

LYCÉE
LA FOLIE SAINT-JAMES
NEUILLY-SUR-SEINE

Première année de classe préparatoire
aux concours des grandes écoles de commerce et de management
(ECG1)

TRAVAIL ESTIVAL

Eté 2024

Le travail estival demandé par vos futurs professeurs a pour objectif de vous préparer aux exigences des études supérieures en classe prépa ECG. Il est nécessaire de lire attentivement les conseils et de suivre les consignes indiquées dans chaque matière afin d'aborder la rentrée dans les meilleures conditions.

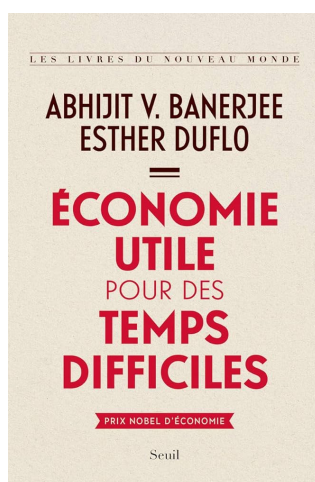
Bon travail et bon été à toutes et à tous !

Économie, Sociologie et Histoire du monde contemporain (ESH)

Le cours d'Économie, Sociologie et Histoire du monde contemporain (ESH) croise trois approches disciplinaires pour comprendre les grands enjeux économiques et sociaux du monde contemporain depuis le début du XIX^e siècle. Pour construire une réflexion pertinente et rigoureuse, telle qu'elle est exigée aux concours des grandes écoles que vous passerez en deuxième année, il est nécessaire de connaître à la fois des faits historiques précis et les théories de l'analyse économique et sociologique qui permettent de les expliquer.

Les recommandations de travail qui suivent, obligatoires et facultatives, ont donc pour objectif de vous préparer au niveau d'exigence intellectuelle de la prépa EC et de nourrir une certaine culture économique et sociale, nécessaire pour aborder sereinement les cours d'ESH à la rentrée.

1. Lecture obligatoire pour tout le monde :



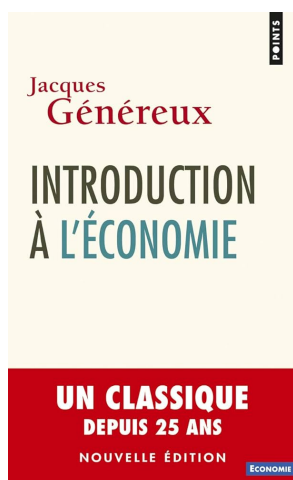
Economie utile pour des temps difficiles d'Abhijit Banerjee et Esther Duflo, lauréats du prix Nobel d'économie 2019.

Vous pouvez lire tout le livre si vous le souhaitez mais je vous demande surtout de **lire et de fichier** les chapitres 1, 2, 5, 6 et 7 qui permettent d'introduire quelques thèmes que nous reverrons en cours cette année (ambition et utilité de la science économique, pertinence des « lois » économiques, mesure et fin de la croissance, crise écologique, analyse des inégalités et effets des révolutions technologiques sur le travail).

Votre fiche doit **synthétiser les idées importantes**, les **concepts économiques** mobilisés par les auteurs et **quelques exemples** pertinents de ces cinq chapitres. Vous ne pouvez évidemment pas vous contenter de lire un résumé de ce livre sur Internet, il faut vous assurer de bien comprendre le raisonnement des auteurs et de le restituer dans votre fiche.

La semaine de la rentrée, une interrogation portera sur cette lecture afin de vérifier que vous en avez retenu les idées importantes.

2. Lecture complémentaire, conseillée pour celles et ceux qui n'ont pas suivi la spécialité SES au lycée :



Introduction à l'économie de Jacques Généreux (attention à prendre l'édition la plus récente, celle de 2017).

Si vous n'avez pas suivi la spécialité SES au lycée, lisez surtout les chapitres 2 (acteurs de l'économie) et 8 (fonctionnement des marchés) qui synthétisent les définitions et mécanismes de base introduits dans les programmes de SES du lycée.

La lecture du reste de l'ouvrage est facultative mais constitue une bonne introduction à de nombreuses approches théoriques que nous étudierons plus en détail en cours.

3. Travail (et plaisir !) facultatif pour celles et ceux qui veulent déjà aller plus loin

- Vous pouvez regarder, selon vos centres d'intérêt, ces **documentaires** pour commencer à réfléchir à certains thèmes que nous étudierons dans l'année (révolution industrielle, conditions de travail et croissance) :

Le temps des ouvriers

Série documentaire en 4 épisodes sur la naissance et l'évolution du travail ouvrier et de la classe ouvrière du XVIII^e siècle à nos jours.



Travail à la demande

Documentaire sur l'économie de plate-forme (Uber, Deliveroo...) et ses effets sur les conditions de travail des travailleurs indépendants.



Ralentir ou périr : à quoi ressemblerait une société post-croissance ?

Interview de Timothée Parrique, économiste et auteur de *Ralentir ou périr. L'économie de la décroissance* (2022). Il questionne la pertinence du PIB et de l'objectif de croissance poursuivi par les économies contemporaines pour ensuite proposer, avec la décroissance, une conception alternative de la richesse économique et sociale.



- Certains **romans** peuvent aussi constituer des lectures utiles pour aborder, par la littérature, certaines périodes de l'histoire économique et sociale ainsi que des aspects du fonctionnement de la société ou des entreprises. En voici une liste non exhaustive :

Romans sur l'histoire économique et sociale :

- ***Germinal*** ou ***Au bonheur des dames*** d'Emile Zola (mutations économiques et sociales de la fin du XIX^e : travail à la mine et syndicalisme ouvrier, début des grands magasins et du travail d'employé de commerce)
- ***Les raisins de la colère*** de John Steinbeck (conséquences économiques et sociales de la Grande Dépression des années 1930 aux Etats-Unis)
- ***Les années*** d'Annie Ernaux (évolution des modes de vie et de consommation pendant les Trente Glorieuses)
- ***Les choses*** de Georges Perec (société de consommation des années 1960 en France et stratégies de distinction culturelle de la petite bourgeoisie intellectuelle)

Romans sur les conditions de travail et l'organisation des entreprises :

