Leçon de Physique n°3
Notion de viscosité d'un fluide. Ecoulements visqueux

Niveau : CPGE $2^{ème}$ année : MP, PC, PT,

Programme :

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.2 Actions de contact dans un fluide en mouvement	
Contraintes tangentielles dans un écoulement $\mathbf{v} = v_x(y)\,\mathbf{u}_x$ au sein d'un fluide newtonien ; viscosité.	Utiliser l'expression fournie $d\mathbf{F}=\eta\partial v_x/\partial y\, dS\mathbf{u}_x$
Équivalent volumique des forces de viscosité dans un écoulement incompressible.	Établir sur cet exemple l'expression $d\mathbf{F} = \eta\, \Delta\mathbf{v}\, d\tau$. Utiliser sa généralisation admise pour un écoulement incompressible quelconque.
Traînée d'une sphère solide en mouvement rectiligne uniforme dans un fluide newtonien : nombre de Reynolds ; coefficient de traînée C_x ; graphe de C_x en fonction du nombre de Reynolds ; notion d'écoulement laminaire et d'écoulement turbulent.	Évaluer un nombre de Reynolds pour choisir un modèle de traînée linéaire ou un modèle de traînée quadratique.
Équation de Navier-Stokes dans un fluide newtonien en écoulement incompressible. Terme convectif. Terme diffusif. Nombre de Reynolds dans le cas d'une unique échelle spatiale.	Utiliser cette équation. Évaluer en ordre de grandeur le rapport du terme convectif sur le terme diffusif et le relier au nombre de Reynolds dans le cas d'une unique échelle spatiale.

Livres : Tout-en-un DUNOD PC Sanz , GHP Hydrodynamique physique, H Prépa mécanique des fluides, Gié Mécanique

Pré-requis : statique des fluides, dérivée particulaire ? Conservation de la masse dans un écoulement ? Forces de pression : $d\mathbf{F}_p(M,t) = -\mathbf{grad}\, p(M,t)d\tau$; $\mathbf{f}_p(M,t) = -\mathbf{grad}\, p(M,t)$
Vocabulaire :
écoulement stationnaire : si tous les champs eulériens (champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$, champ de pression $p(\mathbf{r},t)$, champ de masse volumique $\mu(\mathbf{r},t)$, champ de température $T(r,t)$…) sont indépendants du temps
écoulement incompressible : si toute particule fluide garde un volume invariable au cours de son mouvement (il y a conservation du débit) => $\text{div}\, \mathbf{v}(M,t) = 0$
écoulement irrotationnel : si et seulement si en tout point M de l'écoulement on a :
$\mathbf{rot}\, \mathbf{v}(M,t) = \mathbf{0}$

Intro : *Gié*

Nous comparerons l'efficacité des mécanismes de convection et de diffusion, ce qui nous conduira à définir le nombre de Reynolds (GHP)

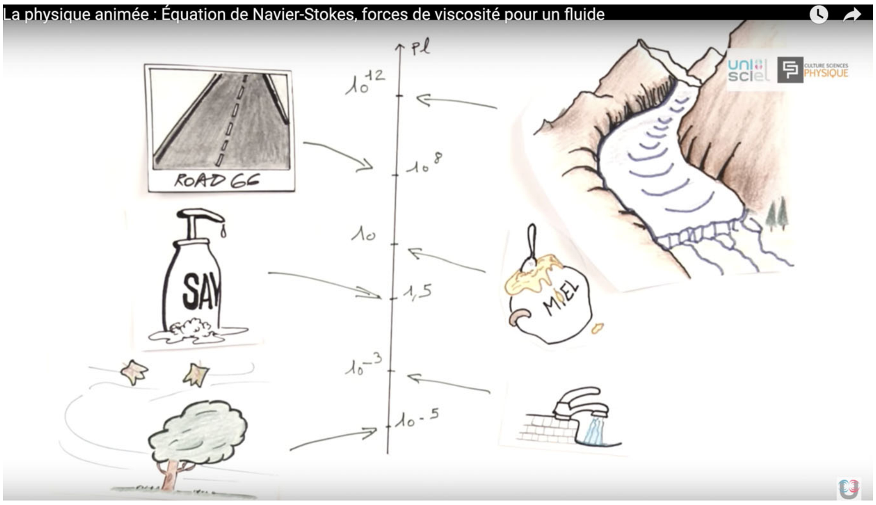
I – Notion de viscosité
1) Mise en évidence expérimentale

