Leçon de Physique n°13
Ondes progressives, ondes stationnaires

Niveau : CPGE 2ème année

Programme :
Le bloc 1 est consacré à l'étude de phénomènes ondulatoires non dispersifs régis par l'équation d'onde de d'Alembert. Le choix a été fait ici de privilégier les solutions harmoniques dans la résolution pour leur universalité comme solutions adaptées aux équations d'ondes linéaires. Les solutions générales *f(x-ct)* et *g(x+ct)* apparaissent ici comme un cas particulier que l'on retrouve par superposition. La méthode de séparation des variables n'est donc pas exigible sur cette partie. S'agissant de la modélisation microscopique des solides, l'objectif est principalement d'établir la loi de Hooke qui sera ensuite utilisée pour mettre en équations les ondes longitudinales dans l'approximation du solide continu. Dans le cadre de la physique des ondes, on qualifiera de plane ou sphérique une onde par référence à sa dépendance spatiale f(x,t) ou f(r,t).

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.1. Ondes mécaniques unidimensionnelles dans les solides déformables **Capacités exigibles**	
Équation d'onde pour des ondes transversales sur une corde vibrante infiniment souple dans l'approximation des petits mouvements transverses.	Établir l'équation d'onde en utilisant un système infinitésimal.
Modèle microscopique de solide élastique unidimensionnel (chaîne d'atomes élastiquement liés) : loi de Hooke.	Relier la raideur des ressorts fictifs à l'énergie de liaison et évaluer l'ordre de grandeur du module d'Young.
Ondes acoustiques longitudinales dans une tige solide dans l'approximation des milieux continus.	Établir l'équation d'onde en utilisant un système infinitésimal.
Équation de d'Alembert ; célérité.	Reconnaître une équation de d'Alembert. Associer qualitativement la célérité d'ondes mécaniques, la raideur et l'inertie du milieu support.
Exemples de solutions de l'équation de d'Alembert : • ondes progressives harmoniques • ondes stationnaires harmoniques	Différencier une onde stationnaire d'une onde progressive par la forme de leur représentation réelle. Utiliser qualitativement l'analyse de Fourier pour décrire une onde non harmonique.
Applications : • régime libre : modes propres d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités	Décrire les modes propres.
• régime forcé : résonances sur la corde de Melde.	En négligeant l'amortissement, associer mode propre et résonance en régime forcé.

Livres : H Prépa Ondes PC, Tout-en-un DUNOD PC, Tec&Doc Physique PC, Ondes et physique ondulatoire BFR, Vibrations et phénomènes de propagation T2. Ondes JP Mathieu, BUP 649, Poly Montrouge, Garing Ondes électromagnétiques

Pré-requis : définition d'une onde, équations différentielles, cinétique, mécanique

Introduction : *H Prépa*
voir *H Prépa intro chapitre 1*
Fin de l'intro : Nous allons voir qq cas physique où le phénomène de propagation se manifeste (de manière unidimensionnelle). Dans ces cas, nous allons montrer que la propagation est régie par une équation de propagation, appelée équation de d'Alembert et nous allons étudier qq ondes caractéristiques solution de cette équation : ondes progressives et stationnaires (ainsi que quelques aspects énergétiques → facultatif).

I – Introduction aux phénomènes de propagation
1) Corde vibrante *H Prépa*
Expérience : corde molle et lourde de masse linéique μ que l'on agite, dont une extrémité est fixée au mur
→ la secouer ne met aps brutalement toute la corde en mouvement : une onde caractérisée par le déplacement d'un point de la corde se propage le long de celle-ci
Faire dessin entre deux instants dt et montrer le déplacement par des flèches
→ déplacement de la corde ⊥ direction de propagation : onde dite transversale
On va établir des équations qui vont coupler vitesse et force.
Hypothèses :
1 – pesanteur négligeable (corde tendue)
2 – mouvement contenu dans le plan (xOy)
3 – déformation supposée faible (corde vibre mais sans s'écarter notablement de sa position d'équilibre comme la corde d'un piano frappée our la corde de la guitare pincée → vibrent et émettent un son)
4 – raideur négligeable de la corde → l'action d'un élément de corde sur 1 élément voisin est représenté par une force, la tension de la corde, portée par la tangente à cette corde au point considérées
5 – pas d'amortissement

