\frac{35}{4}\,;\frac{13}{4}-\frac{17}{4}+\frac{4}{4}\right)$.
   Finalement, on obtient $\overrightarrow{\text{AA'}}+\overrightarrow{\text{BB'}}+\overrightarrow{\text{CC'}}\,(0\,;0)$, le vecteur $\overrightarrow{\text{AA'}}+\overrightarrow{\text{BB'}}+\overrightarrow{\text{CC'}}$ est donc nul. Ceci signifie que la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{AA'}}+\overrightarrow{\text{BB'}}+\overrightarrow{\text{CC'}}$ ne déplace pas les points !
   Si on place des masses égales aux sommets A, B et C, le point de concours obtenu est un point d'équilibre de ce système.

Exercice 4 :

On lance deux fois de suite un dé tétraédrique dont les quatre faces sont numérotées de 1 à 4.
On forme ainsi un nombre à deux chiffres. Par exemple, si on obtient 2 au premier lancer et 3 au second, on forme le nombre 23.

1. Décrire l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire. Donner toutes les issues qui composent Ω.
   Ω est l'ensemble des nombres à deux chiffres choisis entre 1 et 4.
   $\Omega = \{11\,;12\,;13\,;14\,;21\,;22\,;23\,;24\,;31\,;32\,;33\,;34\,;41\,;42\,;43\,;44\}$.
2. Quelle est la loi de probabilité sur Ω ?
   Les issues ont toutes la même probabilité puisque les deux chiffres sont choisis au hasard et indépendamment l'un de l'autre. La loi sur Ω est donc équirépartie.
3. Soit A l'événement : « le chiffre des dizaines du nombre obtenu est 3 ».
   Donner toutes les issues qui composent A puis calculer P(A).
   $A = \{31\,;32\,;33\,;34\}$.
   La loi étant équirépartie, on a
   $$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de}\,\Omega} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$
   La probabilité d'obtenir un nombre dont le chiffre des dizaines est 3 est 0,25.
4. Soit B l'événement : « le nombre obtenu contient deux chiffres différents »
   Décrire l'événement $\overline{B}$ à l'aide d'une phrase puis en donner toutes les issues.
   Calculer P(B).
   $\overline{B}$: « le nombre obtenu contient les deux mêmes chiffres »
   $\overline{B} = \{11\,;22\,;33\,;44\}$ donc
   $$P(\overline{B}) = \frac{4}{16} = 0{,}25$$
   Or $P(B) = 1 - P(\overline{B})$ donc $P(B) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.
   La probabilité d'obtenir un nombre ayant deux chiffres différents est 0,75.