- ***L'établi*** de Robert Linhart (travail à la chaîne dans les années 1960 et politisation de la classe ouvrière)
- ***Les impatientes*** de Maria Pourchet (création d'entreprise, sens au travail et stratégie de carrière de cadres supérieurs diplômés d'écoles de commerce)
- ***Cora dans la spirale*** de Vincent Message (conditions de travail et de management dans une grande entreprise du tertiaire cotée en bourse)
- ***A la ligne*** de Joseph Ponthus (conditions de travail à l'usine et précarité de l'emploi intérimaire)

Romans sur le poids des structures sociales

- ***Leurs enfants après eux*** ou ***Connemara*** de Nicolas Mathieu (déterminisme social et inégalités des chances selon la classe sociale, désindustrialisation, fin de la classe ouvrière)
- ***La place*** d'Annie Ernaux (mobilité sociale par l'école, expérience autobiographique d'une transfuge de classe)

4. Manuels et ouvrages de référence :

Ce n'est pas nécessaire d'acheter un manuel d'ESH dès maintenant. Je vous donnerai quelques conseils à la rentrée et vous pourrez aussi consulter certains ouvrages de référence au CDI du lycée.

Bon été et au plaisir de vous retrouver à la rentrée !

Elise BRAUD

Anglais LVA et LVB

A faire cet été, sans modération...

- Parler en anglais tant que possible : pendant vos voyages, avec vos amis etc. Soyez curieux et entreprenant.

- Ecoutez au moins 10 minutes d'anglais par jour : une série sans sous-titres ou avec des sous-titres anglais, par exemple: *The Crown*, *The Americans*, *Homeland*, *Mad Men*, *House of Cards*, *The Office (UK)*. Ou regardez un TED talk <http://www.ted.com/> : vous allez forcément trouver un thème à votre goût. Pourquoi ne pas prendre le temps de regarder quelques films que vous avez ratés (anglais, sous-titres anglais) tels que *Don't Look Up* (2021), *Moonlight* (2017), *Jackie* (2017), *Fantastic Beasts and Where to Find Them* (2016), *I Daniel Blake* (2016), *Spotlight* (2015), *Brooklyn* (2015), *Steve Jobs* (2015), *Selma* (2014), *Citizen Four* (2014), *The Social Network* (2010), *Lincoln* (2012), *The King's Speech* (2010) ? Ou abonnez-vous à un podcast vidéo ou audio?

- Lisez au moins 10 minutes d'anglais par jour. Choisissez un ou plusieurs articles de presse de *The BBC*, *The Economist*, *The Guardian*, *The Times*, *The Washington Post*, *The Huffington Post* ou *Vocable*.

Si c'est difficile de lire presse, voici un site qui vous permet de lire un article par niveau (commencez par le niveau 1) . www.newsinlevels.com

Voici quelques conseils de lecture, mais lisez surtout ce qui vous plaît :

Deux livres de mémoires: *Knife*, Salman Rushdie; *Born a Crime: Stories from a South African Childhood*, Trevor Noah

Deux livres d'économie: *Thinking, Fast and Slow* by Daniel Kahneman and Amos Tversky; *Doughnut Economics*, Kate Raworth

Un livre de science fiction: *The Handmaid's Tale*, Margaret Atwood

Un livre classique : *Pride and Prejudice*, Jane Austen

Un livre facile: *Afraid of the Light*, Douglas Kennedy

Un polar: N'importe lequel par Tana French

Deux romans historiques: *Brooklyn*, Colm Tóibín; *Underground Railroad*, Colson Whitehead

Bibliographie pour la rentrée (livres à acheter) :

60 étapes pour réussir en anglais, Ellipses (n'importe quelle édition).

dictionnaire bilingue d'au moins 300 000 mots

un livre de grammaire selon le niveau de l'étudiant

Sites web utiles :

site général : <http://anglaiscpge.free.fr/> <https://major-prepa.com/matiere/langues/>

dictionnaire : <http://www.larousse.fr/dictionnaires/>

questions de traduction : <http://forum.wordreference.com/>

Espagnol LVA et LVB

Après un bon repos estival, il est bon de se remettre à la pratique de l'espagnol par divers biais, deux semaines avant la rentrée. Cette année, vous apprendrez à suivre de près l'actualité dans le monde hispanique, tout en abordant en cours l'histoire de l'Espagne et de l'Amérique latine au XX^e siècle. L'aire géographique étant étendue, il est recommandé de se familiariser avec différents sujets abordés durant l'année. Autrement, vous risquez d'être perdus.

Retour de vacances oblige, la rentrée se fera sous le signe du **tourisme en Espagne**. Vous pouvez donc dès à présent sélectionner quelques articles sur ce sujet, afin d'en connaître les enjeux, **je vous demanderai d'en présenter un en cours (en espagnol, bien évidemment)**.

Il y aura une interrogation de conjugaison (tous les temps confondus) la 2^{ème} semaine de la rentrée.

Conseils :

- Reprendre **toute la conjugaison**
- Revoir quelques points de grammaire essentiels (liste non exhaustive) :
- ✓ Soler + verbe à l'infinitif
- ✓ L'impératif de défense/expression de l'interdiction (No+ verbe au subjonctif)
- ✓ Por/Para
- ✓ Le gérondif
- ✓ Le subjonctif
- ✓ L'expression de la condition
- ✓ Dont

Pour ce faire, je vous conseille l'ouvrage suivant qui vous permettra de revoir les points importants en grammaire et en conjugaison (chaque chapitre comporte quelques exercices) :

- ✓ Pierre Gerboin, *Bled espagnol, études supérieures*, Paris, Hachette, 2015.

Presse écrite :

Il est **impératif** de consulter la presse hispanique régulièrement durant les quinze derniers jours de vacances. Cela vous permettra de vous familiariser avec le monde hispanique. Pour ce faire, commencez par consulter les sites suivants :

<http://elpais.com/?cp=1>

<https://www.lavanguardia.com/>

<https://www.nytimes.com/es/>

Vocabulaire en espagnol : à lire absolument durant l'année, vous y aurez accès en ligne avec vos identifiants du CDI. Conçu pour les élèves français du supérieur, il y a du lexique et de la grammaire en bas de page de chaque article, ainsi qu'un point de grammaire de révision à la fin de chaque numéro.

Pour pratiquer l'oral :

Voici quelques sites pour vous remettre à écouter l'espagnol. Vous pouvez écouter **un podcast par jour** :

La radio :

- <http://www.bbc.com/mundo>

- <http://es.rfi.fr/>

- <http://elpais.com/>

Podcast:

À écouter absolument régulièrement. Très bonne revue de presse qui vous permettra d'étoffer vos connaissances pour les khôlles et pour les cours.

<https://elpais.com/podcasts/hoy-en-el-pais/>

Le cinéma :

Vous pouvez également regarder des films espagnols, mexicains, colombiens, argentins et chiliens. Les réalisateurs sont nombreux et de grande qualité. Le cinéma, ou les séries sont une excellente manière de se familiariser avec une culture.

Quelques grands sujets que nous aborderons durant l'année (liste non exhaustive):

- La crise migratoire en Espagne (Baléares, Ceuta et Melilla)
- Le système autonome en Espagne et les questions indépendantistes (Catalogne, Pays Basque)
- L'économie espagnole et ses grands groupes
- Le tourisme de masse en Espagne
- Les conséquences de la crise climatique en Espagne
- Les questions mémorielles dans le monde hispanique (*Ley de Memoria Democrática* -Espagne, les différents processus de justice et de mémoire en Argentine et au Chili)
- La crise migratoire Amérique centrale-Mexique-États-Unis

Allemand LVA et LVB

Bibliographie (diese Bücher sollten Sie kaufen!):

- Rouby, Francine/ Scharfen, Herbert : **Vox allemand. Le vocabulaire incontournable des examens et concours**, ellipses, 2018
- Manceau, Jean-Luc: **Grammaire allemande en 18 étapes**, ellipses, 2016

HAUSAUFGABE FÜR DIE SOMMERFERIEN

Thematischer Wortschatz: Immigration (unser erstes Thema!)

→ Lernen Sie die Vokabeln des folgenden Kapitels in **Vox allemand**:

Flüchtlinge 1, 2, 3, 4, 5, 6 (**Seiten 177-183**)

Funktionswortschatz (allgemeiner Wortschatz zum Textverständnis und Textkommentar)

→ Suchen Sie die französische Bedeutung der Vokabeln „**Lexique fonction**“ (v. annexe) und lernen Sie die Wörter

Grammatik:

→ Wiederholen Sie die grammatischen Grundregeln in **Grammaire allemande en 18 étapes**:

Lesen Sie die **Seiten 7-28** und machen Sie die Übungen (Phrase énonciative, interrogative, impérative)

Lesen Sie die **Seiten 105-124** und machen Sie die Übungen (Temps de l'indicatif)

Landeskunde:

→ Informieren Sie sich über aktuelle Ereignisse in Deutschland **mindestens zwei Mal pro Woche** in deutschsprachigen Medien

www.sueddeutsche.de (linksliberale Tageszeitung)

www.faz.net (konservative Tageszeitung)

www.spiegel.de (Nachrichtenmagazin)

www.ard.de (Erstes Deutsches Fernsehen) → tagesschau.de (20 Uhr-Nachrichten)

www.zdf.de (Zweites Deutsches Fernsehen) → heute.de (19 Uhr-Nachrichten)

in einer Suchmaschine: **Deutsche Welle, Top Thema** (de l'actualité allemande en allemand simplifié)

Bis bald!
D. Kröger

Annexe: Lexique fonction (relevé dans une copie notée 17/20)

DECRIRE, EXPLIQUER et INTERPRETER	EFFETS ET CAUSES	INTRODUCTION	DISCOURS RAPPORTE	POSSIBILITES et DANGERS
bedeuten beobachten beschreiben betrachten als betroffen sein, betreffen darauf hin/weisen dar/stellen erhöhen erklären es mangelt an... <i>nicht standhalten können</i> + <i>datif</i> fehlen fest/stellen gewinnen an klingen niedrig rechtfertigen schwächen senken sich ändern sich interessieren für sinken statt/finden steigen teil/nehmen veranschaulichen verbessern verfügen über verlieren an weiter/geben zeigen zur Verfügung stehen	aus/wirken auf + accus. Auswirkungen haben bei/tragen zu die Folgen die Gründe Folgen haben führen zu lösen verursachen wirken	behandeln berichten über die Frage stellt sich... die Herausforderung dort steht... <i>eine Frage</i> <i>beantworten</i> Es geht um die Frage... Es handelt sich um... fragen, ob... handeln von hinterfragen veröffentlichen	seiner Meinung nach betonen einverstanden sein erwähnen kritisieren laut + génitif schildern sich vorstellen können sprechen über überrascht sein unterstreichen verteidigen verzichten auf erklären behaupten fürchten	bieten brauchen bringen davor warnen, ... der Druck dienen als entwickeln erleichtern ermöglichen erreichen erzielen fördern fort/entwickeln gefährden retten in Gefahr bringen schaden schaffen Schwierigkeiten haben versuchen

Philosophie

Le cours de philosophie en ECG 1 s'inscrit dans le prolongement de celui de terminale et prépare à l'épreuve de dissertation, ainsi qu'à certaines épreuves orales des concours.

L'objectif

L'épreuve écrite des concours est une dissertation (par exemple : Résister à la violence, Le plaisir se partage-t-il ? La science nous guérit-elle de l'illusion ? La vraie vie, Les paroles et les actes, Peut-on ne rien aimer ? etc.). Les candidats sont jugés sur leur capacité à voir les enjeux de la question posée, sur la simplicité et la rigueur des élaborations conceptuelles qu'ils proposent, sur la précision et la finesse des analyses qu'ils développent, et sur la pertinence des connaissances qu'ils mobilisent pour y apporter une solution. Cette épreuve exigeante, mais stimulante est une excellente préparation aux décisions que l'on est amené à prendre dans sa vie professionnelle.

L'objectif principal n'est pas d'accumuler des connaissances et des références, mais de s'approprier des pensées fondatrices pour nourrir sa réflexion, s'orienter dans le monde contemporain, cultiver sa curiosité et faire des choix éclairés et efficaces.

Le programme

Immense et passionnant, il recouvre tous les domaines de la culture et vous donnera des bases essentielles qui vous permettront de vous repérer toute votre vie dans le champ du savoir et les débats intellectuels ou politiques, d'acquérir des méthodes de travail qui vous donneront des habitudes de réflexion efficaces (distinguer l'essentiel de l'accessoire, discerner ce qui est vraiment original, construire des raisonnements convaincants...) et de construire des projets solides. Vous vous demanderez bientôt comment il est possible d'ignorer tout ce que vous apprendrez ces deux prochaines années.

En première année, on pose les fondations, à partir de neuf thèmes :

- L'héritage de la pensée grecque et latine
- Les apports du judaïsme, du christianisme et de l'islam à la pensée occidentale
- Les étapes de la constitution des sciences exactes et des sciences de l'homme
- L'essor technologique, l'idée de progrès
- La société, le droit et l'État modernes
- Les figures du moi et la question du sujet depuis la Renaissance
- L'esprit des Lumières et leur destin
- Quelques grands courants artistiques et esthétiques depuis la Renaissance
- Les principaux courants idéologiques contemporains

En seconde année, ces fondations permettent de construire une réflexion approfondie sur un thème (par exemple : l'image, la violence, le monde, aimer, l'animal, le désir, la mémoire, le corps, la parole, la nature, la vérité, l'espace, le plaisir, l'amitié, la société, la vie, la justice, la passion, etc.).

Le travail demandé

- des dissertations sur table,
- une colle (interrogation orale individuelle) par mois,
- de nombreuses lectures,
- des exercices pour préparer les cours et faciliter leur assimilation

Bibliographie

Il n'est pas question que vos vacances soient occupées à un travail qui commencera à la rentrée. Je me contente donc ici de vous indiquer les lectures utiles pour préparer les premiers cours et vous orienter l'année prochaine (et les suivantes). J'ai choisi des livres faciles à lire. Si vous voulez des indications complémentaires, sur des sujets plus précis, je vous invite à me contacter : nicolas.franck@icloud.com

Pour s'initier agréablement à la démarche philosophique

1. **Francis Wolff, *Il n'y a pas d'amour parfait*, Éd. Fayard, 5 €** — Ce très court livre d'un philosophe contemporain est d'une lecture aisée. Il vaut par son sujet bien entendu, la construction d'une définition de l'amour, mais aussi par sa méthode exemplaire, car, l'auteur explique comment faire pour élaborer des définitions de notions qui semblent au premier abord insaisissables, ce que vous aurez vous-même à faire dans vos dissertations. Sa démarche est donc un très bon exemple de qui est demandé en philosophie à partir d'un sujet plaisant.
2. **François Jullien, *Il n'y a pas d'identité culturelle*, Éd. de L'Herne, 7,50 €** — Encore un petit livre d'un philosophe contemporain. Son auteur, spécialiste de la pensée chinoise, a consacré sa vie à la présenter et à reconsidérer la pensée européenne d'un point de vue extérieur. Fort de son savoir, il réfléchit à ce qui constitue ce qu'on appelle « identité culturelle » et montre que ce qui fait la fécondité d'une culture se trouve non pas dans sa différence avec les autres, car cela renverrait à une identité figée et bien souvent épuisée et morbide, mais dans sa capacité à nous permettre un écart, c'est-à-dire à nous placer entre deux cultures ou deux identités, non pour y renoncer mais pour les comprendre sans en être prisonnier. Un livre un peu plus difficile que le précédent, mais très stimulant. Du point de vue de la méthode, la réflexion de François Jullien est très utile : il construit des distinctions conceptuelles, par exemple entre différents sens de la notion d'universel, entre universel et commun, entre écart et différence, entre identité et ressource qui sont un modèle de ce que vous aurez à apprendre pour faire des dissertations.

Pour mieux comprendre notre époque

3. **Steven Pinker, *Le triomphe des Lumières*, Éd. Les Arènes, 24,80 €**. Livre assez gros, mais facile à lire, qui montre que le programme des Lumières défini au 18^e s. (émancipation des hommes par le savoir, déclin de la violence et progrès du droit, enrichissement des sociétés humaines grâce à la science et au commerce, etc.) est en train de se réaliser sous nos yeux sans que nous le voyions toujours. Livre très stimulant et rassurant, qui prend à rebours bon nombre d'idées reçues. Vous pouvez sauter les chapitres qui vous intéressent moins, ou, dans les chapitres, des passages qui vous semblent fastidieux ou inutiles.
4. **Christophe Blain et Jean-Marc Jancovici, *Le monde sans fin*, Éd. Dargaud, 27 €**. Cette bande dessinée, dont vous trouverez une présentation sur le site de l'éditeur (<https://urlz.fr/iHI9>) n'a pas de substance philosophique, mais est une excellente introduction à la question du changement climatique, qui est le cadre dans lequel se déroulera votre vie professionnelle et aux enjeux duquel il faut s'initier. Lecture recommandable et recommandée.

Bonnes vacances, au plaisir de faire votre connaissance en septembre,

Nicolas FRANCK.

Lettres

Les cours de Lettres représentent 3h hebdomadaires + colles + TD + DS

Objectifs : en complémentarité avec vos cours de philosophie, ils sont destinés à vous accompagner dans une démarche d'élaboration d'une culture générale à même de vous faire réfléchir sur le monde moderne qui vous entoure, et à vous aider à progresser en termes d'expression (écrite comme orale), d'esprit critique et de capacité de synthèse.

Méthodologiquement, ils ont pour fonction de vous préparer

- aux épreuves écrites des concours que sont :
 - la dissertation de philosophie-littérature / culture générale, pour compléter les références vues en cours de philosophie, épreuve qui sera prise en charge essentiellement par votre professeur de philosophie
 - les épreuves de résumé / contraction / synthèse
- aux épreuves orales des entretiens.

Le programme : en nous inspirant des rubriques du programme national

- L'héritage de la pensée grecque et latine ;
- Les apports du judaïsme, du christianisme et de l'islam à la pensée occidentale ;
- Les étapes de la constitution des sciences exactes et des sciences de l'homme ;
- L'essor technologique, l'idée de progrès ;
- La société, le droit et l'Etat modernes ;
- Les figures du moi et la question du sujet depuis la Renaissance ;
- L'esprit des Lumières et leur destin ;
- Quelques grands courants artistiques et esthétiques depuis la Renaissance ;
- Les principaux courants de pensée contemporains,

nous procéderons à un parcours chronologique qui nous permettra de revisiter les grandes périodes historiques artistiques et culturelles dont notre monde contemporain est héritier.

