Corrigé du contrôle 5

Exercice 1 :

Deux groupes G_1 et G_2 de 20 élèves ont obtenu les notes sur 10 suivantes lors d'une épreuve d'EPS :

Note x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G_1	0	0	1	0	1	2	2	4	3	4	3
G_2	1	1	1	0	1	3	1	1	6	5	0

On demande au professeur quel est son meilleur groupe et quel est son groupe le plus homogène.

1. Déterminer la moyenne et la médiane du groupe G_1 en justifiant toutes les étapes.
   L'énoncé dit que $N_1 = 20$. La moyenne du groupe 1 est
   $$\overline{x_1} = \frac{0\times 0 + 1\times 0 + 2\times 1\ldots}{20} = \frac{146}{20} = 7{,}3$$
   N est pair et $N/2 = 10$ donc la médiane est la moyenne des $10^{\text{ème}}$ et $11^{\text{ème}}$ valeurs.
   $\text{Me}_1 = \dfrac{7+8}{2} = 7{,}5$.
2. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant :

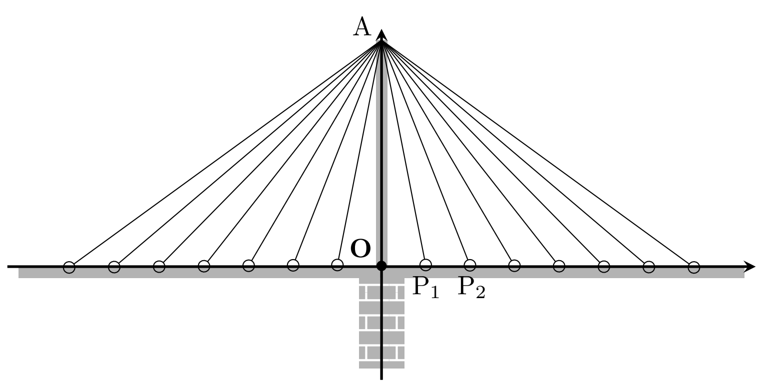
	Min	Max	étendue	Q_1	Me	Q_3	$Q_3 - Q_1$	$\overline{x}$
G_1	2	10	8	6	7,5	9	3	7,3
G_2	0	9	9	5	8	8,5	3,5	6,4

3. Indiquer quel sera le « meilleur groupe » du professeur si celui-ci privilégie :
   a. la meilleure note obtenue ; Groupe 1
   b. la moyenne la plus forte ; Groupe 2
   c. la médiane la plus élevée. Groupe 2
4. Indiquer quel sera, pour le professeur, le groupe « le plus homogène » , si celui-ci privilégie :
   a. l'étendue la plus réduite ; Groupe 1
   b. l'écart interquartile le plus petit. Groupe 1
5. Déterminer, pour chacun des groupes, le pourcentage d'élèves ayant obtenu une note appartenant à l'intervalle interquartile $[Q_1 ; Q_3]$.
   Groupe 1 :
   L'intervalle interquartile est $[Q_1 ; Q_3] = [6 ; 9]$.
   L'effectif associé est 13 et $\dfrac{13}{20} \times 100 = 65$.
   65% des valeurs de la série 1 appartiennent à l'intervalle interquartile.

   Groupe 2 :
   L'intervalle interquartile est $[Q_1 ; Q_3] = [5 ; 8{,}5]$.
   L'effectif associé est 11 et $\dfrac{11}{20} \times 100 = 55$.
   55% des valeurs de la série 2 appartiennent à l'intervalle interquartile.

Exercice 2 :

Sept paires de haubans sont fixées sur le pylône d'un pont. (les haubans sont des câbles d'acier qui tiennent le tablier du pont)
Les haubans sont ancrés en tête du pylône haut de 180 m et sur le tablier du pont, avec un espacement régulier de 10 m à partir de la base du pylône.



1. On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où O représente le pied du pylône dans lequel on prend pour unités de longueur 1 cm pour 10 m sur chaque axe.
   a. Donner les coordonnées du point A d'attache des haubans au pylône ainsi que celles des points P_1 et P_2 d'attache des deux premiers câbles au tablier. (du côté droit)
   $A(0;180)$, $P_1(10;0)$ et $P_2(20;0)$.
   b. En déduire la longueur de chacun de ces deux haubans et de la somme de ces deux longueurs. *Vous donnerez les valeurs exactes et les valeurs arrondies à 10^{-3} près.*
   $AP_1 = \sqrt{(10-0)^2 + (0-180)^2} = \sqrt{32\,500} \approx 180{,}278$ à 10^{-3} près.