Gié
Expérience introductive : chute bille dans glycérine
La bille subit une force **F** appelée trainée, parallèle au vecteur -**v** et proportionnelle au rayon de la bille et à sa vitesse v. Le facteur de proportionnalité ne dépend que de la nature du fluide et conduit à caractériser le fluide par un coefficient positif η appelé coefficient de viscosité du fluide :
$\mathbf{F} = -6\pi\eta r\mathbf{v}$: formule de Stokes

Sanz
Photo : expérience : écoulement de cisaillement simple ou écoulement de Couette plan
écoulement de cisaillement (vitesse varie dans une direction orthogonale à son orientation)
La couche de fluide au contact avec la plaque y adhère et se met en mouvement avec la plaque. Cette couche entraîne la couche de fluide supérieure et ainsi de suite de sorte que le fluide est progressivement mis en mouvement.

2) Définition + ODG + équivalent volumique *H prépa Sanz*
voir H prépa sinon simple dans le GHP (établie en régime stationnaire)

$d\mathbf{F}(y,t) = \eta \partial v_x/\partial y dS \mathbf{u_x}$: relation phénoménologique proposé pour la 1ère fois par Newton
=> caractérise les fluides newtoniens
η : viscosité dynamique en Poiseuille (Pl)
Faire analyse dimensionnelle de η => $[\eta]=[M][L]^{-1}[T]^{-1}$=> Pa.s



ou tableau dans le Sanz

Equivalent volumique de la force de viscosité de cisaillement *Sanz*
Résultante des forces de viscosité de cisaillement qui s'exerce sur une particule de fluide située à t entre x et x+dx, y et y+dy et z et z+dz => Faire schéma
Dans le cas d'une géométrie plane avec écoulement selon Ox avec composante de la vitesse seulement fonction de y ($\mathbf{v}(M,t)=\mathbf{v_x}(y,t)\mathbf{u_x}$).
$dF=dF(x,y+dy,z,t)+dF(x,y,z,t)= \dots = \eta\Delta\mathbf{v}(M,t) = \mathbf{f_{visc}}(M,t)d\tau$ (1)
(car v ne dépend que de y et de t donc $\Delta\mathbf{v}(M,t)=\Delta v_x(y,t)\mathbf{u_x}$)
On admet que ce résultat peut être généralisé à tout écoulement incompressible d'un fluide newtonien (cf. programme).

Bille dans le glycérol ?

3) Equation de diffusion de quantité de mouvement *GHP* + *Gié* (comparaison avec l'équation de la chaleur)
Schéma GHP
Dans le cas d'une géométrie plane avec écoulement selon Ox avec composante de la vitesse seulement fonction de y.
2nde loi de Newton à une particule de fluide située à t entre x et x+dx, y et y+dy et z et z+dz : $\rho dxdydzDv_x/Dt=dF_{vx}+dF_{px}$
avec $dF_{px} = p(x,y,z,t)dydz-p(x+dx,y,z,t)dydz = -\partial p/\partial x\ dxdydz=0$ car p ne dépend pas de x

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}.$$

Equivalent pour la vitesse (ou la quantité de mouvement si l'on multiplie par la masse volumique ρ ses deux membres) des équations de diffusion thermique et de la masse.
=> $\nu=\eta/\rho$ de dimension $[L]^2[T]^{-1}$: viscosité cinématique = coefficient de diffusion pour la quantité de mouvement analogue aux coefficient de diffusion thermique κ ($\kappa\Delta T$) et de particules D ($D\Delta n$) (rencontrés pour l'étude de la diffusion thermique et de la diffusion des particules)

ccl : la viscosité de cisaillement engendre un transport diffusif de la quantité de mouvement dans la direction transverse à l'écoulement. C'est la viscosité cinématique qui est le coefficient de diffusion de ce phénomène de transport.

4) Pertes *H prépa ?*

II – Ecoulements visqueux
1) Equation de NS *H prépa*
On a déjà appliqué la 2ème loi de Newton – généralisons :
→ connaître les conditions d'applications : particule de fluide de volume dτ dans R, écoulement incompressible d'un fluide newtonien pour pouvoir utiliser (1)
$\rho d\tau Dv/Dt = \rho d\tau\ (\partial \mathbf{v}/\partial t+(\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{v}) = - \mathbf{grad}(p)d\tau + \eta\Delta\mathbf{v}\ d\tau + f_{vol}\ d\tau$: écoulement incompressible
=> NS en simplifiant par dτ
(écoulement parfait => on enlève la viscosité)
Remarque : $\partial\mathbf{v}/\partial t+(\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{v} = \partial\mathbf{v}/\partial t+\mathbf{grad}\ (v^2/2)+(\mathbf{rot\ v})\wedge\mathbf{v}$

2) Nombre de Reynolds *Gié + H prépa p. 165 +*
Lors d'un écoulement, ou près d'un obstacle par exemple, il y une compétition entre le caractère diffusif de la quantité de mouvement par la viscosité (terme : $\eta\Delta\mathbf{v}$) et le transport convectif (terme : $\rho(\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{v}$). La question est de savoir si c'est la viscosité qui l'emporte, ou le transport convectif ou un équilibre entre les deux.
$Re = |\ \rho(\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{v}\ |\ /\ |\ \eta\Delta\mathbf{v}\ |$
Voir GHP
$Re=\rho VL/\eta=VL/\nu$
avec V vitesse caractéristique de l'écoulement et L longueur caractéristique de l'écoulement (taille d'un obstacle, diamètre d'une conduite…)
Re>>1 : transport par convection >> transport par diffusion : viscosité joue un rôle négligeable à l'échelle L
Re<<1 : transport par convection << transport par diffusion : viscosité joue un rôle prépondérant à l'échelle L

Sanz → photo (expérience reproduisant l'expérience de Reynolds publiée en 1883 écoulement laminaire → turbulent en fonction de Re)

III – Exemples d'écoulements visqueux
1) Ecoulement de Couette plan *GHP p. 196 + H prépa (CL)*
Couette plan avec $\mathbf{v}=v(y)\mathbf{u_x}$ $v(0)=0$ et $v(h)=V$
en stationnaire → $\partial^2 v_x/\partial t^2 = 0$ → $v=ay+b=V.y/h$

Aspect microscopique (GHP) : deux boîtes avec des particules : les particules s'échangent entre les 2 boîtes → lié au coefficient de diffusion D=v=L*v ??????

2) Ecoulement de Poiseuille dans un tube cylindrique GHP
Image : GHP : parois du cylindre fixes, on applique une différence de pression ΔP
NS : mouvement d'un fluide newtonien visqueux incompressible, écoulement stationnaire => $\partial \mathbf{v}/\partial t = \mathbf{0}$
écoulement unidirectionnel : vitesse selon Ox => $(\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{v}=\mathbf{0}$
=> en coordonnées cylindriques (r,ϑ,x) où r=0 correspond à l'axe du tube => 3 équations
sur U_r : $0 = -\partial P/\partial r - \rho g\cos\vartheta$ (3)
sur U_ϑ : $0 = -1/r\ \partial P/\partial\vartheta + \rho g\sin\vartheta$ (4)
sur U_x : $0 = -\partial P/\partial x + \eta\Delta v_x$ (5)
$\partial/\partial x$ (3) et (4) => P indépendant de r et ϑ
(5) v_x indépendant de x donc $\partial P/\partial x$=cste (perte de charge $K = \Delta P/L = -\partial P/\partial x$)
$\vartheta=0$ quand $\mathbf{u_r}$ vertical opposé à $\mathbf{g}$
$v_x = K/(4\eta)(R^2-r^2)$
Intégrer $v_x(r)2\pi r dr$ entre 0 et R pour obtenir le débit volumique du fluide Q :
$Q = \pi K R^4/(8\eta) = \pi R^4\Delta P/(8\eta L)$

Expérience
Surpression imposée en ajustant la hauteur du tube inséré dans la bouteille.
Estimation du débit pour 30mL ou 40 mL écoulés (éprouvette) – attendre que le régime soit permanent
$\Delta P=\rho g\Delta h$
Tracer Δh en fonction du débit D => η

3) Viscosimètre à bille Gié p. 428
→ Force de trainée + graphe

Conclusion : étude utilisée dans les usines ? Etude des lubrifiants : diminue les forces d'usures, diminue la corrosion

épaisseur couche limite delta=L/racine(Re) Sanz