Afin de vous préparer à ce programme, je vous demande de lire pour la rentrée :

- **Jean-Pierre Vernant, *L'Univers, les dieux, les hommes* (1999)**
- **E. Hamilton, *La mythologie, ses dieux ses héros ses légendes***
<https://www.marabout.com/la-mythologie-9782501141482>

Prenez des notes sur ces lectures dans un cahier prévu à cet effet, votre cahier "CULTURE", que vous apporterez à la rentrée.

=> JP Vernant : résumer chaque chapitre en 1/2 page à 1 page.

=> Hamilton :

- a) choisir au moins 5 figures mythologiques que vous ne connaissiez pas et en résumer l'histoire
- b) reproduire l'arbre généalogique et bien connaître les histoires des Atrides et des Labdacides

Je vous demande par ailleurs de vous procurer, toujours pour la rentrée :

- **Le Manuel de Culture générale de chez Vuibert :**
<https://www.vuibert.fr/ouvrage/9782311404852-culture-generale>

Passez de bonnes vacances, et à la rentrée !

Mme LETENNEUR

Travail préparatoire à la rentrée en Mathématiques

1 Présentation du début d'année

Le programme de Mathématiques appliquées se compose de trois grands thèmes :

Analyse : étude des fonctions et des suites, séries, intégration, équations différentielles.

Algèbre linéaire : systèmes linéaires, matrices, espaces vectoriels et applications linéaires.

Probabilités discrètes : probabilités conditionnelles, moments, lois usuelles.

Vous noterez qu'il ne contient pas de géométrie. Durant les deux premières semaines nous travaillerons le calcul et la logique afin de poser des bases solides, nous aborderons ensuite des chapitres d'Analyse qui se situent dans la continuité de ce que vous avez étudié au lycée. Nous introduirons les matrices à l'automne, et le premier chapitre de probabilité ne sera traité qu'en janvier.

L'enchaînement des chapitres a été choisi dans un souci de progressivité, de manière à permettre à tous les élèves de consolider leurs connaissances et de prendre confiance en eux. Pour chaque chapitre, nous proposons des exercices de niveaux variés, si possible tirés d'annales de concours.

2 Préparation de la rentrée

Vous devez avant tout profiter des vacances pour vous reposer car, dès la rentrée, le rythme de travail sera intense. Nous vous recommandons de recommencer à faire des Mathématiques deux semaines avant la rentrée. Il ne s'agit pas d'assimiler de nouvelles connaissances, mais plutôt de vous réhabituer à faire des Mathématiques. On s'attend à ce que vous arriviez prêt au travail.

Voici quelques thèmes sur lesquels vous pouvez vous exercer durant les deux semaines précédant la rentrée. Nous insistons avant tout sur le calcul, tous les concepts et résultats importants du lycée seront revus et approfondis.

Calcul

- Savoir calculer avec des fractions, en particulier mettre au même dénominateur.
- Savoir développer un produit (distributivité, double distributivité).
- Connaître les identités remarquables

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

- Savoir calculer avec des puissances et des racines carrées.

Équations et inéquations

- Savoir résoudre une équation ou une inéquation du premier degré.
- Savoir résoudre une équation ou une inéquation du second degré.
- Savoir étudier le signe d'une expression algébrique (produit, fraction rationnelle).

Suites

- Revoir les suites arithmétiques et les suites géométriques.

Fonctions

- Revoir les règles de dérivation.
- Savoir mener une étude de fonction.
- Revoir les relations fonctionnelles de l'exponentielle et du logarithme népérien.

Vous pouvez réviser le programme de terminale en reprenant quelques annales de BAC, des sujets avec leurs corrigés sont disponibles sur le site de l'[APMEP](#) (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public). En ce qui concerne le calcul littéral, vous trouverez des exercices dans des livres de seconde ou de première, vous en avez en accès libre sur le site de [Le Livre Scolaire](#).

Vous trouverez dans les pages qui suivent des exercices de révision assez simples sur lesquels vous pouvez vous tester et vous entraîner.

Bon travail et bonnes vacances,

M. Gendulphe

Exercices sur le calcul algébrique

Les exercices ci-dessous sont du niveau des classes de troisième, seconde et première. Ils ne devraient poser aucun problème. Vous trouverez les solutions des exercices à la fin du polycopié.

Exercice 1.

Établir les égalités suivantes :

$$(a) (x+1)(2x-1) = 2x^2 + x - 1 \quad (b) x(x+1)(x+2) = x^3 + 3x^2 + 2x \quad (c) (x^2 + x + 1)(x-1) = x^3 - 1$$

Exercice 2.

Établir les égalités suivantes :

$$(a) \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1} \quad (b) \frac{x}{x+1} - 1 = -\frac{1}{x+1} \quad (c) \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-3}{x^2-1}$$

Exercice 3.

Résoudre les équations suivantes :

$$(a) 2x+1 = x-1 \quad (b) (x+1)(x-2) = 0 \quad (c) \frac{2x+1}{x-1} = 1$$

Exercice 4.

Résoudre les équations suivantes :

$$(a) 2x^2 - x - 1 = 0 \quad (b) x^2 + x + 1 = 0 \quad (c) \frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x+2}$$

Exercice 5.

Résoudre les inéquations suivantes :

$$(a) 2x - 1 \geq 0 \quad (b) x + 1 \geq 2x - 2 \quad (c) 2x^2 + x < 2x + 1 \quad (d) \frac{x-2}{x+1} \geq 0$$

Dans le cas où vous rencontreriez des difficultés, il serait utile de revoir quelques éléments de cours et de vous entraîner sur d'autres exercices. L'éditeur [Le Livre Scolaire](#) met gratuitement en ligne ses manuels scolaire ;

- pour travailler les équations et inéquations du premier degré, voir dans le chapitre 0 du manuel de seconde : [calcul littéral](#) et [résolution d'équations](#).
- pour travailler les équations et inéquations du second degré, voir le chapitre 3 du manuel de première : [résolution d'équations du second degré](#) et [résolution d'inéquations du second degré](#).

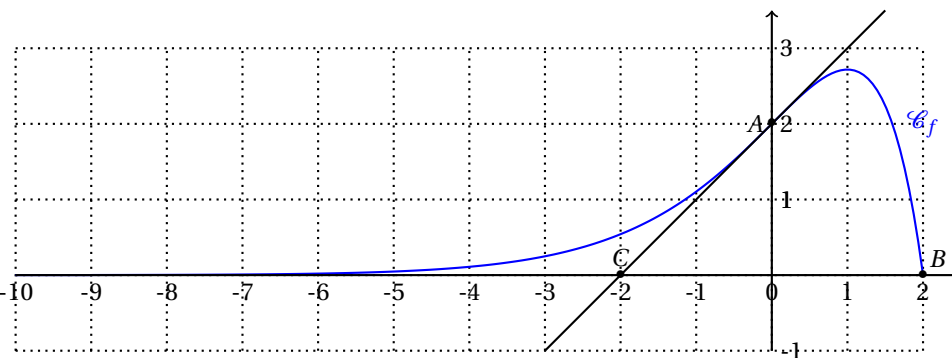
Quelques annales de BAC

Exercice 6 (BAC ES, Centres étrangers, juin 2019).

Partie A

Dans le repère ci-dessous, on note \mathcal{C}_f la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-10 ; 2]$. On a placé les points $A(0, 2)$, $B(2, 0)$ et $C(-2, 0)$. On dispose des renseignements suivants :

- Le point B appartient à la courbe \mathcal{C}_f .
- La droite (AC) est tangente en A à la courbe \mathcal{C}_f .
- La tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1 est une droite horizontale.



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.

1. Indiquer les valeurs de $f(0)$ et de $f(2)$.
2. Indiquer la valeur de $f'(1)$.
3. Donner une équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A .
4. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ dans l'intervalle $[-10 ; 2]$.
5. Indiquer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-10 ; 2]$.
6. Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe, et celui sur lequel elle est concave.

Partie B

Dans cette partie, on cherche à vérifier par le calcul les résultats lus graphiquement dans la partie A. On sait désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle $[-10 ; 2]$ par :

$$f(x) = (2 - x)e^x.$$

7. (a) Calculer $f(0)$ et $f(2)$.
 (b) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre x appartenant à l'intervalle $[-10 ; 2]$.
 (c) En déduire la valeur de $f'(1)$.
8. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
9. (a) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[-10 ; 2]$.
 (b) En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ dans l'intervalle $[-10 ; 2]$.
10. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-10 ; 2]$.

Exercice 7 (BAC ES, Centres étrangers, juin 2019).

Afin de conserver au fil des années un parc en bon état, un loueur de vélos se sépare chaque hiver de 20% de son stock et achète ensuite 35 nouveaux vélos. On modélise la situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n , u_n représente le nombre de vélos présents dans le stock de ce loueur au 1^{er} juillet de l'année $(2018 + n)$. Au 1^{er} juillet 2018, le loueur possède 150 vélos, ainsi $u_0 = 150$.

1. (a) Déterminer le nombre de vélos dans le stock du loueur au 1^{er} juillet 2019.
(b) Justifier que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = 0,8u_n + 35$.
2. (a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

rang n	terme u_n
0	150
1	...
2	...
3	...

- (b) Pour les termes de rang 36, 37, 38, 39 et 40, on obtient les résultats suivants (arrondis au millième) :

rang n	terme u_n
36	174,992
37	174,994
38	174,995
39	174,996
40	174,997

Conjecturer la limite de la suite (u_n) .

3. Dans cette question, on cherche à démontrer la conjecture émise à la question précédente.

Pour cela, on pose pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 175$.

- (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- (b) En déduire que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = -25 \times 0,8^n + 175$.
- (c) Déterminer alors la limite de la suite (u_n) .

Exercice 8 (BAC S, Amérique du Nord, juin 2013).

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}.$$

1. (a) Démontrer que, pour tout réel $x \in]0 ; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1 - 2\ln(x)}{x^3}.$$

- (b) Résoudre dans $]0 ; +\infty[$ l'inéquation $-1 - 2\ln(x) > 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.
- (c) Dresser le tableau de variation de f .

2. Étudier le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Exercice 9 (BAC spécialité, Amérique du Nord, mai 2024).

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln(x^2) - \frac{1}{x}.$$

On a tracé ci-dessous la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f , ainsi que la droite T , tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A de coordonnées $(1; -1)$. Cette tangente passe également par le point B de coordonnées $(0; -4)$.

Partie A

1. Lire graphiquement $f'(1)$ et donner l'équation réduite de la tangente T .
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave. Que semble représenter le point A pour la courbe \mathcal{C}_f ?

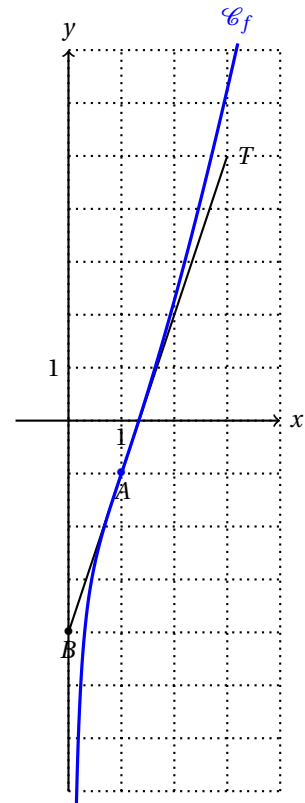
Partie B

3. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en 0 .
4. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - (a) Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - (b) Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$,

$$f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}.$$

5. (a) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- (b) Étudier les variations de la fonction f' , puis le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
6. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- (b) Montrer que α vérifie :

$$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$



Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1.

Dans chaque cas on développe en appliquant la distributivité.

$$(a) (x+1)(2x-1) = x(2x-1) + (2x-1) = 2x^2 - x + 2x - 1 = \boxed{2x^2 + x - 1}$$

$$(b) x(x+1)(x+2) = x(x^2 + 2x + x + 2) = x(x^2 + 3x + 2) = \boxed{x^3 + 3x^2 + 2x}$$

$$(c) (x^2 + x + 1)(x - 1) = (x^3 + x^2 + x) - (x^2 + x + 1) = \boxed{x^3 - 1}$$

Solution de l'exercice 2.

Dans chaque cas on met les fractions au même dénominateur.

$$(a) \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} - \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1}{x^2-1} - \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{(x+1) - (x-1)}{x^2-1} = \boxed{\frac{2}{x^2-1}}$$

$$(b) \frac{x}{x+1} - 1 = \frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} = \frac{x - (x+1)}{x+1} = \frac{x - x - 1}{x+1} = \boxed{-\frac{1}{x+1}}$$

$$(c) \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{2(x-1) - (x+1)}{x^2-1} = \frac{2x-2-x-1}{x^2-1} = \boxed{\frac{x-3}{x^2-1}}$$

Solution de l'exercice 3.

(a) On regroupe les inconnues dans le membre de gauche et les termes constants dans le membre de droite :

$$\begin{aligned} 2x+1 &= x-1 &\iff 2x-x &= -1-1 \\ & &\iff &x = -2. \end{aligned}$$

L'équation admet $x = -2$ pour unique solution.

(b) Il s'agit d'une équation produit nul :

$$\begin{aligned} (x+1)(x-2) &= 0 &\iff x+1 &= 0 \text{ ou } x-2 = 0 \\ & &\iff x &= -1 \text{ ou } x = 2. \end{aligned}$$

L'équation admet deux solutions : -1 et 2 .

(c) On suppose $x \neq 1$ et on multiplie chaque membre par $x-1$:

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x-1} &= 1 &\iff 2x+1 &= x-1 \\ & &\iff 2x-x &= -1-1 \\ & &\iff &x = -2 \end{aligned}$$

L'équation admet -2 pour unique solution.

Solution de l'exercice 4.

(a) Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9 > 0$, ainsi elle admet deux solutions réelles : $x_1 = \frac{1 - \sqrt{9}}{4} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{1 + \sqrt{9}}{4} = 1$.

(b) Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = -3 < 0$, par conséquent elle n'admet pas de solution réelle.

(c) On suppose $x \neq 1$ et $x \neq -2$. En multipliant les deux membres par $(x-1)(x+2)$ il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} &= \frac{x+1}{x+2} &\iff x+2 &= (x+1)(x-1) \\ & &\iff x+2 &= x^2-1 \\ & &\iff 0 &= x^2-x-3. \end{aligned}$$

Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 13 > 0$, elle admet donc deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}.$$

Solution de l'exercice 5.

(a) Pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} 2x - 1 \geq 0 &\iff 2x \geq 1 \\ &\iff x \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $[\frac{1}{2}; +\infty[$.

(b) On regroupe les inconnues dans le membre de droite et les termes constants dans le membre de gauche :

$$\begin{aligned} x + 1 \geq 2x - 2 &\iff 1 + 2 \geq 2x - x \\ &\iff 3 \geq x \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $] -\infty ; 3]$.

(c) On regroupe tous les termes dans le membre de gauche :

$$\begin{aligned} 2x^2 + x < 2x + 1 &\iff 2x^2 + x - 2x - 1 < 0 \\ &\iff 2x^2 - x - 1 < 0. \end{aligned}$$

Étudions le signe du polynôme du second degré $2x^2 - x - 1$. Son discriminant vaut $\Delta = 9 > 0$, il admet deux racines réelles : $-\frac{1}{2}$ et 1 . On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$2x^2 - x - 1$	+	0	-	0
	+	0	-	0
	+	0	-	0

On conclut que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $] -\frac{1}{2}; 1[$.

(d) On étudie le signe de $\frac{x-2}{x+1}$ en supposant $x \neq -1$. Le signe du numérateur et du dénominateur sont donnés par :

- $x - 2 > 0 \iff x > 2$
- $x + 1 > 0 \iff x > -1$

On dresse alors le tableau de signe de $\frac{x-2}{x+1}$:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x - 2$	-	-	0	+
$x + 1$	-	0	+	+
$\frac{x-2}{x+1}$	+	-	0	+

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{x-2}{x+1} \geq 0$ est $] -\infty ; -1[\cup [2 ; +\infty[$.

Solution de l'exercice 6 (Centres étrangers 2019).

1. On trouve : $f(0) = 2$ et $f(2) = 0$.
2. La tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1 est horizontale, de ce fait son coefficient directeur est nul : $f'(1) = 0$.
3. Une équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point $A(0,2)$ est donnée par :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

soit $y = f'(0)x + 2$.

Or, on sait que la tangente à \mathcal{C}_f au point $A(0,2)$ est la droite (AC) , dont le coefficient directeur est égal à :

$$\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{0 - 2}{-2 - 0} = 1.$$

On en déduit que $f'(0) = 1$, et que la tangente (AC) a pour équation $y = x - 2$.

4. L'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions x_1 et x_2 dans $[-10; 2]$, on trouve $x_1 \approx -1,1$ et $x_2 \approx 1,8$.
5. Voici le tableau de variation de f :

x	-10	1	2
$f(x)$	0	$f(1)$	0

(Arrows in the original image indicate an increase from 0 to $f(1)$ and a decrease from $f(1)$ to 0.)

6. La tangente (AC) traverse la courbe \mathcal{C}_f en son point de tangence A , par conséquent A est un point d'inflexion de \mathcal{C}_f , et f change de convexité en $x = 0$. Comme \mathcal{C}_f se situe au-dessus de ses tangentes sur $[-10; 0]$, il vient que la fonction f est convexe sur $[-10; 0]$. Comme \mathcal{C}_f se situe en-dessous de ses tangentes sur $[0; 2]$, il vient que la fonction f est concave sur $[0; 2]$.
7. (a) On trouve : $f(0) = 2e^0 = 2$ et $f(2) = (2 - 2)e^2 = 0$.
 (b) Pour tout $x \in [-10; 2]$, $f'(x) = (-1)e^x + (2 - x)e^x = (1 - x)e^x$.
 (c) On trouve : $f'(1) = 0$.
8. Une équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, soit $y = x + 2$.
9. (a) Étudions le signe de $f'(x)$: pour tout $x \in [-10; 2]$,

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff (1 - x)e^x > 0 \\ &\iff 1 - x > 0 \quad (\text{car } e^x > 0) \\ &\iff 1 > x. \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de variation :

x	-10	1	2
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$12e^{-10}$	e	0

(Arrows in the original image indicate an increase from $12e^{-10}$ to e and a decrease from e to 0.)

- (b) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[-10, 1]$, de plus $f(-10) < 1 < f(1)$; selon le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution x_1 dans $[-10; 1]$.
 La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1, 2]$, de plus $f(1) > 1 > f(2)$; selon le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution x_2 dans $[1; 2]$.

Conclusion : l'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans $[-10; 2]$.

- (c) Pour tout $x \in [-10; 2]$,

$$f''(x) = (-1)e^x + (1 - x)e^x = -xe^x.$$

On en déduit que $f''(x)$ est du signe de $-x$, d'où

x	-10	0	2
$f''(x)$	+	0	-
f	convexe		concave

Le fonction f est convexe sur $[-10 ; 0]$ et concave sur $[0 ; 2]$, le point d'abscisse 0 (c'est-à-dire A) est un point d'inflexion de la courbe \mathcal{C}_f .

Solution de l'exercice 7 (Centres étrangers, juin 2019).

1. (a) Sachant que 20% de 150 est égal à 30, on trouve que le nombre de vélos dans le stock au 1^{er} juillet 2019 est :

$$u_1 = 150 - 30 + 35 = 155.$$

- (b) Selon l'énoncé, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n - \frac{20}{100}u_n + 35 = \left(1 - \frac{2}{10}\right)u_n + 35 = 0,8u_n + 35.$$

rang n	terme u_n
0	150
1	155
2	159
3	162,2

2. (a) (b) On conjecture que la suite (u_n) converge vers 175.
 3. (a) Montrons que la suite (v_n) satisfait une récurrence géométrique : pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 175 \\ &= 0,8u_n + 35 - 175 \\ &= 0,8u_n - 140 \\ &= 0,8(u_n - 175) \\ &= 0,8v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = u_0 - 175 = -25$.

- (b) La suite (v_n) est géométrique de raison 0,8 d'où

$$\begin{aligned} v_n &= v_0 \times 0,8^n \\ u_n - 175 &= -25 \times 0,8^n \\ u_n &= -25 \times 0,8^n + 175. \end{aligned}$$

- (c) Comme $0,8 \in [0 ; 1[$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$, par suite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -25 \times \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n\right) + 175 = 175.$$

La suite (u_n) converge vers 175.

Solution de l'exercice 8 (BAC S, Amérique du Nord, juin 2013).

1. (a) Pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - (1 + \ln(x)) \times 2x}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x - 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{-x - 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{-1 - 2 \ln(x)}{x^3}.$$

(b) Pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} -1 - 2 \ln(x) > 0 &\iff -2 \ln(x) > 1 \\ &\iff \ln(x) < -\frac{1}{2} \quad (\text{on divise par } -2) \\ &\iff x < e^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{car exp est strictement croissante}). \end{aligned}$$

Pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a $x^3 > 0$, par conséquent $f'(x)$ est du signe de $-1 - 2 \ln(x)$, on en déduit :

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

(c) Connaissant le signe de la dérivée, on peut dresser le tableau de variation :

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{e}{2}$	0

$$\text{On a } f(e^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1 + \ln(e^{-\frac{1}{2}})}{(e^{-\frac{1}{2}})^2} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{e^{-1}} = \frac{e}{2}.$$

2. Pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\iff \frac{1 + \ln(x)}{x^2} > 0 \\ &\iff 1 + \ln(x) > 0 \quad (\text{car } x^2 > 0) \\ &\iff \ln(x) > -1 \\ &\iff x > e^{-1} \quad (\text{car exp est strictement croissante}). \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

Solution de l'exercice 9 (BAC spécialité, Amérique du Nord, mai 2024).

1. Le nombre dérivé $f'(1)$ est égal à la pente de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1, c'est-à-dire à la pente de T . Sachant que les points A et B appartiennent à T , on trouve :

$$f'(1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4 - (-1)}{0 - 1} = 3.$$

Une équation de la tangente T est $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$, soit $y = 3(x - 1) - 1$, ou encore $y = 3x - 4$.

2. En regardant la position de la courbe \mathcal{C}_f par rapport à ses tangentes, il semble que f soit concave sur $]0; 1[$ et convexe sur $]1; +\infty[$. La tangente T semble traverser la courbe \mathcal{C}_f en son point de tangence A , ceci nous conduit à penser que A est un point d'inflexion de \mathcal{C}_f .

3. On remarque d'abord que $f(x) = 2x \ln(x) - \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

Limite en $+\infty$: on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \ln(x) = +\infty$ par produit de limites, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Limite en 0 : on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln(x) = 0$ par croissance comparée, et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

4. (a) Pour tout $x > 0$, on a $f(x) = 2x \ln(x) - \frac{1}{x}$, d'où

$$f'(x) = 2 \ln(x) + 2x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 2 \ln(x) + 2 + \frac{1}{x^2}.$$

(b) Pour tout $x > 0$,

$$f''(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} = \frac{2x^2 - 2}{x^3} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x^3},$$

en utilisant l'identité $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.

5. (a) On étudie le signe de $f''(x)$: pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\iff \frac{2(x-1)(x+1)}{x^3} > 0 \\ &\iff (x-1)(x+1) > 0 \quad (\text{car } 2 > 0 \text{ et } x^3 > 0) \\ &\iff x-1 > 0 \quad (\text{car } x+1 > 0) \\ &\iff x > 1. \end{aligned}$$

On en déduit que f est convexe sur $[1; +\infty[$, concave sur $]0; 1]$, et que A est un point d'inflexion de \mathcal{C}_f .

(b) De la question précédente on déduit le tableau suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$			

On y observe que la fonction f' admet un minimum sur $]0; +\infty[$ égal à 3, en particulier $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Il s'ensuit que la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

6. (a) La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, de plus elle vérifie

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty;$$

selon le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$.

(b) Par définition $f(\alpha) = 0$, or

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 &\iff \alpha \ln(\alpha^2) - \frac{1}{\alpha} = 0 \\ &\iff \alpha \ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha} \\ &\iff \ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha^2} \\ &\iff \alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right). \end{aligned}$$

On en conclut que $\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$.