Équations de droites & Systèmes

1 Équations de droites

1.1 Rappels

Propriété

Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées possède une équation de la forme $y = mx + p$, où m et p sont des nombres réels.

Définition *Dans l'équation de droite $y = mx + p$, m est appelé le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine.*

Remarque. — Le point de coordonnées $(0; p)$ appartient à la droite d'équation $y = mx + p$: c'est l'intersection de la droite et de l'axe des ordonnées.

1.2 Point appartenant à une droite

Dire qu'un point $A(x_A; y_A)$ appartient à la droite d'équation $y = mx + p$ signifie que ses coordonnées vérifient l'équation, c'est-à-dire que $y_A = m \times x_A + p$.

Exemple. — Le point $A(2\,;\,-1)$ appartient-il à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -3x + 5$?

$$\left.\begin{array}{l} y_A = -1 \\ -3x_A + 5 = -3 \times 2 + 5 = -1 \end{array}\right\} \quad \text{donc : } y_A = mx_A + p. \text{ Ainsi } A \in \mathscr{D}.$$

1.3 Calcul du coefficient directeur

Propriété

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points d'une droite $\mathscr{D}$. Alors le coefficient directeur de $\mathscr{D}$ est $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

1.4 Applications & Méthodes

Déterminer graphiquement le coefficient directeur d'une droite par la méthode du « triangle »

Objectif. — Déterminer le coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}$.

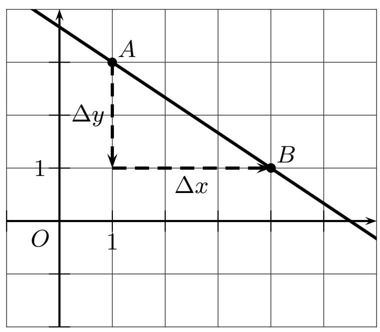
On choisit A et B sur des intersections du quadrillage.

À partir de A, on « descend » de deux carreaux ($\Delta y = -2$) puis on « avance » de trois carreaux ($\Delta x = 3$) pour arriver en B.

Le coefficient directeur est :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2}{3}.$$

Cela revient à utiliser la formule $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1-3}{4-1} = -\dfrac{2}{3}$.

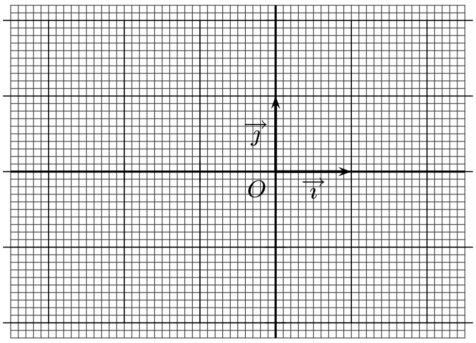


Note. — La droite « descend », donc le coeff. directeur est négatif.

Construire une droite connaissant un point et le coefficient directeur

Objectif. — Construire la droite $\mathscr{D}$ de coefficient directeur $\frac{1}{2}$ passant par le point $A(-3;-1)$.
On place d'abord le point A dans un repère.
À partir de A, on « monte » d'un carreau ($\Delta y = 1$) et on « avance » de deux carreaux ($\Delta x = 2$).
On marque le point B obtenu, et on trace (AB).

Note. — La droite « monte », donc le coeff. directeur est positif.



Déterminer l'équation d'une droite passant par deux points donnés

Objectif. — Déterminer le coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(-2;0)$ et $B(1;1)$.

Le coefficient directeur est égal à :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-0}{1-(-2)} = \frac{1}{3}.$$

L'équation de $\mathscr{D}$ est donc de la forme $y = \frac{1}{3}x + p$.
On sait que $A(-2;0) \in \mathscr{D}$, donc ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathscr{D}$:

$$y_A = \frac{1}{3}x_A + p \iff 0 = \frac{1}{3} \times (-2) + p \iff \frac{2}{3} = p.$$

Conclusion : la droite $\mathscr{D}$ a pour équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

Note. — Si les deux points donnés ont même abscisse k, alors on ne peut pas calculer le coefficient directeur. La droite est verticale, elle a pour équation : $x = k$.

1.5 Équations générales

Propriété *Toute "équation" du type $ax + by + c = 0$, où a, b et c sont des réels, est une équation de droite.*

Transformer une équation cart. en équation réduite

Écrire l'équation générale $4x + 2y + 3 = 0$ sous la forme $y = mx + p$ (équation réduite), avec m et p deux réels à déterminer.

1.6 Caractérisation du parallélisme

Propriété *Deux droites (non verticales) sont parallèles* si et seulement si *elles ont le même coefficient directeur.*

2 Systèmes linéaires

2.1 Définitions

1. Un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y est la donnée de deux équations de la forme $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ où a, b, c, a', b', c' sont des nombres réels donnés.
2. Une solution du système est un couple $(x; y)$ vérifiant les deux équations.
3. Résoudre le système, c'est en déterminer tous les couples solutions.

