Chapitre 1
Généralités sur les fonctions

I Opérations sur les fonctions

Transmaths : Activité 1 page 14

1) Égalité de deux fonctions

Définition : Dire que deux fonctions *f* et *g* sont égales (on note *f* = *g*) signifie que :
→ *f* et *g* ont le même ensemble de définition *D*
→ pour tout réel $x \in D$, $u(x)=v(x)$

Exemple : *u* et *v* sont définies sur $\mathbb{R}$ - {- 1} par $u(x)=3-\frac{2}{x+1}$ et $v(x)=\frac{3x+1}{x+1}$. Les fonctions *u* et *v* ont bien le même ensemble de définition et pour tout réel $x \neq -1$, $u(x)=\frac{3(x+1)}{x+1}-\frac{2}{x+1}=\frac{3x+3-2}{x+1}=\frac{3x+1}{x+1}=v(x)$. Donc *u* = *v*.

Exercice : Soient *f* et *g* deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ - $\{\frac{1}{2}\}$ par $f(x)=\frac{8x-3}{2x-1}$ et $g(x)=4+\frac{1}{2x-1}$. A t-on la relation *f* = *g* ?

2) Opérations algébriques sur les fonctions

Définition 1 : Soient *u* et *v* deux fonctions définies sur l'ensemble *D* et λ désigne un réel. On définit les fonctions suivantes sur l'ensemble *D* :
→ $u+v$ est définie par $(u+v)(x)=u(x)=v(x)$
→ $u\times v$ ou uv est définie par $(uv)(x)=(u\times v)(x)=u(x)\times v(x)$
→ λu est définie par $(\lambda u)(x)=\lambda\times u(x)=\lambda u(x)$
→ $u+\lambda$ est définie par $(u+\lambda)(x)=u(x)+\lambda$

Remarque : Si les deux fonctions *u* et *v* ne sont pas définies sur le même ensemble *D*, mais *u* sur D_u et *v* sur D_v , l'ensemble de définition de chacune des deux premières fonctions $u+v$ et uv est $D_u\cap D_v$.

Application : Les fonctions polynômes

Définition 2 : Soient *n* un entier naturel et *a* un réel. La fonction $x\rightarrow a\,x^n$, définie sur $\mathbb{R}$, est appelée un *monôme* de coefficient *a*. Si $a\neq 0$, on dit que le *degré* de ce monôme est *n*. Un *polynôme* est une somme de plusieurs monômes. Le *degré du polynôme* est le degré le plus élevé de chacun de ses monômes.

Exemple : $6x^5$ est un monôme de degré *5*. $6x^5+3x^4-7x^2-3x+8$ est un polynôme de degré *5*.

Transmaths : Exercices 9 à 16 pages 26 et 27

Définition 3 : Soient *u* et *v* deux fonctions définies respectivement sur D_u et D_v . La *fonction rationnelle* $\frac{u}{v}$ est définie sur $D_u\cap D_v$ avec $v(x)\neq 0$ par $(\frac{u}{v})(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$.

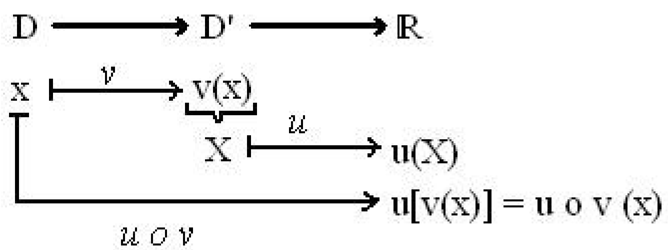
Exemple : Soient u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x^2$ et $v(x)=x-2$. La fonction rationnelle $\frac{u}{v}$ est donc définie sur $\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$ avec $v(x)\neq 0$ donc avec $x\neq 2$. Elle est donc définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par $(\frac{u}{v})(x)=\frac{x^2}{x-2}$.

Transmaths : Exercices 7 et 8 page 26

3) Composition de fonctions

Définition : Soient u et v deux fonctions définies respectivement sur D' et D tels que pour tout réel x de l'ensemble D, le réel $v(x)$ soit dans l'ensemble D'. La *fonction composée* de v suivie de u, notée $u \circ v$, est la fonction définie sur D par $(u \circ v)(x) = u[v(x)]$.

