Ordre des nombres

1 Comparaison de nombres

Définition *a et b étant deux réels, $a < b$ se lit « a est strictement inférieur à b ». Cela signifie que la différence $a - b$ est strictement négative. On écrit :*

$$a < b \underbrace{\iff}_{\textit{équivaut à}} a - b < 0$$

Interprétation graphique. — Sur l'axe des réels, le point A d'abscisse a est situé à gauche du point B d'abscisse b.

a et b étant deux réels, $a \leqslant b$ se lit « a est inférieur ou égal à b ». Cela signifie que la différence $a - b$ est négative ou nulle. On écrit :

$$a \leqslant b \underbrace{\iff}_{\textit{équivaut à}} a - b \leqslant 0$$

Note. — On définit de même le symbole $>$: *strictement supérieur à*, et le symbole $\geqslant$: *supérieur ou égal à*.

Définition *Comparer deux nombres a et b, c'est préciser laquelle de ces trois situations est la bonne :*

$a < b$	$a > b$	$a = b$.

2 Critères de comparaison

2.1 Un critère de comparaison : la méthode de la différence

Méthode de la différence

Pour comparer deux nombres ou deux expressions algébriques, on peut étudier le signe de leur différence.

Exemples.

- Comparer $\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{5\pi}{4}$, sans l'aide de la calculatrice.
- Comparer $5^2 + 1$ et 2×5.
- Comparer $10^2 + 1$ et 2×10.
- Comparer les expressions algébriques $x^2 + 1$ et $2x$, où x est un nombre réel quelconque.

2.2 Comparaison des carrés

Pour comparer deux nombres positifs, on peut comparer leurs carrés, car deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.
On utilise par exemple la méthode de la différence.
Note. — Cette méthode est souvent utilisée pour comparer deux nombres constitués de racines carrées.

Exemple. — Comparer $\sqrt{25 - 2\sqrt{3}}$ et 5.

3 Opérations sur les inégalités

Théorème

Ajouter *(ou* ***retrancher****) un* même *nombre réel aux deux membres d'une inégalité* ***ne change pas l'ordre****.*

$$\boxed{a < b \ \ \textit{équivaut à} \ \ a + c < b + c}$$

Théorème

- ***Multiplier*** *par un* même *nombre réel* ***strictement positif*** *les deux membres d'une inégalité* ***ne change pas l'ordre****.*

$$\boxed{\textit{Si } c > 0, \quad a < b \ \ \textit{équivaut à} \ \ ac < bc}$$

- ***Multiplier*** *par un* même *nombre réel* ***strictement négatif*** *les deux membres d'une inégalité* ***change l'ordre****.*

$$\boxed{\textit{Si } c < 0, \quad a < b \ \ \textit{équivaut à} \ \ ac > bc}$$

4 Intervalles

Définition

*Soient a et b deux réels vérifiant $a \leqslant b$. L'ensemble des réels x vérifiant l'encadrement $a \leqslant x \leqslant b$ est appelé l'****intervalle*** $[a; b]$.

Géométriquement, si on note A et B les points d'abscisse respective a et b sur la droite réelle, l'intervalle $[a; b]$ est l'ensemble des abscisses des points du segment $[AB]$.

Les différents types d'intervalle

Représentation géométrique	Inégalité	Intervalle
	$a \leqslant x \leqslant b$	$[a; b]$
	$a < x < b$	$]a; b[$
	$a \leqslant x < b$	$[a; b[$
	$a < x \leqslant b$	$]a; b]$
	$a \leqslant x$	$[a; +\infty[$
	$a < x$	$]a; +\infty[$
	$x \leqslant b$	$]-\infty; b]$
	$x < b$	$]-\infty; b[$

Note. — Les quatre premiers intervalles sont dits **bornés**. a et b en sont les **bornes**. $b - a$ est l'**amplitude**.
On dit également que $[a; b]$ est un intervalle **fermé**, et que $]a; b[$ est un intervalle **ouvert**.

Récapitulatif des compétences

Choisir un critère adapté pour comparer des nombres

Méthode de la différence
Utilisation d'un nombre intermédiaire (souvent 0 ou 1).
Comparaison de fractions (comparaison des numérateurs ou dénominateurs, méthode du quotient)
Comparaison des carrés
Comparaison d'expressions algébriques
Théorèmes de rangement

Caractériser les éléments d'un intervalle et les représenter

Notion d'intervalle
Déterminer intersection, réunion, inclusion d'intervalles
Caractériser un intervalle par des inégalités

Propriétés des inégalités

Opérations sur une inégalité : enchaînements
Encadrement d'expressions (encadrer une aire, un volume etc.)
Travail sur les enchaînements : préparation à l'identifiation de l'enchaînement des fonctions conduisant de x à $f(x)$ quand f est donnée par une formule.