Ch. 9 — Probabilités

1 Déterminer l'univers et les événements d'une expérience aléatoire

Exercice 1

Une urne contient 10 boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 10. On tire une boule au hasard.

1. Déterminer l'univers Ω.

   Préciser les éventualités composant chacun des événements suivants :
2. L'événement A : « Tirer la boule portant le numéro 2 ».
3. L'événement B : « Tirer une boule numérotée 4 ou 7 ».
4. L'événement C : « Tirer une boule portant un numéro strictement supérieur à 10 ».
5. L'événement D : « Tirer une boule portant un numéro positif ».
6. L'événement E : « Tirer une boule portant un numéro pair ».
7. L'événement F : « Tirer une boule portant un numéro impair ». Que peut-on dire de F ?
8. L'événement $B \cup E$.
9. L'événement $B \cap E$.

Pour les exercices 2 à 4, décrire l'univers associé à l'expérience aléatoire définie, et préciser le nombre d'éventualités qui le composent.

Exercice 2

On lance cinq fois une pièce de monnaie. La sortie de Pile rapporte un point, la sortie de Face ne rapporte rien. On s'intéresse à la somme des points obtenus à l'issue des cinq lancers.

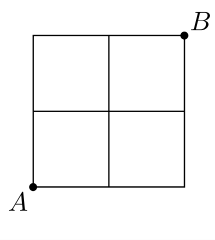
Exercice 3

On lance deux dés cubiques, et on soustrait le plus petit résultat obtenu au plus grand.

Exercice 4

Pour se rendre du point A au point B, on choisit au hasard un trajet parmi ceux possibles en se déplaçant d'un « pas » vers la droite ou d'un « pas » vers le haut.

> Indication. — Une éventualité est le trajet $HHDD$.



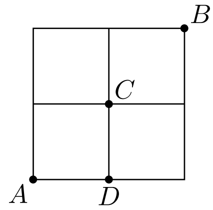
Pour les exercices 5 à 6, préciser les éventualités composant chacun des événements définis.

Exercice 5

Pour l'expérience aléatoire définie à l'exercice 2, on définit les événements :

1. E : « Le résultat est impair » ;
2. F : « Le résultat est au plus égal à 5 ».

Exercice 6



Pour l'expérience aléatoire définie à l'exercice 4, on définit les événements :

1. E : « Le chemin passe par C » ;
2. F : « Le chemin passe par C, mais pas par D ».

Exercice 7 *Dans la vie de tous les jours*

Deux personnes A et B empruntent un ascenseur depuis le rez-de-chaussée d'un immeuble de trois étages. On assimile leur choix à une expérience aléatoire, et on s'intéresse aux étages demandés, dans l'ordre, par A puis par B.

> Indication. — Si A demande le premier et B le troisième, on peut présenter cette issue ainsi : $(1\,;\,3)$.

1. Quel est l'univers défini par cette expérience aléatoire ?
2. Déterminer les éventualités composant chacun des événements suivants :
   (a) A et B descendent au même étage ;
   (b) le troisième étage n'est pas demandé ;
   (c) B descend de l'ascenseur avant A.

Exercice 8

On tire une carte d'un jeu de 52 cartes (bien mélangé). On note les événements :

- T : « La carte tirée est un trèfle » ;
- C : « La carte tirée est un carreau » ;
- P : « La carte tirée est un pique » ;
- V : « La carte tirée est un valet » ;
- D : « La carte tirée est une dame » ;
- N : « La carte tirée est un nombre (de l'as au 10) ».