Schéma :



Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{x^2+3}$. La fonction f est la composée de u suivie de v suivie de w où u est la fonction carrée (pour tout réel x, $u(x)=x^2$), v est la fonction affine telle que, pour tout réel x, $v(x)=x+3$ et w la fonction inverse (pour tout réel x non nul, $w(x)=\frac{1}{x}$). $f = w \circ v \circ u$. En effet, $u:\mathbb{R}\rightarrow[0;+\infty[$, $v:[0;+\infty[\rightarrow[3;+\infty[$ et $w:[3;+\infty[\rightarrow\mathbb{R}$.

Transmaths : Exercices 17 à 23 page 27

II Sens de variation

Rappel : On dit qu'une fonction est monotone sur un intervalle I lorsque f est croissante sur cette intervalle I ou que f est décroissante sur I.

Dans cette partie, les démonstrations sont faites avec des fonctions monotones mais sont aussi valables avec des fonctions strictement monotones.

1) Sens de variation de $u+\lambda$

Propriété : Soit u une fonction monotone sur l'intervalle I et λ désigne une constante réelle. Les fonctions u et $u+\lambda$ ont même sens de variation sur I.

Démonstration : Soient x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle I tels que $x_1\leqslant x_2$. Supposons que u soit croissante sur I, alors $u(x_1)\leqslant u(x_2)$. Alors $u(x_1)+\lambda\leqslant u(x_2)+\lambda$, donc la fonction $u+\lambda$ est croissante sur I. On effectue la démonstration analogue pour u décroissante sur I.

2) Sens de variation de la somme de deux fonctions

Propriété : → La somme de deux fonctions strictement croissantes sur un intervalle I est une fonction strictement croissante sur I.

→ La somme de deux fonctions strictement décroissantes sur un intervalle I est une fonction strictement décroissante sur I.

Démonstration : Soient x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle *I* tels que $x_1 < x_2$. Soient deux fonctions *f* et *g* strictement croissantes sur *I*, alors $f(x_1) < f(x_2)$ et $g(x_1) < g(x_2)$. Si on additionne ces deux inégalités, on obtient $f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$, donc *f* + *g* est strictement croissante sur *I*. On effectue la démonstration analogue pour *f* et *g* décroissantes sur *I*.

Exemple 1 : Soit *f* la fonction définie sur tout $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ et *g* la fonction définie sur tout $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x$. *f* et *g* sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$ donc $f + g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $(f + g)(x) = x^3 + 3x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2 : Soit *f* la fonction définie sur tout $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2$ et *g* la fonction définie sur tout $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x$. *f* et *g* sont strictement décroissantes sur $[0 ; +\infty[$ donc $f + g$, définie par $(f + g)(x) = -x^2 - 3x$, est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

3) Sens de variation de λu

Propriété : Soit u une fonction monotone sur l'intervalle *I* et λ désigne une constante réelle.
→ Si $\lambda > 0$, les fonctions *u* et λu ont même sens de variation sur *I*.
→ Si $\lambda < 0$, les fonctions *u* et λu ont un sens de variation contraire sur *I*.

Démonstration : Soient x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle *I* tels que $x_1 \leqslant x_2$. Supposons que *u* soit croissante sur *I*, alors $u(x_1) \leqslant u(x_2)$. Alors $\lambda u(x_1) \lambda \leqslant \lambda u(x_2)$ si $\lambda > 0$ et $\lambda u(x_1) \lambda \leqslant \lambda u(x_2)$ si $\lambda < 0$, donc la fonction λu est croissante sur *I* si $\lambda > 0$ et décroissante sur I si $\lambda < 0$. On effectue la démonstration analogue pour *u* décroissante sur *I*.

Transmaths : Exercices 24 et 26 page 27

4) Sens de variation de u o v

Propriété : Soient *u* et *v* deux fonctions définies respectivement sur D_u et D_v . Soit *I* un intervalle inclus dans D_u et *J* un intervalle inclus dans D_v tel que, pour tout réel $x \in J$, $v(x) \in I$. Si *u* et *v* sont strictement monotones respectivement sur *I* et *J*, alors :
→ lorsque *u* et *v* ont même sens de variation, *u o v* est strictement croissante sur *J*.
→ lorsque *u* et *v* ont un sens de variation contraire, *u o v* est strictement décroissante sur *J*.