Isolons par la pensée un élément de corde de longueur dl≈dx compris entre x et x+dx
hyp 3 => $\cos\alpha \approx 1$ et $\sin\alpha \approx \alpha$
PDF appliqué à {dl} de masse dm=μdl≈μdx dans le réf galiléen et projeter sur Ox et Oy
sur Ox => T constante => T_0 → donner les valeurs pour corde de violon (240N), de guitare (entre 60 et 150N selon le type de corde, μ => voir BUP649), de piano (390N)
sur Oy => $\partial^2 y/\partial x^2 - 1/v_0^2\ \partial^2 y/\partial t^2 = 0$: équation de d'Alembert unidimensionnelle
avec $v_0=\sqrt{T_0/\mu}$ → homogène à une vitesse = vitesse de propagation de l'onde
(utiliser que $\tan\alpha=\partial y/\partial x\approx\alpha$)
→ donner les valeurs de v_0 pour la corde de guitare à partir du BUP 649 (annexe1) pour une note avec 1 corde en acier et 1 corde en nylon ($\mu=\rho\pi a^2$) et en déduire $f=1/(2L)\sqrt{T_0/\mu}$=330Hz => retrouver mi3 (fréquence d d'une note : $f=f_0 * r^n$ avec f_0=440Hz fréquence du la3, n le nombre de demi-tons qui sépare la note du la3 et $r=\sqrt[12]{2}$: car il y a 12 demi-tons dans une octave et la fréquence est multipliée par 2 entre 2 notes séparées d'une octave)

Remarque (facultatif) : équation vient de 2 équations couplées liant T(x,t) et v(x,t) : vitesse de déplacement transverse => une déformation de la corde entraîne l'apparition d'une force T(x,t) qui peut elle-même entraîner une vitesse de déplacement…
=> couplage semblable à celui qui entraîne la propagation d'une déformation dans une chaîne de masses couplées par des ressorts.

2) Câble coaxial *H Prépa + Garing*
Expérience : envoyer un pulse d'ondes dans un câble coaxial de 100 mètre avec circuit fermé au bout. *Poly Montrouge*
Visualiser à l'oscilloscope le signal d'entrée et le signal après un aller-retour.
Mesurer le temps puis la vitesse de propagation
Remarque : le signal est atténué et déformé
Schéma du câble coaxial sur diapo : âme conductrice de rayon a (Cu) enrobée d'une couche isolante (diélectrique)
Modélisation sur diapo : ligne électrique de longueur dx
Hypothèse : on néglige les pertes dans le câble
Loi de nœuds + loi des mailles => 2 équations : on dérive une des 2 équation par x => équation de d'Alembert pour i : $\partial^2 i/\partial x^2 - 1/v_0^2\ \partial^2 i/\partial t^2 = 0$ avec $v_0=1/\sqrt{(L_0C_0)}=C/\sqrt{\varepsilon_r}=C/n$
Mesurer au LCR-mètre C_0 et L_0 et comparer avec la valeur de v_0 mesurée précédemment (incertitude due à la mesure de L_0 car on ajoute un fil de contact) *Poly Montrouge*

3) Analogies électromécaniques
Tableau sur diaporama. Cf. *H Prépa*
Ils obéissent à la même équation de propagation : l'équation de d'Alembert (se retrouve aussi en acoustique : tuyau d'orge, flûte traversière, électromagnétisme).
Quelles sont les solutions de ces équations ?
Remarque : ondes qui ne répondent pas à cette équation : ondes de matière, solitons : ondes dans les matériaux non linéaires (tsunamis, mascaret) → découverts en Ecosse par John Scott Russel en 1834.

II – Solution de l'équation de propagation : ondes progressives
1) Solution générale de l'équation de d'Alembert
Forme générale de l'équation de d'Alembert : $\partial^2 i/\partial x^2 - 1/c^2\ \partial^2 i/\partial t^2 = 0$ avec c la célérité de l'onde
Voir *Tout-en-un DUNOD PC* pour introduire la changement de variable avec courbes (faire sur la même pour mettre en évidence
On considère une onde progressive, se propageant avec la célérité c dans la direction de
l'axe (Ox) et dans le sens positif de cet axe, c'est-à-dire vers les x croissants (onde plane car unidimensionnelle = l'onde est la même en tout points d'un plan perpendiculaire à la direction de propagation).

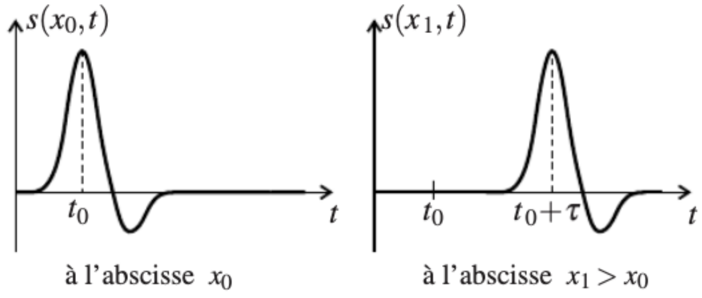

Figure 25.8 – Onde progressive dans le sens positif de (Ox).

=> justification de l'écriture sous la forme f(t-x/c), de même pour g(t-x/c)
Raisonnement identique pour F(x-ct) et G(x+ct).
Principe de superposition : 2 solutions distinctes f et g => s=af+bg, (a,b) appartenant R^2 est également solution.
=> ceci permet d'obtenir des solutions satisfaisant à des conditions aux limites et/ou des conditions initiales données.

2) Ondes progressives harmoniques *Dunod tout-en-un*
Constatant que les ondes que nous avons étudiées jusqu'à présent correspondent à des mouvements vibratoires de systèmes stables, nous pouvons rechercher des solutions de l'équation de d'Alembert à dépendance sinusoïdale vis-à-vis du temps (ondes progressives sinusoïdales qu'on appelle aussi OP Harmoniques) :

$s(x,t)=s_0\cos(\omega(t-x/c)+\varphi_0)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$: fonction sinusoïdale de pulsation temporelle ω, se propageant dans le sens positif de l'axe (Ox) à la vitesse c (aussi appelée vitesse de phase)
$k=\omega/c$: pulsation spatiale
s_0 : amplitude de l'onde et φ_0 : phase initiale à l'origine
Donner la période temporelle $T=2\pi/\omega$ et la période spatiale dite longueur d'onde $\lambda=2\pi/k=cT$: distance parcourue par l'onde pendant une période
Donner s en notation complexe

ODG des fréquences ? cf. *Dunod tout-en-un PC ou PCSI 2021*

3) Aspect énergétique *H Prépa Ch.3 exercice 6 NE PAS FAIRE*
Exemple de la corde :
Les différents poins de la corde acquièrent, au passage de l'onde, une énergie cinétique par leur mise en mouvement mais aussi une énergie potentielle due à l'écart à leur position d'équilibre.
Energie de la corde : $E(t)=\int dE(x,t)=\int e(x,t)dx$
où e(x,t) : densité linéique d'énergie qui peut se décomposer sous la forme : $e=e_c+e_p$
* $dEc=½\ dmv^2(x,t)=½\ \mu dx(\partial y/\partial t)^2 \rightarrow e_c(x,t)$
* Pour allonger l'élément de corde de dx à ds (avec $ds^2 \approx dx^2(1+(\partial y/\partial x)^2)$ donc $ds\approx dx(1+½(\partial y/\partial x)^2))$, il faut fournir un travail :
$\delta W=T_0(ds-dx)=T_0/2\ (\partial y/\partial x)^2\,dx$, représentant l'énergie potentielle de l'élément de longueur dx de corde $\rightarrow e_p(x,t)$
=> $e(x,t)= 1/2\ \mu(\partial y/\partial t)^2+ T_0/2\ (\partial y/\partial x)^2$
* L'énergie de l'élément de corde ne reste pas constante : il y a transport d'énergie par l'onde entre les différents points de la corde : le puissance est transférée (en 1 point x_0 de la corde de la partie gauche vers la partie droite = puissance de la force exercée par la partie gauche sur la partie droite : $-\mathbf{T}(x_0,t)$:
$P(x_0,t)=-\mathbf{T}(x_0,t).\mathbf{v}(x_0,t)\mathbf{u_y}=-T_y(x_0,t).v(x_0,t)=-T_0\partial y/\partial x.\partial y/\partial t$ *facultatif*)
* Bilan énergétique local de l'élément dx entre les instants t et t+dt : énergie arrivant à la position x (P(x,t)dt) pendant dt est diminuée de l'énergie partant à la position x+dx : P(x+dx,t)dt pendant le même intervalle de temps est égale à la variation d'énergie entre ces deux plans pendant dt :
$P(x,t)dt- P(x+dx,t)dt=\partial e(x,t)/\partial t\ dxdt$ => $\partial P(x,t)/\partial x+\partial e(x,t)/\partial t=0$
(vérification : $\partial e(x,t)/\partial t= \mu(\partial y/\partial t)(\partial y/\partial t)^2+ T_0(\partial y/\partial x)(\partial^2 y/\partial x\partial t)$
or $\mu(\partial^2 y/\partial t^2)=-\partial T_y/\partial x=T_0\partial^2 y/\partial x^2$ et $T_y=-T_0\partial y/\partial x$
=> $\partial e(x,t)/\partial t= T_0(\partial y/\partial t)\partial^2 y/\partial x^2+ T_0(\partial y/\partial x)(\partial^2 y/\partial x\partial t)= -\partial/\partial x\ (-T_0\ \partial y/\partial x\ \partial y/\partial t)=-\partial/\partial x(T_y\partial y/\partial t)$
$= -\ \partial/\partial x\ (T_y\partial y/\partial t)= -\ \partial/\partial x\ (T_y v_y)=-\ \partial P/\partial x)$
OPP(+) : l'onde peut se mettre sous la forme $v(x,t)=f(t-x/c)$
$T_y=-T_0\partial y/\partial x=\sqrt{(\mu T_0)}f(t-x/c)$ => $P=T_y.v=\sqrt{(\mu T_0)}f^2(t-x/c)$ => $e=\mu f^2(t-x/c)$
Vecteur densité d'énergie : $\mathbf{P}(x,t)=ce(x,t)\mathbf{u}$: l'énergie d'une OPP se déplace à la vitesse $\mathbf{v}=c\mathbf{u}$
Pour le câble coaxial => cf. *H Prépa*

Pour faire la liaison : étude générale mais la plupart du temps, la corde (notamment pour les instruments de musique) est fixée aux 2 extrémités. Que cela implique-t-il sur la propagation d'une telle onde ?

III – Solutions particulières : ondes stationnaires
1) Définitions *DUNOD Tout-en-un PC + H Prépa*

Expérience : corde de Melde : corde tendue entre 2 extremités, l'une soumise à 1 excitateur qui effectue de petites oscillations à la fréquence f (f=2f' où f' est la fréquence du courant), l'autre est reliée à une poulie et soumise à T_0=Mg *Schéma + EXP*
On n'observe pas de propagation mais des nœuds (amplitude nulle) (→ ep) et des ventres (maximum d'amplitude) (→ ec)
→ on a créé des ondes stationnaires
Dun point de vue mathématiques, une onde est dite stationnaire si les variables d'espaces et de temps sont découplées. On cherche donc une solution à l'équation de d'Alembert :
$\partial^2\Psi/\partial x^2 - 1/c^2\ \partial^2\Psi/\partial t^2 = 0$ sous la forme $\Psi(x,t)=F(x)G(t)$
=> $F''(x)G(t) - 1/c^2\ F(x)G''(t)=0$ => $c^2F''(x)/F(x)=G''(t)/G(t)=A$
Nous devons rejeter les solutions qui divergent à l'infini => considérer $A = -\omega^2$
$G(t)=G_0\cos(\omega t+\varphi_1)$
$F(x)=F_0\cos(kx+\varphi_2)$ avec $k=\omega/c$ $(-c^2k^2=-\omega^2)$
=> $\Psi(x,t)=\Psi_0\cos(\omega t+\varphi_1)\cos(kx+\varphi_2)$: solution stationnaire (ondes harmoniques)

<u>2) Etude de l'onde stationnaires</u>
A un instant t fixé, la forme de la corde est une sinusoïde → stroboscope sur la corde
En un point de la corde, l'amplitude de la vibration est $\Psi_0\cos(kx+\varphi_2)$
*Points fixes=noeuds de vibration : $\cos(kx+\varphi_2)=0$ => $kx_n+\varphi_2=(2n+1)\pi/2$
=> $x_n= -\varphi_2/k+(2n+1)\pi/2k= -\varphi_2/k+(2n+1)\lambda/4$ car $\lambda=2\pi/k$
distance entre 2 nœuds voisins : $x_{n+1} - x_n = (2n+3-(2n+1))\lambda/4= \lambda/2$
*Points avec amplitude maximale=ventres : $\cos(kx+\varphi_2)=\pm1$ => $kx_n+\varphi_2=n\pi$
=> $x_n= -\varphi_2/k+n\pi/k= -\varphi_2/k+n\lambda/2$
distance entre 1 nœud et 1 ventre voisins : $(2n+1)\lambda/4 - n\lambda/2 = \lambda/4$
Schéma
Une onde stationnaire peut s'interpréter comme la superposition de 2 ondes progressives de même amplitude et se propageant en sens inverse (donc une onde stationnaire sans être fixée aux 2 extrémités).
La détermination de la solution Ψ(x,t) de l'équation de d'Alembert pour un problème donné nécessite la donnée de CI et de CL. C'est la nature des CL qui guide le choix entre la décomposition sur une famille d'OP ou sur une famille d'OS. Par exemple pour une corde de longueur infinie, on privilégie plutôt les OP alors que pour une corde fixée en un point on privilégie plutôt les OS.

<u>3) Notions de modes propres</u> *H Prépa*
Corde de guitare : fixée à ses 2 extrémités => OS
$\Psi(x,t)=\Psi_0\cos(kx-\varphi_1)\cos(\omega t-\varphi_2)$
Conditions aux limites : $\Psi(0,t)=0$ et $\Psi(L,t)=0$
Conditions initiales : $\Psi(x,0)=\alpha(x)$ et $\partial\Psi(x,0)/\partial t=\beta(x)$
$\Psi(0,t)=\Psi_0\cos(-\varphi_1)\cos(\omega t-\varphi_2)=0$ => $\cos\varphi_1=0$ => $\varphi_1=\pi/2$
$\Psi(L,t)=\Psi_0\cos(kL-\varphi_1)\cos(\omega t-\varphi_2)=0$ => $\cos(kL-\pi/2)=0$ => $k_nL=n\pi$
=> $k_n=n\pi/L$ et $\omega_n=kc=n\pi c/L$: le norme du vecteur d'onde et les pulsations sont quantifiées
$\lambda_n=2\pi/k_n=2L/n$ → $L=n\lambda/2$

Modes propres caractérisés par $\Psi_n(x,t)=A_n\sin(n\pi x/L)\cos(n\pi ct/L-\varphi_n)$ et $\Psi(x,t)=\Sigma\Psi_n(x,t)$
Fréquence proportionnelle à 1/L → plus la corde est longue, plus la fréquence est petite et le son grave.
Fréquence fondamentale : $f_1= \omega_n/2\pi=c/2L$ et harmoniques $f_n=n\ f_1$
=> son émis par un instrument composé de nombreuses harmoniques combinaisons des différents modes propres
Instrument => caisse de résonance pour amplifier les sons.

Le réglage de la tension de la corde permet d'ajuster son mode fondamental de vibration pour obtenir la note recherchée.
Remarque : non linéarité importante dans le cas de la résonance dont l'effet limite l'amplitude des oscillations

<u>Conclusion</u>
Nous avons pu établir l'équation de d'Alembert qui décrit la propagation d'une onde. Celle-ci a été appliquée dans le cas dune corde et d'une ligne électrique mais elle peut-être appliquée dans d'autres domaines de la physique notamment en acoustique ou en électromagnétisme.
Parler de la polarisation ?
Dans les cas que nous avons étudiés, le signal se propage avec une vitesse c indépendante de la fréquence et donc ne se déforme pas. Nous verrons plus tard comment tenir compte de ces phénomènes.
À 3D → vecteurs d'ondes planes