

## Leçon de Physique n°8 Phénomènes de transport

Niveau : CPGE 2ème année

Programme :

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>2.1 Diffusion de particules</b>	
Vecteur densité de flux de particules $\mathbf{j}_N$ .	Exprimer le nombre de particules traversant une surface en utilisant le vecteur $\mathbf{j}_N$
Bilans de particules.	Utiliser la notion de flux pour traduire un bilan global de particules. Établir une équation traduisant un bilan local dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne, éventuellement en présence de sources internes.  Admettre et utiliser une généralisation en géométrie quelconque utilisant l'opérateur divergence et son expression fournie.
Loi de Fick.	Utiliser la loi de Fick. Citer l'ordre de grandeur d'un coefficient de diffusion dans un gaz dans les conditions usuelles.
Régimes stationnaires.	Utiliser la conservation du flux sous forme locale ou globale en l'absence de source interne.
Équation de diffusion en l'absence de sources internes.	Établir une équation de la diffusion dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. Utiliser une généralisation en géométrie quelconque en utilisant l'opérateur laplacien et son expression fournie.  Analyser une équation de diffusion en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle.
Approche microscopique du phénomène de diffusion.	Mettre en place un modèle probabiliste discret à une dimension de la diffusion (marche au hasard) et évaluer le coefficient de diffusion associé en fonction du libre parcours moyen et de la vitesse quadratique moyenne.
<b>2.2 Diffusion thermique</b>	
Vecteur densité de flux thermique $\mathbf{j}_Q$	Exprimer le flux thermique à travers une surface en utilisant le vecteur $\mathbf{j}_Q$ .
Premier principe de la thermodynamique.	Utiliser le premier principe dans le cas d'un milieu solide pour établir une équation locale dans le

cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne, éventuellement en présence de sources internes.

Admettre et utiliser une généralisation en géométrie quelconque utilisant l'opérateur divergence et son expression fournie.

Utiliser la loi de Fourier. Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, béton, acier.

Loi de Fourier.

Régimes stationnaires. Résistance thermique.

Utiliser la conservation du flux sous forme locale ou globale en l'absence de source interne. Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique.

Exprimer une résistance thermique dans le cas d'un modèle unidimensionnel en géométrie cartésienne.

Utiliser des associations de résistances thermiques.

Équation de la diffusion thermique en l'absence de sources internes.

Établir une équation de la diffusion dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne.

Admettre et utiliser une généralisation en géométrie quelconque en utilisant l'opérateur laplacien et son expression fournie.

Analyser une équation de diffusion en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle. Utiliser la relation de Newton  $\delta Q = h(T_s - T_a)dSdt$  fournie comme condition aux limites à une interface solide-fluide.

### 1.3 Conduction électrique dans un conducteur ohmique

Loi d'Ohm locale dans un métal fixe, l'action de l'agitation thermique et des défauts du réseau fixe étant décrite par une force phénoménologique de la forme  $-mv/\tau$   
Conductivité électrique.

Résistance d'une portion de conducteur filiforme.

Approche descriptive de l'effet Hall.

Effet thermique du courant électrique : loi de Joule locale.

Déduire du modèle un ordre de grandeur de  $\tau$  et en déduire un critère de validité du modèle en régime variable.

Déduire du modèle un ordre de grandeur de  $v$  et en déduire un critère pour savoir s'il convient de prendre en compte un éventuel champ magnétique.

Interpréter qualitativement l'effet Hall dans une géométrie rectangulaire.

Exprimer la puissance volumique dissipée par effet Joule dans un conducteur ohmique.

Livres : Quaranta Dictionnaire Tome 2, Perez Thermodynamique, Sanz Tout-en-un Physique PC,

Pré-requis : thermodynamique, électrocinétique

Introduction :

*Cf. intro Perez chapitre 4*

Dans cette leçon, nous allons nous intéresser à deux types de diffusion : la diffusion des molécules et la diffusion thermique. Nous allons établir les équations qui régissent la diffusion des particules. Par analogie, nous dégagerons les équations qui régissent la diffusion thermique.

### I – Diffusion de particules Perez et Sanz

Il existe 2 modes de transfert de matière à travers une surface : la convection attribuée à un déplacement global de matière et la diffusion en l'absence d'un tel déplacement d'ensemble. Par exemple, le vent traduit un déplacement global d'air donc une convection ; en revanche, dans une atmosphère d'air au repos, les molécules gazeuses d'un parfum contenu dans un flacon que l'on vient de déboucher envahissent la pièce par diffusion, une tache d'encre qui s'étale sur un buvard (*à faire*).

*Expériences : tache d'encre sur papier buvard et/ou voir Quaranta T.2 (solution saturée de  $\text{CuSO}_4$  et eau recouverte par une fine couche d'huile pour éviter l'évaporation)*

La diffusion des particules a été initialement étudiée par le physiologiste allemand Adolf Fick vers 1850.

#### 1) Flux, vecteur densité de courant et bilan de particules Sanz

\*Flux de particules à travers une surface

On appelle  $\Phi_s(t)$  à travers une surface S le débit de particules à travers cette surface à l'instant t.

En déduire le nombre dN de particules traversant S pendant dt puis définit le vecteur densité de courant de particules  $\mathbf{j}(M,t)$

=> nouvelles expression de  $\Phi_s(t)$  et de dN (en déduire l'unité de  $\|\mathbf{j}\|$  en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ).

\*Vecteur densité de courant de particules

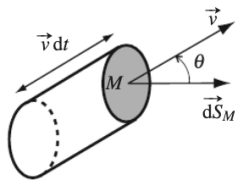


Figure 2.1 – Calcul du vecteur densité de courant

On considère des particules de vitesse  $\mathbf{v}$  traversant un élément de surface  $d\mathbf{S}_M$  faisant un angle  $\theta$  avec  $\mathbf{v}$  (cf. figure Sanz)

$n(M,t)$  le nombre de particules par unité de volume en M, à l'instant t (s'exprime en  $\text{m}^{-3}$  et  $\|\mathbf{v}\|$  en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

=> exprimer le nombre de particule dN qui traverse  $d\mathbf{S}_M$  entre t et t+dt

en déduire  $\mathbf{j}(M,t) = n(M,t) \mathbf{v}(M,t)$  (par définition)

\*Bilan de particules à une dimension (selon Ox) :  $\mathbf{j}$  est alors suivant  $\mathbf{u}_x$  et ne dépend que de x et de t

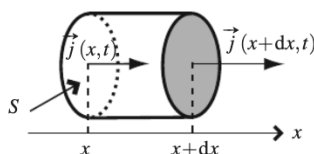


Figure 2.2 – Bilan de particules à une dimension

Faire le bilan du nombre de particules présentes dans le cylindre de section S et de longueur dx

Cas sans production ni disparition de particules :

Faire le bilan du nombre de particules qui entrent par la face située à l'abscisse  $x$  et celles qui entrent par la face située à l'abscisse  $x+dx$  ( $\delta N_{\text{ext} \rightarrow V}$ ) – comparer à la variation du nombre de particules contenues dans le volume (faire des DL à l'ordre 1 en  $dx$  ou  $dt$  selon le cas)  $\Rightarrow \partial n(x,t)/\partial t = - \partial j_x(x,t)/\partial x$  : équation de conservation de la matière

S'il y a production ou disparition de particules :

ajouter un terme de production :  $\delta N_{\text{production}} = p(x,t)Sdxdt \Rightarrow dN = \delta N_{\text{ext} \rightarrow V} + \delta N_{\text{production}}$   
 d'où :  $\partial n(x,t)/\partial t = - \partial j_x(x,t)/\partial x + p(x,t)$

Généralisation dans le cas tridimensionnel (admis conformément aux programmes, plus de détails dans *Sanz*) :

sans terme de production :  $\partial n(x,t)/\partial t + \text{div} \mathbf{j}(M,t) = 0$  (équation de conservation)

avec terme de production :  $\partial n(x,t)/\partial t + \text{div} \mathbf{j}(M,t) = p(M,t)$  où  $p(M,t)$  est le nombre de particules produites algébriquement par unité de volume et de temps

## 2) Loi de Fick

Nous avons une relation entre  $n(M,t)$  et  $\mathbf{j}(M,t)$  mais cela est insuffisant pour connaître entièrement ces deux grandeurs : 4 inconnues pour une équation scalaire  $\Rightarrow$  il manque 3 équations scalaires ou 1 équation vectorielle.

Cette équation est la loi de Fick qui relie le vecteur densité de courant de particules au gradient de la densité particulaire : loi phénoménologique qui se constate expérimentalement et ne se démontre pas.

Observation : les molécules diffusent de l'endroit où leur densité est la plus importante vers l'endroit où leur densité est la plus faible : le flux tend à réduire le déséquilibre et rendre la densité particulaire uniforme. Le vecteur densité de courant est donc de direction opposée au gradient de la densité moléculaire. Le loi de Fick pose une simple relation de proportionnalité entre ces deux vecteurs (c'est une loi linéaire) :

$\mathbf{j}(M,t) = -D \text{grad} n(M,t)$  avec  $D$  constante positive appelée coefficient de diffusion qui s'exprime en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

Cette équation relie le courant de particules à sa cause : le gradient de la densité particulaire.

$D$  dépend de la nature de la particule et du milieu dans lequel elle diffuse mais pas de la densité particulaire, même lorsqu'elle varie dans une large plage.

Type de diffusion	$D$ en $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
Molécules dans un gaz	$10^{-6}$ à $10^{-4}$
Molécules dans un liquide	$10^{-12}$ à $10^{-8}$
Atomes dans un solide	$10^{-30}$ à $10^{-16}$

*Sanz (d'autres valeurs dans le DGLR ou le PEREZ)  
 Important : ODG de  $D$  dans un gaz dans les conditions usuelles*

Tableau 2.1 – Ordre de grandeur des coefficients de diffusion

Limites de validité : voir *Sanz*

## 3) Equation de diffusion

Obtenue grâce à la loi de Fick dans la loi de conservation (on considère le cas sans production ni disparition de particules).

Cas unidimensionnel : projeter la loi de Fick sur  $Ox$  et on injecte dans la loi de conservation, sachant que  $D$  est constant  $\Rightarrow \partial n(x,t)/\partial t = D \partial^2 n(x,t)/\partial x^2$

Généralisation à 3 dimensions en faisant apparaître l'opérateur laplacien :

$$\partial n(M,t)/\partial t = D \Delta n(M,t)$$

Analyse en ordre de grandeur : cf. *Sanz* =>  $L^* \approx \sqrt{DT^*}$

exemple : sucre dans une tasse de café : si  $L=3\text{cm}$ ,  $T=3$  semaines : il vaut mieux utiliser une cuillère pour ajouter un transfert convectif au transfert diffusif !

Manip : diffusion du glycérol ?

#### 4) Approche microscopique

Modèle ???? cf. *Sanz*

### II – Diffusion thermique

#### Intro *Sanz*

Jusqu'à présent, nous n'avons étudié des transferts thermiques qu'entre deux états d'équilibre, au cours de transformations données, par application du premier principe. Le second principe nous a permis de comprendre le sens des transferts thermiques : du chaud vers le froid. Mais jamais nous ne nous sommes préoccupés du facteur temporel, le temps n'est jamais apparu comme paramètre d'étude.

Dans la leçon sur le 1<sup>er</sup> principe, nous avons vu les 3 modes de transfert thermiques : conduction ou diffusion thermique, convection thermique et rayonnement. Les 3 modes peuvent exister simultanément.

Exemple : *transfert thermique entre le four électrique et le plat*

- essentiellement radiatif (résistance chauffante du four)
  - conducteur à travers l'air
  - convectif ajouté si four à « chaleur tournante » (mouvement d'air grâce à un ventilateur)
- ou

#### 1) Mode de transport

\*conduction thermique : transfert sans mouvement dans un milieu matériel immobile  
par exemple : une paroi solide

explication : particules animées d'un mouvement d'agitation thermique, énergie transférée lors des chocs

\*convection thermique : transfert avec mouvement : le fluide passe d'un système à l'autre reçoit de l'énergie du système « chaud » et cède de l'énergie au système « froid » (elle peut être naturelle ou forcée)

exemple : air chaud au voisinage d'un radiateur est plus léger, tend à s'élever et à être remplacé par de l'air plus froid, provoquant ainsi une convection qui tend à uniformiser la température de la pièce

\*rayonnement thermique : met en jeu les ondes électromagnétiques émises par les particules microscopiques des systèmes à cause de leur mouvement d'agitation thermique. Les photons émis par les systèmes sont reçus par l'autre qui en absorbe une partie => transfert d'énergie dans les deux sens, mais du fait que le système chaud émet plus d'énergie que le système froid, le transfert d'énergie global se fait du système chaud vers le système froid.

*Schéma Cardini à faire au tableau en même temps que l'explication*

Exemple : *transfert thermique entre le four électrique et le plat*

- essentiellement radiatif (résistance chauffante du four)
- conducteur à travers l'air
- convectif ajouté si four à « chaleur tournante » (mouvement d'air grâce à un ventilateur)

On va se focaliser dans cette leçon à la diffusion thermique

L'analyse de la diffusion thermique date essentiellement du XIX<sup>ème</sup> siècle, notamment depuis la contribution décisive, en 1815, du mathématicien et physicien français Joseph Fourier.

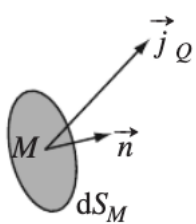
## 2) Flux thermique et courant thermique volumique

\*Flux thermique :

Par analogie avec le flux de particules à travers une surface, le flux thermique surfacique est défini tel que :  $\Phi_s(P,t) = \iint \mathbf{j}_Q(P,t) \cdot d\mathbf{S}_P$  cf. *Sanz pour la démo*

\*Vecteur densité de flux thermique :

La puissance qui traverse une surface élémentaire s'écrit comme le flux d'un vecteur, appelé vecteur densité de flux thermique et noté  $\mathbf{j}_Q$ , à travers cette surface :



Le transfert thermique élémentaire à travers  $d\mathbf{S}_M$  entre les instants  $t$  et  $t+dt$  s'écrit :  $\delta Q = \mathbf{j}_Q(M,t) \cdot d\mathbf{S}_M dt$

Cette équation définit le vecteur densité de flux thermique.

L'énergie se déplace dans la direction pointée vers le vecteur  $\mathbf{j}_Q$ . Ainsi  $\delta Q$  est positif lors l'énergie traverse la surface dans le sens de  $\mathbf{n}$  et négatif dans le cas contraire.

$\|\mathbf{j}_Q\|$  s'exprime en  $W \cdot m^{-2}$

\*Bilan énergétique local à une dimension :

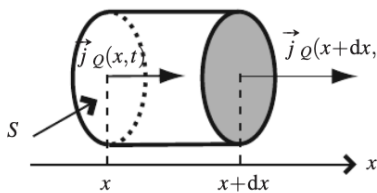


Figure 3.4 – Bilan de particules à une dimension

Hypothèses :

-  $T$  ne dépend que de  $x$  et de  $t \Rightarrow T(x,t) \Rightarrow \mathbf{j}_Q = j_Q(x,t) \mathbf{u}_x$

-  $dx$  petit devant la distance caractéristique de variation de  $T(x,t)$  et  $dt$  petit devant sa durée caractéristique de variation.

On fait le bilan énergétique du cylindre de section  $S$ , de longueur  $dx$  et de volume  $Sdx$  entre  $t$  et  $t+dt$ .

$\Phi(x,t)$  : flux thermique traversant, à l'instant  $t$ , la surface  $S$  située à l'abscisse  $x$ .

La variation d'énergie interne du système entre les instant  $t$  et  $t+dt$  est :

$dU = U(t+dt) - U(t) = \delta mc(T(x,t+dt) - T(x,t))$  où  $\delta m = \rho S dx$  est la masse du système

On peut écrire au premier ordre en  $dxdt$  :  $dU = \rho S c \partial T(x,t) / \partial t dxdt$

Transfert thermique reçu par le système entre  $t$  et  $t+dt$  est :

à travers la face d'abscisse  $x$  :  $\delta Q_x = \Phi(x,t) dt$

à travers la face d'abscisse  $x+dx$  :  $\delta Q_{x+dx} = -\Phi(x+dx,t) dt$

$\delta Q_{ext \rightarrow S} = \delta Q_x + \delta Q_{x+dx} = -\partial \Phi(x,t) / \partial x dxdt$  au premier ordre en  $dxdt$

On note  $P_{prod}$  l'énergie produite dans le cylindre :  $P_{prod} = P_V(x,t) S dx$

$\Rightarrow$  Premier principe :  $\rho S c \partial T(x,t) / \partial t dxdt = -\partial \Phi(x,t) / \partial x dxdt + P_V(x,t) S dxdt$

or  $\Phi(x,t) = j_Q(x,t) S$  puisque  $\mathbf{j}_Q = j_Q(x,t) \mathbf{u}_x$  est uniforme sur toute la surface  $S$

L'équation locale traduisant le bilan énergétique s'écrit :

$\rho c \partial T(x,t) / \partial t + \partial j_Q(x,t) / \partial x = P_V(x,t)$

absence de source :  $\rho c \partial T(x,t) / \partial t + \partial j_Q(x,t) / \partial x = 0$

Généralisation à 3D :

sans source interne :  $\rho c \partial T(M,t) / \partial t + \text{div} \mathbf{j}_Q(M,t) = 0$

avec sources internes :  $\rho c \partial T(M,t) / \partial t + \text{div} \mathbf{j}_Q(M,t) = P_V(M,t)$

## 3) Loi de Fourier

La loi de Fourier exprime une relation linéaire entre le vecteur densité de courant thermique et le gradient du champ de température  $T(M,t)$  :

$j_Q(M,t) = -\lambda \text{grad}T(M,t)$  où  $\lambda$  est la conductivité thermique qui s'exprime en  $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  ou en  $\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-3}\cdot\text{K}^{-1}$

C'est une loi phénoménologique.

Le signe « - » traduit le fait que l'énergie est transportée, conformément au second principe de la thermodynamique, des régions chaudes vers les régions froides.

*Limites de validité : voir Sanz*

*Valeur de  $\lambda$  : tableaux Perez + Sanz*

métaux purs solides  $\approx 100 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

solides non métalliques  $\approx 0,01$  à  $10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

liquides  $\approx$  qq  $0,01$  à qq  $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

gaz  $\approx$  qq  $0,01 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

isolants thermiques  $\approx 0,01$  à  $0,1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

matériau	$\lambda$ à 300 K en $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
cuiivre	$4,0 \times 10^2$
acier	$\approx 50$
béton	$\approx 1$
eau	$6,0 \times 10^{-1}$
air (sous $P = 10^5 \text{ Pa}$ )	$2,6 \times 10^{-2}$

Tableau 3.1 – Quelques valeurs de conductivité thermique

#### 4) Equation de la diffusion thermique à une dimension

Combiner le bilan énergétique à la loi de Fournier projetée sur Ox sachant que  $\lambda$  est constant  $\Rightarrow \rho c \partial T(x,t)/\partial t = \lambda \partial^2 T(x,t)/\partial x^2$  sans terme de source

$\rho c \partial T(x,t)/\partial t = \lambda \partial^2 T(x,t)/\partial x^2 + P_V(x,t)$  avec terme de source

Généralisation à 3 dimensions en faisant apparaître l'opérateur laplacien :

$\rho c \partial T(M,t)/\partial t = \lambda \Delta T(M,t) + P_V(x,t)$  (dans le cas le plus général)

Sans terme de source :  $\partial T(M,t)/\partial t = \lambda/\rho c \Delta T(M,t)$ .

On pose  $a = \lambda/\rho c$  : diffusivité thermique de dimension  $\text{L}^2\text{T}^{-1} \Rightarrow$  qui s'exprime en  $\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$  (tout comme le coefficient de diffusion D)

Analyse en ordre de grandeur : cf. Sanz  $\Rightarrow L^* \approx \sqrt{aT^*}$

exemple du cylindre de moteur : cylindre en acier (de diffusivité thermique  $a=2 \times 10^{-5} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ ) d'épaisseur 5mm. Comparer la durée T d'un cycle (moteur qui tourne à 3000 tours par minute) et la durée caractéristique de la diffusion thermique à travers les parois du cylindre :

$T_{\text{diff}} \approx e^2/a \approx 1\text{s}$  et  $T=60/3000=0,02\text{s} \Rightarrow T \ll T_{\text{diff}} \Rightarrow$  les transformations du mélange air-carburant dans le moteur peuvent être considérées comme adiabatiques.

Manip :

- conduction avec dispositif en forme de croix qui permet de classer les matériaux selon leur conductivité thermique *Bellier calorimétrie*

ou « conductiscope » dans *Duffait*

- étude de la propagation d'une variation de température le long d'une barre de fer ?

*Guyon pour la théorie*

- manip sur la conductivité thermique  $\rightarrow$  *Donnini & Quaranta Dictionnaire de physique expérimentale, Tome II Thermodynamique*

conduction dans un barreau de cuivre calorifugé au contact d'une résistance d'un côté et avec un circulaire d'eau de l'autre

Hypothèse : toute la chaleur produite par R passe dans le barreau (pas de pertes thermiques)

résistance :  $j_{th} = j_{elec} = Ri^2$

Barreau :  $j_{th} = -\lambda \text{grad}T \Rightarrow j_{th} = \lambda \Delta T/\Delta x$  : mesurer  $\Delta T$  avec 1 seul thermocouple pour mesurer la différence de température (lancer l'acquisition !)

*Il faut attendre que la fin du régime transitoire → durée ≈ 10-15min (le calculer avec  $t=L^2/D$ )*  
*incertitudes :  $\Delta\lambda/\lambda = \sqrt{(\Delta R/R)^2 + (2\Delta l/l)^2 + (\Delta x/x)^2 + (\Delta(\Delta T)/\Delta T)^2}$  + incertitude liée à l'hypothèse*  
*valeurs tabulée de  $\lambda$  dépend de la pureté*