Ch. VIII — Suites numériques

I Généralités

Définition *Une suite numérique est une liste de nombres réels.*

Exemple. — On considère la suite :

terme :	1	2	4	7	11	16	...
rang :	0	1	2	3	4	5	
	terme initial		$u_2 = 4$	terme de rang 3		$u_5 = 16$	

On se limitera à certains types de suites définies par **récurrence**, c'est-à-dire dont chaque terme se calcule en fonction du précédent :

– les **suites arithmétiques** où l'on passe d'un terme au suivant en **ajoutant** un nombre constant ;
– les **suites géométriques** où l'on passe d'un terme au suivant en **multipliant** par un nombre constant.

II Suites arithmétiques

$$\begin{tikzcd}
u_0 \arrow[r, bend left, "+r"] \arrow[rrrr, bend right, "+\,n\times r"'] & u_1 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_2 \arrow[r, bend left, "+r"] & \cdots\cdots\cdots \arrow[r, bend left, "+r"] & u_n \arrow[r, bend left, "+r"] & u_{n+1} \arrow[r, bend left, "+r"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Définition *Une suite (u_n) est dite* **arithmétique** *s'il existe un réel r tel que, pour tout n :*

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r.}$$

r est appelé la **raison** *de la suite.*

Reconnaître une suite arithmétique

On considère la suite des multiples positifs de 7 : 0, 7, 14, 21, ...
Pour passer d'un terme au terme suivant, on ajoute toujours 7 donc cette suite est arithmétique de raison $r = 7$.
Son terme initial est $u_0 = 0$.

Théorème (Forme explicite d'une suite arithmétique)
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\boxed{u_n = u_0 + nr}$$

De même :

$$\boxed{u_n = u_1 + (n-1)r}$$

Utiliser la forme explicite d'une suite arithmétique

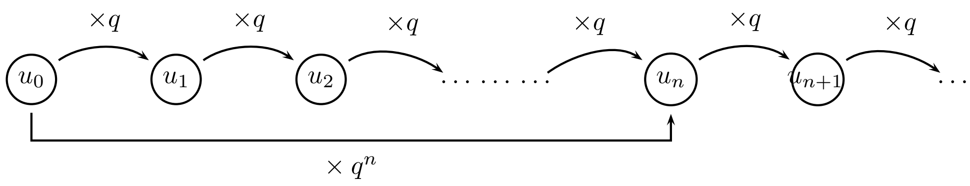
La population d'une ville était de 85 000 habitants en 2000 ; mais elle diminue de 600 habitants par an.
À ce rythme, combien y aura-t-il d'habitants en 2050 ?

Réponse. — On note u_n le nombre d'habitants de la ville en l'an $2000 + n$.

Le terme initial est $u_0 = 85000$.
Pour passer d'un terme au suivant, on soustrait 600 donc la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = -600$ et de terme initial $u_0 = 85000$.

D'après le théorème, la forme explicite est : $u_n = u_0 + n \times r = 85000 + n \times (-600) = 85000 - 600\,n$.
Le nombre d'habitants en 2050 est donc : $u_{50} = 85000 - 600 \times 50 = 85000 - 30000 = 55000$ habitants.

III Suites géométriques



Définition *Une suite* (u_n) *est dite* **géométrique** *s'il existe un réel* q *tel que, pour tout* n *:*

$$\boxed{u_{n+1} = q\,u_n.}$$

q *est appelé la* **raison** *de la suite.*

Reconnaître une suite géométrique

Une population de bactéries double toutes les heures. On observe un échantillon contenant initialement 100 000 bactéries.
On pose $u_0 = 100\,000$ et on note u_n le nombre de bactéries n heures après le début de l'observation. Montrer que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison et son terme initial.

Réponse. — Pour passer d'un terme au suivant, on multiplie toujours par 2, donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 2$, et de terme initial $u_0 = 100\,000$.

Théorème (Forme explicite d'une suite géométrique)
Soit (u_n) *une suite géométrique, de terme initial* u_0 *et de raison* q*. Alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a :*

$$u_n = u_0 \times q^n$$

De même :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

Utiliser la forme explicite d'une suite géométrique

La population d'une ville, qui était de 85 000 habitants en 2000, baisse de 5 % par an depuis cette date.

1. Combien y avait-il d'habitants en 2001 ? En 2002 ?

   Réponse. — En 2001 : $85000 - \frac{5}{100} \times 85000 = 85000 \times (1 - \frac{5}{100}) = 85000 \times \underbrace{0,95}_{CM} = 80750$ habitants.

   En 2002 : $80750 \times \underbrace{0,95}_{CM} = 76712,5 \simeq 76713$ habitants.

2. On note p_0 la population en 2000 et p_n la population de l'année $(2000 + n)$. Montrer que la suite (p_n) est géométrique. Préciser son terme initial et sa raison.

   Réponse. — Pour passer d'un terme au suivant, on multiplie toujours par 0,95 (c'est-à-dire qu'on diminue de 5 %) ; donc la suite (p_n) est géométrique de raison $q = 0,95$, et de terme initial $p_0 = 85\,000$.

3. À ce rythme, combien y aura-t-il d'habitants en 2050 ?

   Réponse. — D'après le théorème, la forme explicite est : $p_n = p_0 \times q^n = 85000 \times 0,95^n$.
   Le nombre d'habitants en 2050 est donc : $p_{50} = 85000 \times 0,95^{50} \simeq 6540,3 \simeq 6540$ habitants.