2.2 Représentation graphique d'un système

Chacune des deux équations d'un système peut s'écrire sous la forme d'une équation de droite $y = mx + p$ (droite non verticale) ou $x = k$ (droite verticale). Ainsi la représentation graphique du système est constituée de deux droites ; résoudre le système revient graphiquement à trouver leur intersection (en effet, les coordonnées d'un point situé à l'intersection des deux droites vérifient bien les équations des deux droites).

2.3 Le déterminant d'un système

Il permet de trouver le nombre de solutions du système étudié.

Le déterminant d'un système linéaire de la forme $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ est $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b.$

1. Si le déterminant est différent de 0, alors la représentation graphique du système est constituée de deux droites non parallèles, sécantes en un point ; le système admet **un unique couple solution**.
2. Si le déterminant est égal à 0, alors la représentation graphique du système est constituée de deux droites parallèles.
   (a) Si les deux droites sont parallèles disjointes, elles n'ont pas de point d'intersection ; le système n'admet **pas de solution**.
   (b) Si les deux droites sont confondues, le système admet alors **une infinité de solutions** : la représentation graphique est constituée d'une droite, et tous les points de la droite ont leurs coordonnées solutions du système.

Exemple. — Le système $\begin{cases} -x+y=2 \\ x-y=3 \end{cases}$ a pour déterminant $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\times(-1) - 1\times 1 = 1 - 1 = 0.$

Le système équivaut à $\begin{cases} y=x+2 \\ y=x-3 \end{cases}$. La représentation graphique est composée de deux droites parallèles (même coefficient directeur) non confondues (ordonnée à l'origine différente). Le système n'a donc pas de solution.

2.4 Résolution graphique

Résoudre graphiquement un système

- Transformation des deux équations générales en équations réduites.
- Construction des droites dans un repère.
- Détermination de l'intersection.

2.5 Résolution algébrique

Méthode par substitution

Résoudre le système $\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x - 2y = -13 \end{cases}$

Solution :

1. On calcule le déterminant et on vérifie qu'il n'est pas nul : $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times (-2) - 3 \times 5 = -17 \neq 0$. Dans ce cas **le système admet une solution unique.**
2. On remarque qu'une inconnue, ici x, s'exprime facilement en fonction de l'autre, ici y, par la relation : $x = 7 - 5y$.
3. On *substitue* x par l'expression $(7 - 5y)$, qui lui est **égale**, dans l'autre équation du système. On obtient un système équivalent au premier : $\begin{cases} x = 7 - 5y \\ 3(7 - 5y) - 2y = -13 \end{cases}$
4. On développe et on résout l'équation en y obtenue :
$\begin{cases} x = 7 - 5y \\ 21 - 15y - 2y = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - 5y \\ -17y = -13 - 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - 5y \\ y = \dfrac{-34}{-17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - 5y \\ y = 2 \end{cases}$
5. On remplace y par sa valeur dans l'autre équation : $\begin{cases} x = 7 - 5 \times 2 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$
6. On conclut :
Le système a pour unique solution le couple $(\mathbf{-3}; \mathbf{2})$. On peut écrire également :
$$S = \{(-3; 2)\}$$

Méthode par combinaison

Résoudre le système $\begin{cases} 3x - 4y = 5 & (E_1) & \times 5 \\ 5x - 6y = 3 & (E_2) & \times 3 \end{cases}$

Solution :

1. On calcule le déterminant et on vérifie qu'il n'est pas nul : $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 3 \times (-6) - 5 \times (-4) = 2 \neq 0$. **Le système admet donc une solution unique.**
2. On multiplie l'équation (E_1) par 5 et l'équation (E_2) par 3 pour obtenir un système équivalent : $\begin{cases} 15x - 20y = 25 & (E_1') \\ 15x - 18y = 9 & (E_2') \end{cases}$
3. **On fait la différence membre à membre** $(\mathbf{E_1'}) - (\mathbf{E_2'})$:
$15x - 20y - (15x - 18y) = 25 - 9 \quad \Leftrightarrow \quad -2y = 16 \quad \Leftrightarrow \quad y = -8$
4. **On remplace y par sa valeur dans** l'une des deux équations du système initial $((\mathbf{E_1})$ par exemple) :
$3x - 4 \times (-8) = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 32 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 5 - 32 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{-27}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = -9.$
5. On conclut :
Le système a pour unique solution le couple $(\mathbf{-9}; \mathbf{-8})$. On peut écrire également : $S = \{(-9; -8)\}$.

<u>Substitution *ou* combinaison ?</u>

- Utiliser la méthode de substitution quand il est facile d'*isoler* l'une des inconnues.
- Utiliser la méthode de combinaison quand les coefficients multiplicateurs sont évidents à trouver (il suffit parfois d'ajouter ou soustraire membre à membre les deux équations).