Ch. VI — Fonctions

I Notion de fonction

Définition *Soit $\mathscr{D}$ un intervalle ou une réunion d'intervalles.*

Définir une fonction f sur $\mathscr{D}$, c'est associer à chaque nombre $x \in \mathscr{D}$ un unique nombre, noté $f(x)$. On note : $x \mapsto f(x)$.

Exemples.

1. Voir l'exercice de la fiche d'exercices. Dans ce cas, la fonction f est définie par une courbe.
2. Soit f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3$. À tout nombre réel x, cette fonction associe la somme du carré de x et de 3.

Définition *Dans la définition précédente :*

1. *$\mathscr{D}$ est l'**ensemble de définition** de f ;*
2. *le nombre $f(x)$ s'appelle l'**image** de x par la fonction f.*

Exemples. (voir exemples précédents)

1. À partir d'un nombre x matérialisé sur l'axe des abscisses, on remonte jusqu'à trouver **le** point de la courbe dont l'abscisse est égale à x, et on lit son ordonnée. Le nombre ainsi trouvé est l'image de x par f.
2. $f(x) = x^2 + 3$. Pour $x = -2$, l'image se calcule ainsi : $f(-2) = (-2)^2 + 3 = 4 + 3 = 7$. Donc l'image de -2 par la fonction f est 7.

Définition *Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}$.*

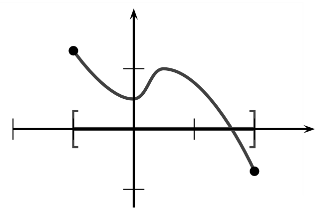
*Si un réel x a pour image un réel y, on dit que x est **un antécédent** de y.*

Exemple. — Avec la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 3$, on a vu que -2 est un antécédent de 7 par la fonction f.

II Ensemble de définition

Propriété *L'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble des réels x qui ont une image par f.*

1°) Cas d'une fonction donnée par une courbe



Dans ce cas, l'ensemble de définition se détermine graphiquement. On cherche, sur l'axe des abscisses, l'ensemble des nombres x qui possèdent une image par la fonction.

2°) Cas d'une fonction donnée par une expression algébrique

Dans ce cas, on recherche les valeurs pour lesquelles il est possible de calculer l'expression.

Propriété (Rappel)

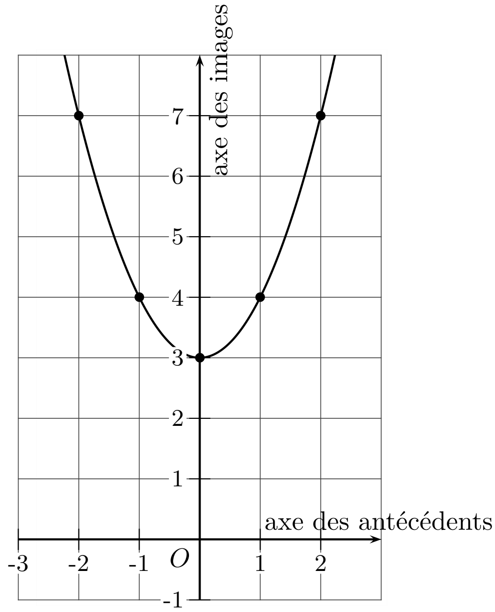
- $\dfrac{A}{B}$ *existe* si et seulement si $B \neq 0$;
- $\sqrt{A}$ *existe* si et seulement si $A \geqslant 0$.

Exemple. — Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x+5}{2x-1}$. Le calcul de $f(x)$ est possible pour $2x - 1 \neq 0$, c'est-à-dire $2x \neq 1$, c'est-à-dire $x \neq \frac{1}{2}$.

Dessin de la réunion d'intervalles. Donc l'ensemble de définition de f est $\mathscr{D}_f =]-\infty\,;\,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}\,;\,+\infty[$.

III Courbe représentative d'une fonction

Définition *Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$ et $(O; I, J)$ un repère du plan. La représentation graphique (aussi appelée courbe représentative) de la fonction f dans le repère $(O; I, J)$ est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x \in \mathscr{D}_f$ et $y = f(x)$.*
On note cette courbe $\mathscr{C}_f$.



Exemple. — Avec la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 3$, on a vu que $f(-2) = 7$. On a aussi $f(0) = 3$ etc. Pour obtenir des points de $\mathscr{C}_f$, on peut remplir le tableau de valeurs suivant :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	7	4	3	4	7

Remarque. — Attention, cette succession de points ne suffit pas à obtenir la courbe représentative de f de manière précise (il y a une infinité de façons de relier des points).