Démonstration :
1) *u* et *v* ont même sens de variation et *a* et *b* sont deux réels de l'intervalle *J* tels que *a* < *b*.
   a) Supposons que *u* et *v* soient strictement croissantes sur *I* et *J*. Puisque *v* est strictement croissante sur *J*, $a < b \Rightarrow v(a) < v(b)$ puis *u* strictement croissante sur *I*, on a $u(v(a)) = (u o v)(a) < u(v(b)) = (u o v)(b)$, c'est à dire *u o v* strictement croissante sur *J*.
   b) Supposons que *u* et *v* soient strictement croissantes sur *I* et *J*, on a alors $a < b \Rightarrow v(a) > v(b) \Rightarrow u(v(a)) = (u o v)(a) < u(v(b)) = (u o v)(b)$, c'est à dire *u o v* strictement croissante sur *J*.
2) *u* et *v* ont un sens de variation contraire, alors on démontre de la même façon que *u o v* est strictement décroissante sur *J*.

Exemple : Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -4x$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Alors, la fonction *f o g* définie sur $\mathbb{R}$ par $(f o g)(x) = (-4x)^3$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Transmaths : Exercices 28 et 29 page 27

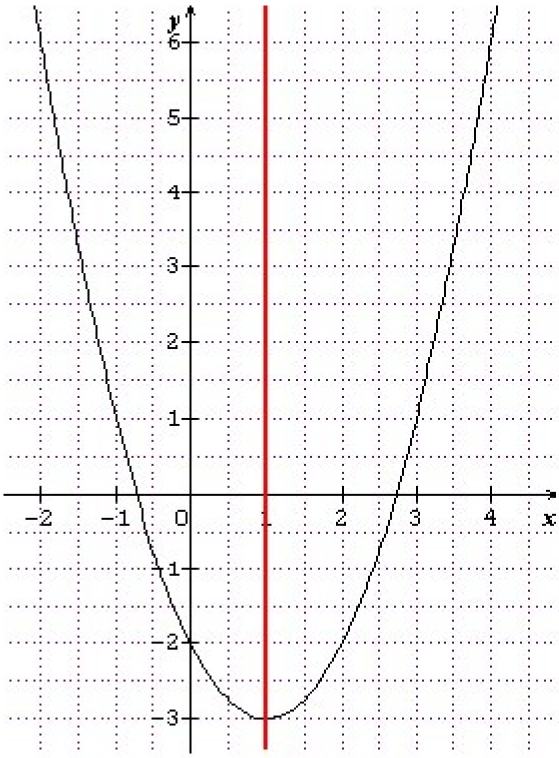
III Symétries d'une représentation graphique

1) Axe de symétrie

Propriété : Soit *C* la représentation graphique de la fonction *f* définie sur D_f . La droite verticale d'équation $x=a$ est un axe de symétrie de *C* si et seulement si, pour tout *x* tel que $a+x\in D_f$, alors $a-x\in D_f$ et $f(a+x)=f(a-x)$.

Exemple : Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-1)^2-3$. La représentation graphique *C* de *f* nous permet de conjecturer d'un axe de symétrie : la droite d'équation $x=1$. Or, pour tout *x* tel que $1+x\in\mathbb{R}$, alors $1-x\in\mathbb{R}$, et on calcule $f(1+x)=(1+x-1)^2-3=x^2-3$, puis on calcule $f(1-x)=(1-x-1)^2-3=x^2-3=f(1+x)$ donc la droite d'équation $x=1$ est bien axe de symétrie de *C*.

Transmaths : Exercices 33 et 35 page 29



2) Centre de symétrie

Propriété : Soit *C* la représentation graphique de la fonction *f* définie sur D_f . Le point S de coordonnées $(a\,;b)$ est le centre de symétrie de *C* si et seulement si, pour tout *x* tel que $a+x\in D_f$, alors $a-x\in D_f$ et $f(a+x)+f(a-x)=2b$.

Exemple : Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ par $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$. La représentation graphique *C* de *f* paraît avoir le point S de coordonnées $(-2\,;1)$ comme centre de symétrie. Pour tout *x* tel que $-2+x\in D_f$, $-2-x\in D_f$ et

$f(-2+x)+f(-2-x)=\frac{-2+x-1}{-2+x+2}+\frac{-2-x-1}{-2-x+2}=\frac{-3+x}{x}+\frac{-3-x}{-x}=\frac{-3+x+3+x}{x}=2\frac{x}{x}=2=2\times 1.$ Donc le point S de coordonnées $(-2\,;1)$ est bien centre de symétrie de la courbe *C*.

Transmaths : Exercices 34 et 36 page 27