   $AP_2 = \sqrt{(20-0)^2 + (0-180)^2} = \sqrt{32\,800} \approx 181{,}108$ à 10^{-3} près.

   $AP_1 + AP_2 = \sqrt{32\,500} + \sqrt{32\,800} \approx 361{,}386$ à 10^{-3} près.
2. On considère l'algorithme suivant, écrit en langage naturel :

`Variables :`	`x, long (nombres)`
`Traitement :`	`Affecter à long la valeur 0 ;`
	`Affecter à x la valeur 0 ;`
	`Pour k de 1 à 7 faire`
	`Affecter à x la valeur x+10`
	`Affecter à long la valeur long +` $\sqrt{180^2 + x^2}$
	`FinPour`
	`Affecter à long la valeur 2*long`
`Sortie :`	`Afficher long`

   a. Compléter le tableau suivant : *vous indiquerez les valeurs exactes et les approchées à 10^{-3} près.*

	Étape	x	long	k
	1	0	0	
Boucle Pour	2	10	$0 + \sqrt{180^2 + 10^2} \approx 180{,}278$	1
	3	20	$\sqrt{32\,500} + \sqrt{180^2 + 20^2} \approx 361{,}386$	2
	4	30	$\sqrt{32\,500} + \sqrt{32\,800} + \sqrt{30^2 + 180^2} \approx 543{,}868$	3
	5	40	728,259	4
	6	50	915,074	5
	7	60	1 104,811	6
	8	70	1 297,943	7
	9	70	$\approx 2 \times 1\,297{,}943 = 2\,595{,}886$	7

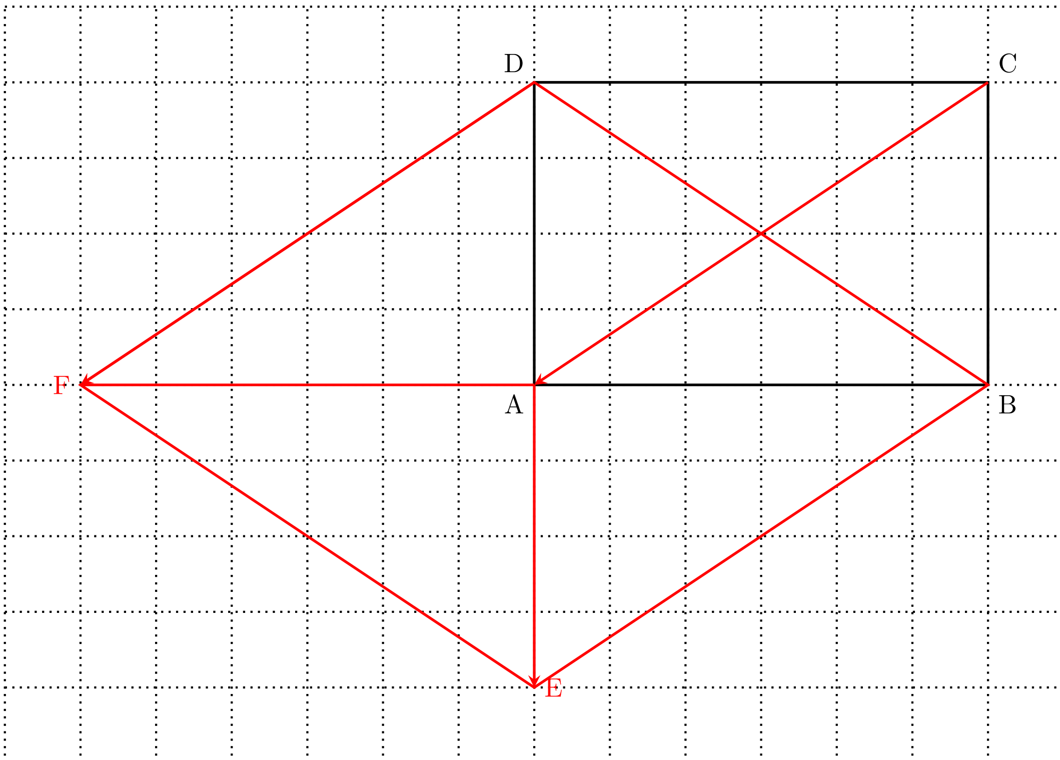
   b. Quel résultat affiche cet algorithme et que représente le nombre affiché ?
   Cet algorithme affiche la somme des longueurs de tous les haubans du pont (des deux côtés) soit 2 595,886 m à 10^{-3} m près (càd au mm près).

Exercice 3 : (5,5 points)

Sur la figure ci-contre, ABCD est un rectangle et le point E est tel que $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AE}$.