Conséquence. — Le point de coordonnées (x, y) est sur $\mathscr{C}_f$ *si et seulement si* $x \in \mathscr{D}_f$ et $y = f(x)$.

Exemple. — Soit $f : x \mapsto x^2 + 3$ (voir courbe ci-dessus). Le point $H(1,5\,;\,5)$ appartient-il à $\mathscr{C}_f$?

Réponse : On doit calculer l'image de 1,5 par f.
$f(1,5) = 1,5^2 + 3 = 2,25 + 3 = 5,25 \neq 5$. Donc $H(1,5\,;\,5) \notin \mathscr{C}_f$.

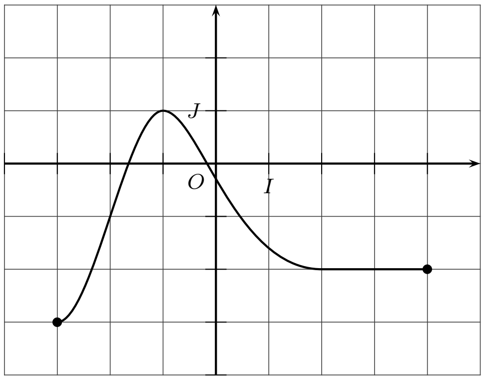
IV Tableau de variations

Étudier les variations d'une fonction f, c'est déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est **croissante**, **décroissante** ou bien **constante**. On résume les résultats obtenus dans un **tableau de variations**.

Exemple. — Soit la fonction f définie par le tableau de variations suivant :

x	-3		-1		2		4
f	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\rightarrow$	-2

Une courbe possible est donnée ci-contre.



V Sens de variation

Définition

*Soit f une fonction définie sur un intervalle I. La fonction f est **croissante** sur I si elle **conserve** l'ordre, c'est-à-dire que :*

pour tous réels a et b de I tels que $\boxed{a \leqslant b}$, on a : $\boxed{f(a) \leqslant f(b)}$.

Définition

*Soit f une fonction définie sur un intervalle I. La fonction f est **décroissante** sur I si elle **renverse** l'ordre, c'est-à-dire que :*

pour tous réels a et b de I tels que $\boxed{a \leqslant b}$, on a : $\boxed{f(a) \geqslant f(b)}$.

Exemples.

• Soit f définie par le tableau de variations suivant :

x	-3		-1		2		4
f	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\rightarrow$	-2

Comparons $f(1)$ et $f(1,5)$:

• $1 < 1,5$.

• la fonction f est *décroissante* sur $[-1\,;\,2]$ donc elle y *renverse* l'ordre.

Par conséquent : $f(1) > f(1,5)$.

• Soit g la fonction affine définie par : $g(x) = -2,7x + 3$. Montrer que g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Soient a et b appartenant à $\mathbb{R}$ tels que $\boxed{a < b}$. On doit *montrer que* f **renverse** l'ordre, c'est-à-dire que : $\boxed{f(a) > f(b)}$.

$$\begin{array}{rcl} a & < & b \\ -2,7a & > & -2,7b \\ -2,7a+3 & > & -2,7b+3 \\ f(a) & > & f(b) \end{array}$$

<u>Conclusion</u> : la fonction f renverse l'ordre, elle est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.

VI Minimum, maximum, extremum

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- *La fonction f admet un* ***maximum*** *en a sur I si, pour tout réel x de I, on a :*

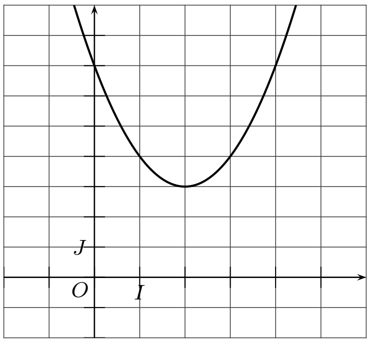
$$f(x) \leqslant f(a).$$

- *La fonction f admet un* ***minimum*** *en a sur I si, $\forall x \in I$, on a :*

$$f(x) \geqslant f(a).$$

- *La fonction f admet un* ***extremum*** *sur I si elle y admet un maximum ou un minimum.*

Exemple de fonction admettant un minimum égal à 3 en $x = 2$:



Exemple de fonction admettant un maximum égal à 1 en $x = 3$: