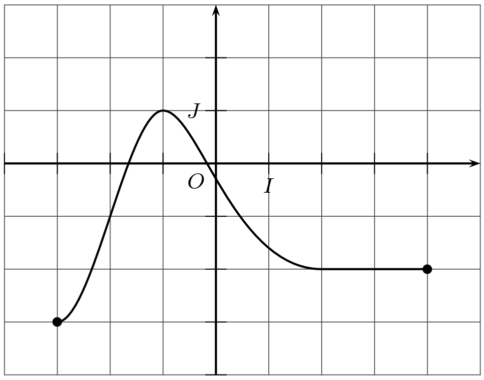
Variations de fonctions

1 Tableau de variations

Étudier les variations d'une fonction f, c'est déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est **croissante**, **décroissante** ou bien **constante**. On résume les résultats obtenus dans un **tableau de variations**.

Exemple. — Soit la fonction f définie par le tableau de variations suivant :

x	-3		-1		2		4
f	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\rightarrow$	-2



Une courbe possible est donnée ci-contre.

2 Sens de variation

Définition

*Soit f une fonction définie sur un intervalle I. La fonction f est **croissante** sur I si elle **conserve** l'ordre, c'est-à-dire que :*

$$\textit{pour tous réels } a \textit{ et } b \textit{ de } I \textit{ tels que } \boxed{a \leqslant b}, \textit{ on a : } \quad \boxed{f(a) \leqslant f(b)}.$$

Définition

*Soit f une fonction définie sur un intervalle I. La fonction f est **décroissante** sur I si elle **renverse** l'ordre, c'est-à-dire que :*

$$\textit{pour tous réels } a \textit{ et } b \textit{ de } I \textit{ tels que } \boxed{a \leqslant b}, \textit{ on a : } \quad \boxed{f(a) \geqslant f(b)}.$$

Exemples.

• Soit f définie par le tableau de variations suivant :

x	-3		-1		2		4
f	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\rightarrow$	-2

Comparons $f(1)$ et $f(1,5)$:

• $1 < 1,5$.

• la fonction f est *décroissante* sur $[-1\,;\,2]$ donc elle y *renverse* l'ordre.

Par conséquent : $f(1) > f(1,5)$.

• Soit g la fonction affine définie par : $g(x) = -2,7x + 3$. Montrer que g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Soient a et b appartenant à $\mathbb{R}$ tels que $\boxed{a < b}$. On doit *montrer que* f **renverse** l'ordre, c'est-à-dire que : $\boxed{f(a) > f(b)}$.

$$\begin{array}{rcl} a & < & b \\ -2,7a & > & -2,7b \\ -2,7a+3 & > & -2,7b+3 \\ f(a) & > & f(b) \end{array}$$

<u>Conclusion</u> : la fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.

3 Minimum, maximum, extremum

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- *La fonction f admet un **maximum** en a sur I si, pour tout réel x de I, on a :*

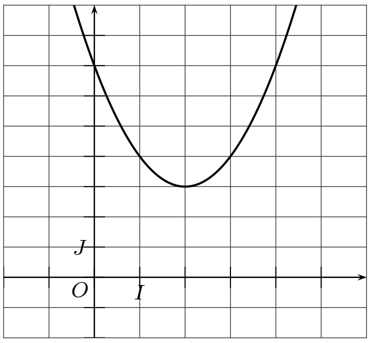
$$f(x) \leqslant f(a).$$

- *La fonction f admet un **minimum** en a sur I si, $\forall x \in I$, on a :*

$$f(x) \geqslant f(a).$$

- *La fonction f admet un **extremum** sur I si elle y admet un maximum ou un minimum.*

Exemple de fonction admettant un minimum égal à 3 en $x = 2$:



Exemple de fonction admettant un maximum égal à 1 en $x = 3$: