

Leçon de Physique n°4
Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide

Niveau : CPGE 2^{ème} année

Programme :

Notions et contenus

Capacités exigibles

Mécanique 2.3 Équations dynamiques

locales

Équation de Navier-Stokes dans un fluide newtonien en écoulement incompressible. Terme convectif. Terme diffusif. Nombre de Reynolds dans le cas d'une unique échelle spatiale.

Utiliser cette équation.

Évaluer en ordre de grandeur le rapport du terme convectif sur le terme diffusif et le relier au nombre de Reynolds dans le cas d'une unique échelle spatiale.

Notion d'écoulement parfait et de couche limite.

Exploiter l'absence de forces de viscosité et le caractère isentropique de l'évolution des particules de fluide. Utiliser la condition aux limites sur la composante normale du champ des vitesses.

Équation d'Euler.

Utiliser cette équation

Relation de Bernoulli pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène dans le champ de pesanteur uniforme dans un référentiel galiléen.

Justifier et utiliser cette relation. Interpréter d'éventuels écarts observés en vérifiant les conditions de validité.

2.4 Bilans macroscopiques

Bilans de quantité de mouvement ou d'énergie cinétique pour un écoulement stationnaire unidimensionnel à une entrée et une sortie.

Établir un bilan de masse en raisonnant sur un système ouvert et fixe ou sur un système fermé et mobile. Utiliser un bilan de masse.

Associer un système fermé à un système ouvert pour faire un bilan. Utiliser la loi de la quantité de mouvement et la loi de l'énergie cinétique pour exploiter un bilan. Exploiter la nullité (admise) de la puissance des forces intérieures dans un écoulement parfait et incompressible.

Livres : BFR Mécanique 2, H Prépa mécanique des fluides 2ème année Brébec, Sanz

Pré-requis : tatique des fluides, dérivée particulière ? Conservation de la masse dans un écoulement ? Forces de pression : $d\mathbf{F}_p(M,t) = -\mathbf{grad} p(M,t)dr$; $\mathbf{f}_p(M,t) = -\mathbf{grad} p(M,t)$
Vocabulaire (écoulement stationnaire, irrotationnel, incompressible) + NS, nb de Reynolds

Introduction :

Leçon précédente : écoulements visqueux. Ici, on va négliger la viscosité pour simplifier la résolution de l'équation de NS. Nous allons définir ce qu'est un écoulement parfait et établir l'équation d'Euler ainsi que la relation de Bernoulli (voir intro H Prépa)+ applications

I – Modèle de l'écoulement parfaitement

1) Définition *BFR+Gié+Sanz*

Écoulement parfait si tous les phénomènes diffusifs, en particulier la viscosité, sont négligeables

Conséquences : cf. *Sanz*

adiabatique et réversible => isentropique

Exemples de fluides parfaits ?

2) Equation d'Euler *Gié*

Dans ref. R, l'équation du mouvement devient :

$$\rho d\mathbf{v}/Dt = - \mathbf{grad}(p)d\tau + \mathbf{f}_{\text{vol}} d\tau$$

=> $\rho (\partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}) = - \mathbf{grad}(p) + \mathbf{f}_{\text{vol}}$: équation d'Euler (valable que l'écoulement soit incompressible ou non)

Rq : équation non linéaire dont la résolution est complexe sinon impossible => résolution approchée (évaluation des ODG des termes pour comparer leurs poids respectifs pour simplifier l'expression)

Conséquence : effet de la courbure des lignes de courant *Sanz*

Euler en cylindrique sur des lignes de courant localement circulaires avec $\mathbf{v}(M,t) = v(r,t)\mathbf{u}_\theta$
=> $\partial P/\partial r = \rho v^2(r,t)/r > 0$: la pression augmente du centre de courbure vers la périphérie extérieure du jet

Application : sustentation d'un objet dans l'air exemple : aile d'avion (même si la couche limite visqueuse joue un rôle important dans l'existence de la force de portance)

Expérience : Effet Coanda avec le sèche-cheveux *Sanz*

Savoir expliquer que la viscosité joue un rôle important dans cette expérience (couche limite).