1. Construire le point E.
2. Justifier que $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$. En déduire la construction du point F tel que $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.
   ABCD est un rectangle donc c'est un parallélogramme. Or la règle du parallélogramme nous permet de dire que $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$.
   $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CA} \iff$ CAFD est un parallélogramme. On construit donc le parallélogramme CAFD.
3. Montrer que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CA}$ et que $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DF}$.
   On sait que $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AE}$ donc CBEA est un parallélogramme et donc $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CA}$.
   D'après la question précédente, on sait que $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DF}$.
4. Quelle est la nature du quadrilatère BDFE ?
   D'après la question précédente, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DF}$ donc $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DF}$ et donc BDEF est un parallélogramme.

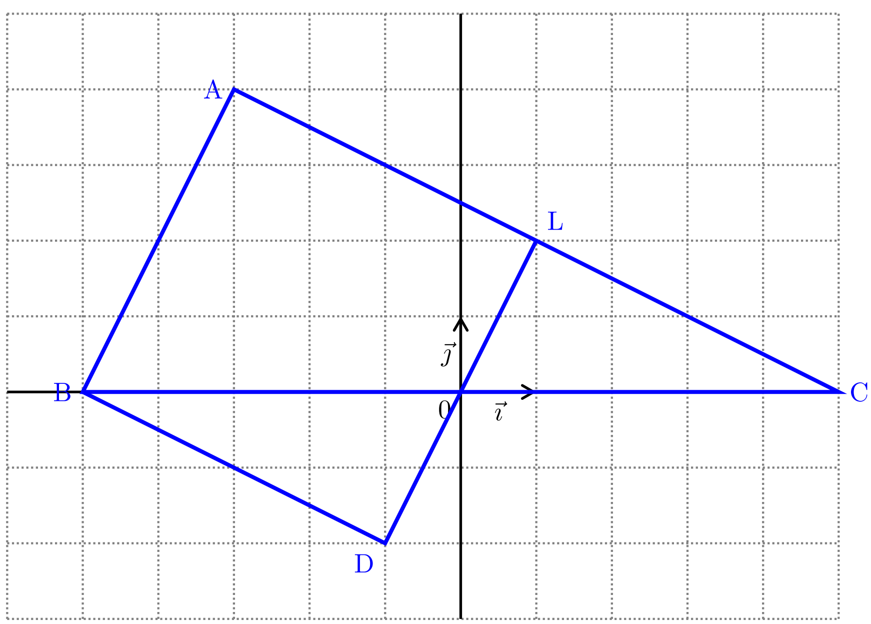
5. Justifier que $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AB}$. Que peut-on en déduire concernant le point A ?
   ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.
   De plus, CAFD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{DC}$.
   On en déduit que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FA}$, ce qui nous permet de dire que A est le milieu de [FB].



EXERCICE 4 : (6 POINTS)

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $A(-3;4)$, $B(-5{,}0)$ et $C(5{,}0)$. On note L le milieu de [AC].

1. Faire une figure que vous compléterez au fur et à mesure.



2. Montrer que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
   On va montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
   $AC^2 = (5-(-3))^2 + (0-4)^2 = 8^2 + (-4)^2 = 80$
   $AB^2 = (-5-(-3))^2 + (0-4)^2 = (-2)^2 + (-4)^2 = 20$
   $BC^2 = (5-(-5))^2 + (0-0)^2 = 10^2 = 100$
   On a donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$ donc le triangle ABC est rectangle en A et donc les droites (AB) et (AC) sont bien perpendiculaires.

3. Calculer les coordonnées du point D, symétrique de L par rapport à O.

   L est le milieu de [AC] donc $\mathrm{L}\left(\dfrac{-3+5}{2}; \dfrac{4+0}{2}\right)$ d'où L(1; 2).

   D est le symétrique de L par rapport à O donc O est le milieu de [DL].

   Or

$$\begin{aligned}
\text{O est le milieu de [DL]} &\iff \begin{cases} \frac{x_\mathrm{D}+x_\mathrm{L}}{2} = x_\mathrm{O} \\ \frac{y_\mathrm{D}+y_\mathrm{L}}{2} = y_\mathrm{O} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \frac{x_\mathrm{D}+1}{2} = 0 \\ \frac{y_\mathrm{D}+2}{2} = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x_\mathrm{D}+1 = 0 \\ y_\mathrm{D}+2 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x_\mathrm{D} = -1 \\ y_\mathrm{D} = -2 \end{cases}
\end{aligned}$$

   Ainsi D a pour coordonnées D(−1; −2).

4. Quelle est la nature du quadrilatère ABDL ?

   $\overrightarrow{\mathrm{AL}}(1-(-3); 2-4)$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AL}}(4; -2)$.

   $\overrightarrow{\mathrm{BD}}(-1-(-5); -2-0)$ donc $\overrightarrow{\mathrm{BD}}(4; -2)$.

   Ces deux vecteurs ont les mêmes coordonnées donc $\overrightarrow{\mathrm{AL}} = \overrightarrow{\mathrm{BD}}$ et donc ABDL est un parallélogramme.

   De plus les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires donc ABDL est un rectangle.

   Enfin, d'une part $\mathrm{AB} = \sqrt{20} = \sqrt{4\times 5} = 2\sqrt{5}$ et, d'autre part, L est le milieu de [AC] donc $\mathrm{AL} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{80} = \dfrac{1}{2}\sqrt{16\times 5} = \dfrac{1}{2}\times 4\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

   On en déduit que AB = AL et donc que, finalement, ABDL est un carré.

5. Montrer que les points A, B, D et L appartiennent à un même cercle dont vous préciserez le centre et le rayon.

   D'après la question précédente, les points A, B, D et L appartiennent au cercle de centre Ω, le milieu de [AD] et [BL], et de rayon $\dfrac{1}{2}\mathrm{AD}$.

   $\Omega\left(\frac{-2+(-1)}{2}; \frac{4+(-2)}{2}\right)$ donc $\Omega\left(-\frac{3}{2}; 1\right)$.

   $\mathrm{R} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AD} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(-1-(-3))^2+(-2-4)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2^2+(-6)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{40} = \dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{10} = \sqrt{10}$.

Exercice 5 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 10x + 11$.

1. a. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = -(x+5)^2 + 36$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$-(x+5)^2+36 = -(x^2+10x+25)+36 = -x^2-10x-25+36 = -x^2-10x+11 = f(x)$$

   On a bien $f(x) = -(x+5)^2 + 36$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   b. En déduire que f admet maximum sur $\mathbb{R}$. Vous préciserez sa valeur et la valeur de x correspondante.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x+5)^2 \geq 0$ donc $-(x+5)^2 \leq 0$.

   De plus $-(x+5)^2 = 0 \iff (x+5)^2 = 0 \iff x+5 = 0 \iff x = 5$.

   On a donc $f(5) = 36$ et $f(x) - f(5) = -(x+5)^2 \leq 0$ pour tout réel x.

   Finalement, pour tout réel x, $f(x) \leq f(5)$ donc le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est $f(5) = 36$.

2. a. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = (x+11)(-x+1)$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$(x+11)(-x+1) = -x^2+x-11x+11 = -x^2-10x+11 = f(x)$$

   b. En déduire les antécédents de 0 par la fonction f.

Les antécédents de 0 sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff (x+11)(-x+1) = 0 \\ &\iff x+11 = 0 \text{ ou } -x+1 = 0 \\ &\iff x = -11 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

Les antécédents de 0 par la fonction f sont donc -11 et 1.

3. Calculer les images des réels -10 et -3 par f. f est-elle décroissante sur $\mathbb{R}$?
   $f(-10) = -(-10)^2 - 10 \times (-10) + 11 = \cancel{-100} + \cancel{100} + 11 = 11$ et $f(-3) = -(-3)^2 - 10 \times (-3) + 11 = -9 + 30 + 11 = 32$.
   On a $-10 < -3$ et $f(-10) < f(-3)$ on en déduit donc que la fonction f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$.
4. À l'aide du graphique donné ci-contre, déterminer l'équation de la droite d puis lire les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et d.
   d a pour équation $y = mx + p$ et d passe par les points de coordonnées $(1;0)$ et $(-9;30)$ donc le coefficient directeur de d est

   $$m = \frac{30-0}{-9-1} = \frac{30}{-10} = -3$$

   Ainsi d a pour équation $y = -3x + p$. De plus, le point de coordonnées $(1;0)$ appartient à d donc ses coordonnées vérifient l'équation :

   $$0 = -3 \times 1 + p \iff p = 3$$

   d a donc pour équation $y = -3x + 3$.

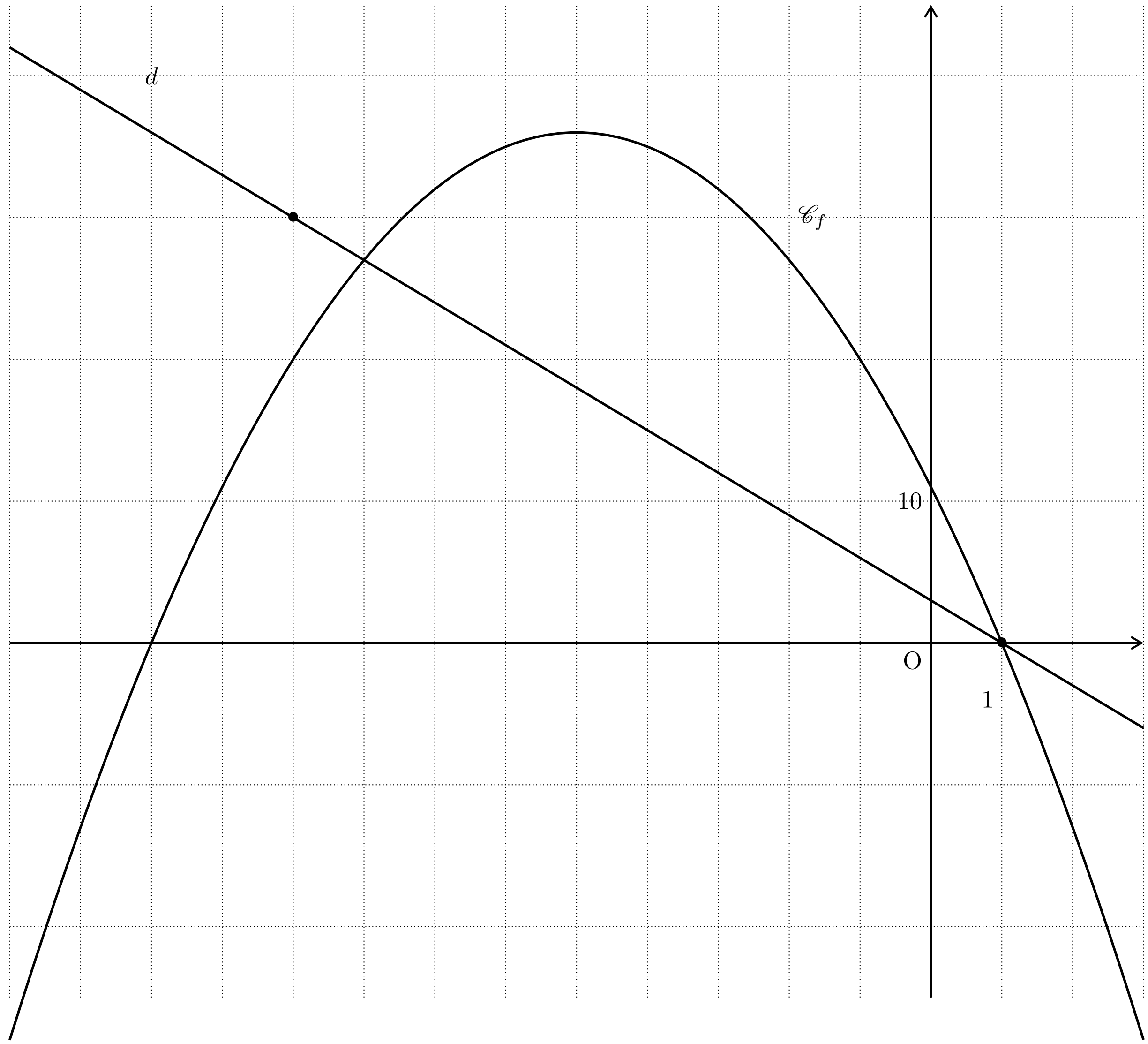
   Graphiquement, les coordonnées des points d'intersection de d et $\mathscr{C}_f$ sont $(-8;27)$ et $(1;0)$.
5. Factoriser $f(x) - 3(-x+1)$. Justifier les coordonnées lues à la question précédente.

   $$\begin{aligned} f(x) - 3(-x+1) &= (x+11)(-x+1) - 3(-x+1) \\ &= (-x+1)(x+11-3) \qquad = (-x+1)(x+8) \end{aligned}$$

   $\mathscr{C}_f$ et d se croisent au point d'abscisse x si, et seulement si $f(x) = -3x + 3$.
   Or

   $$\begin{aligned} f(x) = -3x + 3 &\iff f(x) = 3(-x+1) \\ &\iff f(x) - 3(-x+1) = 0 \\ &\iff (-x+1)(x+8) = 0 \\ &\iff -x+1 = 0 \text{ ou } x+8 = 0 \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = -8 \end{aligned}$$

   On en déduit que les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et d ont pour coordonnées $(1;0)$ et $(8;27)$.



Le barème est sur 30 points