1. Décrire les événements suivants à l'aide d'une phrase :

$$\overline{P} \qquad \overline{V} \qquad C \cap V \qquad C \cup D \qquad P \cap C \qquad V \cup D \qquad \overline{C} \cup V.$$

2. Écrire les événements suivants à l'aide des événements T, C, P, V, D et N.
   (a) « La carte tirée n'est pas un carreau »
   (b) « La carte tirée est une tête »
   (c) « La carte tirée est une dame autre que trèfle »
   (d) « La carte tirée est le valet de pique »
   (e) « La carte tirée est un pique ou une tête »
   (f) « La carte tirée n'est ni une dame, ni un valet »
   (g) « La carte tirée est une tête à pique »
   (h) « La carte tirée est un nombre à cœur »

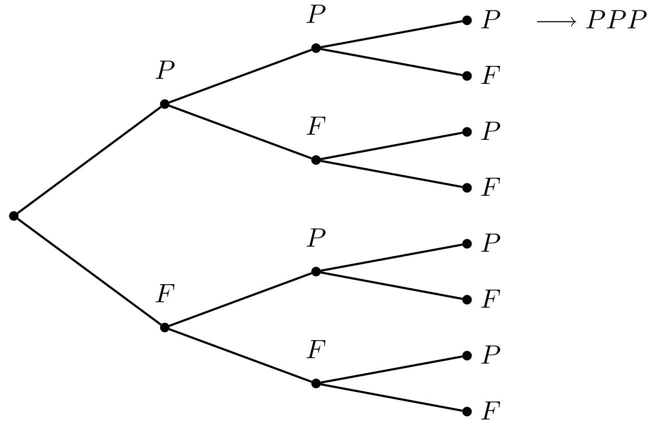
2 Méthodes de dénombrement

1°) Arbre de choix

Exercice 9

On lance trois fois de suite une pièce bien équilibrée. On note P l'événement « la pièce tombe sur pile » et F l'événement « la pièce tombe sur face ».

Pour déterminer toutes les issues de cette expérience aléatoire, on peut utiliser l'arbre de choix ci-contre, à compléter.



2°) Tableau à double entrée

Exercice 10

Une urne contient 15 boules numérotées 1 ou 2 et de couleur bleue, verte ou rouge. On sait que :
- 7 boules portent le numéro 1 ;
- une seule boule verte porte le numéro 2 ;
- 10 boules sont rouges et 4 d'entre elles portent le numéro 2 ;
- aucune boule verte ne porte le numéro 1.

Pour retrouver la composition de l'urne, on peut compléter le tableau à double entrée ci-dessous.

Couleur / Numéro	Bleu	Vert	Rouge	Total
1				
2				
Total				

3 Calculs de probabilités

Exercice 11

On reprend l'expérience aléatoire définie à l'exercice 9.

D'après cet exercice, l'univers contient 8 éventualités équiprobables.

Déterminer la probabilité des événements :

- A : « On obtient deux fois face et une fois pile »
- B : « On obtient au moins une fois pile ».

Exercice 12

On reprend l'expérience aléatoire définie à l'exercice 10.

Déterminer la probabilité des événements :

- A : « la boule tirée est verte et porte le numéro 2 »
- B : « la boule tirée est rouge »
- C : « la boule tirée est rouge ou verte et porte le numéro 2 »

Exercice 13

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « On obtient un roi »

B : « On obtient un trèfle »

C : « On obtient le roi de trèfle »

D : « On obtient un roi ou un trèfle ».

Exercice 14

On forme un nombre de deux chiffres en lançant deux fois de suite un dé cubique bien équilibré ; le premier nombre obtenu fournit le chiffre des dizaines, le second le chiffre des unités.

Calculer la probabilité de chacun des événéments suivants :

A : « Le nombre obtenu est pair »

B : « Le nombre obtenu contient deux chiffres pairs »

C : « Le chiffre des dizaines est le double de celui des unités »

D : « le nombre est strictement supérieur à 44 ».

Note. — On pourra utiliser un tableau à double entrée.

Exercice 15

1. On lance un dé cubique équilibré dont deux faces portent le numéro 1, trois faces portent le numéro 2 et une face porte le numéro 3.

   Déterminer la probabilité des événements suivants :

   - A : « On obtient le nombre 1 » ;
   - B : « Le résultat est impair » ;
   - C : « Le résultat est supérieur ou égal à 2 ».

2. On lance désormais deux fois ce dé. Déterminer la probabilité des événements suivants :

   - D : « La somme des nombres obtenus est paire » ;
   - E : « On tire (au moins) un 3 » ;
   - F : « On obtient un double » ;
   - G : « On obtient deux fois le deux ».

Tableau de probabilité d'une expérience aléatoire

Exercice 16

Le cycle d'allumage du feu tricolore au carrefour devant le lycée est le suivant :
– feu vert pendant 45 secondes ;
– feu orange pendant 5 secondes ;
– feu rouge pendant 20 secondes.

En admettant qu'un automobiliste arrive au hasard devant l'une des trois positions possibles du feu tricolore, déterminer la loi de probabilité — c'est-à-dire le tableau de probabilité — associée à cette expérience aléatoire.

Exercice 17

On lance deux dés équilibrés, l'un cubique et l'autre tétraédrique.

On soustrait alors le résultat obtenu sur le dé tétraédrique (compris entre 1 et 4) à celui obtenu sur le dé cubique (compris entre 1 et 6).

1. Lister les éventualités possibles dans un tableau à double entrée. En déduire Ω.
2. En justifiant l'équiprobabilité des résultats des lancers de dés, déterminer la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire.
3. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

   - A : « Le résultat est strictement positif » ;
   - B : « Le résultat est négatif » ;
   - C : « Le résultat est pair » ;
   - D : « Le résultat est pair et négatif » ;
   - E : « Le résultat est pair et strictement positif » ;
   - F : « Le résultat est pair ou négatif ».

Exercice 18

On lance deux dés tétraédriques équilibrés, dont les faces sont numérotées de 1 à 4.

On note le résultat du lancer réalisé par un couple (c'est-à-dire sous la forme $(x; y)$) dans l'ordre croissant des numéros obtenus.

1. Déterminer la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.
2. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
   - A : « Les deux nombres sont identiques » ;
   - B : « Les deux nombres sont consécutifs » ;
   - C : « Les deux nombres sont distincts et de même parité (c'est-à-dire soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs) ».

Exercice 19

On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée, et on note à chaque fois le côté obtenu.

On s'intéresse au nombre de fois où Pile est sorti.

1. Déterminer la loi de probabilité correspondante sur l'univers $\Omega = \{0; 1; 2; 3\}$.
2. Calculer la probabilité de l'événement « Face est sorti plus souvent que Pile ».

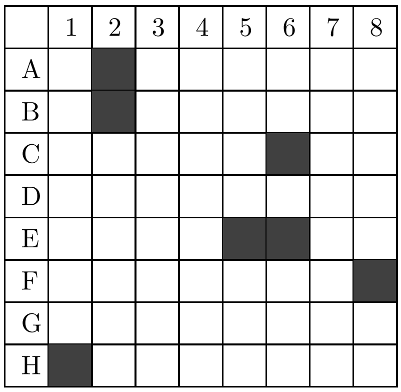
Exercice 20

Sur une grille 8×8, un joueur dispose de la manière suivante cinq bateaux :

- deux croiseurs occupant chacun deux cases ;
- trois torpilleurs occupant chacun une case.

Pour son premier tir, l'adversaire choisit une case au hasard.

1. Justifier l'hypothèse d'équiprobabilité, puis calculer la probabilité des événements suivants :
   - A : « L'adversaire touche un bateau » ;
   - B : « L'adversaire touche un torpilleur » ;
   - C : « L'adversaire touche un croiseur ».
2. L'adversaire décide de jouer son premier coup sur une case située au bord de la grille.
   Quelle est alors la probabilité qu'il touche un bateau ?
3. Même question si l'adversaire décide de jouer son premier coup dans un des coins de la grille.



Exercice 21

Voici l'énoncé proposé à une classe :

« On lance deux fois une pièce équilibrée. Pile rapporte un point, Face zéro point. Le score obtenu S est la somme des points marqués. Déterminer la loi de probabilité de S. »

Un élève a répondu :

« Il y a trois scores possibles : 0, 1 et 2. Comme la pièce est bien équilibrée, on est en situation d'équiprobabilité, donc le tableau de probabilités de S est le suivant :

issues	0	1	2
probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

. »

L'élève a-t-il raison ? Si non, proposer une autre loi de probabilité, en justifiant.