Leçon de Physique n°25
Oscillateurs ; portraits de phase et non-linéarités

Niveau : L3

Programme :

Notions et contenus	Capacités exigibles

Livres : Mécanique Perez, Vibrations et phénomènes de propagation. Tome 2 Ondes, Mathieu, Vibration, propagation, diffusion Soutif

Pré-requis : Mécanique du point (TEC, conservation Em, PFD), oscillateur harmonique,

Introduction :
De nombreux systèmes oscillants nous entourent :
- les atomes de quartz vibrent à 10^{12}Hz sur 10^{-10}mètres,
- les océans oscillent à la surface de la Terre sur une échelle de la journée,
- le coeur bat avec une période de l'ordre de la seconde (50-80 pulsations/minute).

Tout corps dans une situation stable oscille autour de sa position d'équilibre à la suite d'une perturbation de la part de son environnement.
Si l'écart à l'équilibre est suffisamment faible, le système subit une force de rappel linéaire → oscillations sinusoïdales en l'absence de frottements → oscillateur harmonique.
Pour les écarts plus importants, le système présente des non-linéarités → technique de résolution.
Un système oscillant dont l'état dépend d'une variable s est dit non linéaire lorsque ses oscillations obéissent à une équation différentielles dont un ou plusieurs termes dépendent de s à des puissances différentes de la première.
Non linéarité des équation du mouvement → conséquence importante : **le principe de superposition des solution n'est plus valable.**

I – Le pendule pesant
1) Equation du mouvement
Schéma
Système : {masse} fil inextensible de longueur l (de masse négligeable)
OM=… **v**=...
$Ec=1/2\ mv^2 = 1/2\ ml^2(d\theta/dt)^2$
$Ep=mgh=mgl(1-\cos\theta)$ ($Ep=0$ quand $\theta=0$)
Conservation de l'énergie mécanique : E=cste => E=Ec+Ep => (1) (E dépend des CI)
$dE/dt=0 \Rightarrow d^2\theta/dt^2 + g/l \sin\theta = 0$: équation pendulaire (on peut poser $\omega_0^2=g/l$
Non linéarité → $\sin\theta$: cette équation n'admet pas de solution qui s'exprime à l'aide de fonctions élémentaires

2) Description qualitative du mouvement

(1) => $(d\theta/dt)^2=2/(ml^2)$ (E-mgl(1-cosθ))≥0 => mouvement ssi (E-mgl(1-cosθ))≥0
1≥cosθ≥-1
3 cas en fonction de E :
- E<2mgl : mouvement entre $-\theta_m$ et θ_m => pendule oscillant d'amplitude θ_m et de période T
Faire le calcul de T (cf. *Perez ou autre?*)
- E>2mgl : rien ne limite θ et sa vitesse ne s'annule pas → mouvement de fronde toujours dans le même sens
- E=2mgl : vitesse nulle en θ=±π → il arrive donc avec une vitesse nulle à un position d'équilibre instable

3) Cas des petites oscillations :
* Approximation linéaire : E<<2mgl → $\theta_= << \pi$ (**rappels sur diaporama**)
faibles amplitude : sinθ≈θ => $d^2\theta/dt^2 + \omega_0^2 \theta = 0$.
Donner T_0 : indépendante de l'amplitude de θ_m → isochronisme des petites oscillations
* Meilleure approximation : $\sin\theta \approx \theta - \theta^3/6$ => $d^2\theta/dt^2 + \omega_0^2 (\theta - \theta^3/6) = 0$ (3) (terme en $\theta^3/6$ non linéaire)
Terme correctif : $\theta^3/6$ → remplacer θ par sinωt => écrire $\sin^3\omega t$ en exponentielle
=> $\sin^3\omega t = (3\sin\omega t - \sin 3\omega t)/4$ => apparition d'un terme en sin3ωt : harmonique de rang 3
=> On cherche une solution du type $\theta(t)= \theta_0 [\sin\omega t+\varepsilon\sin 3\omega t]$ avec $|\theta_0|<<1$ et $|\varepsilon|<<\theta_0$
à injecter dans (3) =>
2 équations => $\omega^2=\omega_0^2(1-<<<\theta_0^2/8)$ => $\omega\approx\omega_0(1-\theta_0^2/16)$ d'où $T\approx T_0(1+\theta_0^2/16)$ → valable jusqu'à des angles de 90° : $T/T_0\approx 1{,}15$
=> $\varepsilon=\theta_0^2/192$
Non-linéarité => apparition d'harmoniques (mouvement oscillant pas forcément sinusoïdal → on peut le décomposer en série de Fourier dont le calcul approché a fait apparaître ici les deux premiers termes)
=> **L'apparition plus ou moins importante d'harmoniques accompagnera tous les phénomènes périodiques régis par des équations non linéaires.**

4) Portrait de phase
Définition : **ensemble des trajectoires dans espace des phases (θ,dθ/dt)**
$E=1/2ml^2(d\theta/dt)^2+mgl(1-\cos\theta)$ → équation des trajectoires dans le plan (θ,dθ/dt)
*cas 1 : E<<2mgl ≈ oscillateur harmonique > trajectoire dans le plan de phases ≈ cercles
*cas 2 : E<2mgl → oscillateur mais trajectoires qui s'écartent du cercle → du aux termes non linéaires
*cas 3 : E=2mgl → séparatrice : points singuliers en x=(2p+1)π p appartenant à Z (équilibres instables)
*cas 4 : E>2mgl → mouvement de fronde où dθ/dt garde un signe constant
=> sur diaporama !

II – Oscillateur anharmonique forcé soumis à 2 forces sinusoïdales
$md^2x/dt^2+rx+kx+\varepsilon x^2=F_m\sin\omega t+ F'_m\sin\omega' t$ (mélange de signaux → mélangeur)
Sans terme en εx^2 → solution en x=Asinωt+Bsinω't
$\varepsilon x^2 = \varepsilon(A\sin\omega t+B\sin\omega' t)^2$=> développer
→ carrés : apparition des fréquences harmoniques 2ω et 2ω'
produit en sinωtsinω't= écriture exponentielle = 1/2 (cos(ω-ω')t-cos(ω+ω')t)
fréquences de combinaison : différentielle additionnelle
Remarque : oscillateur anharmonique amorti → amortissement seulement destiné à faire disparaître l'oscillation propre en régime permanent.

$d^2x/dt^2 + \omega_0^2 x + \varepsilon x^3 = F_m\sin\omega t$ (4) $x=x_{1m}\sin\omega t + x_{3m}\sin 3\omega t$ ($x_{3m} << x_{1m}$)
néglige termes en x_{3m}^2 et x_{3m}^3 et un terme en sin5ωt

$(3\varepsilon/4)x_{1m}^3 + (\omega_0^2 - \omega^2)x_{1m} - F_m = 0$

Pour $\varepsilon \neq 0$ => (4) a 1-3 racines DIAPO 9.5 Mathieu x1m=f(ω) $\varepsilon>0$
---- . ---- . <=> $F_m=0$ (pour une oscillation linéaire elle serait verticale mais l'élasticité augmente avec l'amplitude, la pulsation propre aussi)
----------- 1 valeur de F_m donnée
$\omega > \omega_0 \rightarrow$ 3 valeurs réelles de x_{1m} (A_3, C, B_3) $B_2C \rightarrow$ mouvements instables (augmentation Fm→diminution d'amplitude)
+ amortissement DIAPO 9.6 Mathieu

INSERER SCHEMA

II – Oscillateur auto-entretenu (présent dans les montres à quartz et permettent une mesure du temps)

$d^2x/dt^2 + (\omega_0/Q)dx/dt + \omega_0^2x=0$
si Q>0 : perd + d'énergie qu'il n'en reçoit => amortissement
si Q<0 : énergie augmente => amplification de l'oscillation, amplitude en $\exp(-\omega t/2Q)$
=> 1 oscillateur linéaire ne peut pas auto-osciller
=> stabilisation de l'oscillation en présence de termes non-linéaires.

1) Oscillateur de Van der Pol (1 des + simples)
Modèle qui permet de représenter 1 oscillateur pour lequel 1 terme non-linéaire permet de stabiliser l'amplitude.
Van der Pol : $d^2x/dt^2 + (\alpha x^2 - \beta)dx/dt + \omega_0^2x=0$
terme entre parenthèses : caractérise la variation d'énergie mécanique, non-linéaire
Selon le signe de $\alpha x^2 - \beta$ c'est-à-dire selon la valeur de l'amplitude, le système perd ou gagne de l'énergie.
élongation x faible: $\alpha x^2 - \beta < 0$ amplification → équilibre
élongation x importante : $\alpha x^2 - \beta > 0$ atténuation

$\alpha x^2 - \beta = \lambda$
$\lambda(x) = -\lambda_0(1 - x^2/x_0^2)$ => $\lambda_0>0$ x_0: amplitude de référence
$x^2 > x_0^2$: grandes oscillations -> $\lambda > 0$: force résistive
$x^2 < x_0^2$: petites oscillations -> $\lambda < 0$: force motrice

équation de Van der Pol adimensionnelle $d^2x/dt^2 - (\varepsilon - x^2)dx/dt + x = 0$ avec $\varepsilon = \lambda_0/\omega_0$

2) Portrait de phase (x, dx/dt)
DIAPO

Remarque : faire éventuellement oscillateur à résistance négative, dire ce qu'il y a dans la boîte
puis VdP → oscillations quasi-sinusoïdale (taux d'harmoniques très faible)
→ oscillations à relaxation → non-linéarités : bascule entre 2 états (ex : entre V+ et V-)