3) Couche limite *Gié + H Prépa + Sanz pour ODG*

On cherche à déterminer l'épaisseur caractéristique de la couche limite visqueuse.

Couche limite : région de l'écoulement, au voisinage d'une paroi, où la viscosité de cisaillement a une influence notable sur l'écoulement

La couche limite a commencé à se développer à l'instant $t = L/V$

$$\delta(t) = \sqrt{(vt)} = \sqrt{(vL/V)} = \sqrt{(\eta L/\rho V)} = L/\sqrt{Re}$$

$Re \ll 1$: viscosité domine : $\delta \gg L$

$Re \gg 1$: $\delta \ll L$

ODG :

- voiture à 90 km/h : δ de l'ordre du millimètre (avec $L = 3,0\text{m}$)

- nageur : qq mètres/s dans l'eau : δ de l'ordre du millimètre

- paramécie (taille : 100 μm) se déplace dans l'eau à 30 $\mu\text{m/s}$: δ de l'ordre du millimètre : 10 fois plus grand que la taille de la paramécie => technique de nage différente des nôtres

II – Relation de Bernoulli

1) Enoncé *Gié ou Sanz*

Dans le cas d'un écoulement parfait (on néglige les effets dus à la viscosité), stationnaire, incompressible, irrotationnel d'un fluide homogène évoluant dans le champ de pesanteur
→ simplifier Euler

Choisir l'axe Oz selon la verticale ascendante → $\mathbf{g} = -\mathbf{grad}(\rho z)$

=> $P/\rho + v^2/2 + gz = \text{cste}$: relation de Bernoulli (établie en 1738)

Remarques :

- termes homogènes à une énergie / u. de masse

$v^2/2$ → énergie cinétique

gz → énergie potentielle

relation de Bernoulli \Leftrightarrow conservation de l'énergie dans l'écoulement

- fluide homogène → ρ uniforme + stationnaire → ρ indépendante du temps → cste

équation locale de conservation de la masse => écoulement incompressible

Cas d'un écoulement tourbillonnaire : $\text{rot } \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ => on ne peut pas écrire tous les termes sous forme d'un gradient => on considère une ligne de courant joignant les points A et B
On considère un déplacement élémentaire $d\mathbf{l}$ le long de cette ligne de courant (schéma?) :
(Euler). $d\mathbf{l} \Rightarrow ((\text{rot } \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{l} = 0$ car \mathbf{v} et $d\mathbf{l}$ colinéaires
On intègre entre A et B => $P(A)/\rho + v^2(A)/2 + gz_A = P(B)/\rho + v^2(B)/2 + gz_B$: dans un écoulement parfait, incompressible, stationnaire, tourbillonnaire d'un fluide homogène évoluant dans le champ de pesanteur, la quantité $P/\rho + v^2/2 + gz$ se conserve le long d'une ligne de courant.

2) Validité des hypothèses GHP p.120

surtout incompressible

Rappel préliminaire ?

3) Aspect énergétique BFR

Bilan énergétique appliqué à un système fermé entre t et t+dt :

$$dE_c = \delta W_{\text{Fpression}} + \delta W_{\text{Fpesanteur}}$$

$$\delta W_{\text{Fpression}} = - \iint_{(S)} P_{\text{ext}} d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\delta W_{\text{Fpesanteur}} = - \int mg dz$$

=> On retrouve la relation de Bernoulli qui traduit la conservation de l'énergie mécanique

III – Applications Gié + BFR

1) Tube de Pitot (MANIP)

Photo + Schéma Sanz

Application directe qui permet de déterminer la vitesse d'un écoulement fluide à partir d'une mesure de différence de pression : sur les ailes ou le fuselage des avions pour mesurer leur vitesse par rapport à l'air ou pour les bateaux. Utilisé la 1ère fois par Henri Pitot en 1730 pour mesurer la vitesse de l'eau de la Seine.

Tube de qq mm, percé d'un tube concentrique de section d'environ $0,5\text{mm}^2$ avec ouverture placée face à l'écoulement + tube extérieur percé d'une série de petits orifices répartis sur une couronne.

Influence de la pesanteur négligeable compte tenu des faibles dimensions du dispositif.

Négligeons les effets de viscosité en les supposant seulement importants dans une mince couche limite près de la paroi des tubes

Appliquer Bernoulli sur 2 lignes de courant :

$$P(A_\infty) + \rho v_0^2/2 = P(A)$$

$$P(S_\infty) + \rho v_0^2/2 = P(S') + \rho v(S')^2/2 = P(S) + \rho v(S)^2/2 = P(S) + \rho v_0^2/2$$

- S' est sur la même verticale que la prise de pression S mais à l'extérieur de la couche limite : la pression reste constante lorsque l'on traverse l'écoulement quasi unidirectionnel dans la couche limite normalement à l'écoulement donc : $P(S) = P(S')$

- la vitesse en S' est pratiquement égale à v_0 , si S' est suffisamment en aval de A et si la section du tube de Pitot est faible devant la taille du canal d'écoulement

- les points A_∞) et A_∞) sont infiniment voisins l'un de l'autre et situés en amont de l'obstacle donc ont des pressions identiques.

$$\Rightarrow P(A) = P(S) + \rho v_0^2/2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{(2(P(A) - P(S))/\rho)}$$

Expérience (cf. notice) avec grosse soufflerie

Masse volumique de l'air : $1,3\text{kg.m}^{-3}$ dans le Sanz

2) Effet Venturi

Schéma Sanz

Écoulement d'un fluide homogène dans une conduite présentant un étranglement

Canalisation avec 3 tubes verticaux permettant de mesurer la pression avant et après l'étranglement ainsi que dans la section rétrécie (tubes supposés suffisamment étroits pour ne pas perturber l'écoulement).

Bernoulli sur la ligne de courant A, B et C, même altitude qui permet de s'affranchir des termes de pesanteur.

Écoulement supposé stationnaire et incompressible

$$P(A)/\rho + v(A)^2/2 = P(B)/\rho + v(B)^2/2 = P(C)/\rho + v(C)^2/2$$

Écoulement incompressible => conservation du débit volumique :

$$v(A)S = v(B)s = v(C)S \Rightarrow v(C)=v(A) \text{ et comme } s < S, v(B) > v(A) \Rightarrow P(B) < P(A) = P(C)$$

Lignes de courant rectilignes et parallèles au niveau des points A, B et C

=> Distribution de pression hydrostatique dans les sections contenant les points A, B et C

$$P(A) = P_0 + \rho g z(A) ; P(B) = P_0 + \rho g z(B) ; P(C) = P_0 + \rho g z(C)$$

Cela impose $z(A) = z(C) > z(B)$. En pratique on observe : $z(A) > z(C) > z(B)$ à cause du caractère visqueux du fluide : la viscosité tend à dissiper une partie de l'énergie du fluide => il voit donc son énergie diminuer progressivement dans la conduite.

Effet Venturi (1796, Giovanni Battista Venturi) : vitesse d'écoulement plus faible dans les régions où la pression est la plus élevée et réciproquement.

Application effet Venturi :

créer une dépression et ainsi réaliser une aspiration : trompes à eau, ventilateurs sans pales, aspirateur de mucosités (médical)

3) Vidange d'un réservoir *s'il reste du temps...*

Conclusion : nous avons étudié la dynamique des fluides parfaits. Cette théorie permet de décrire plus simplement des écoulements à haut nombre de Re et de s'affranchir du caractère visqueux du fluide qui le compose.