

Table des matières

1 Cinétique des systèmes	3
1.1 Mouvement relatif de deux référentiels	3
1.1.1 Dérivation d'un vecteur	3
1.1.2 Composition des vecteurs rotation	5
1.1.3 Composition des vitesses	6
1.1.4 Composition des accélérations	7
1.2 Description d'un système matériel	10
1.2.1 Notion de torseur	10
1.2.2 Centre d'inertie	11
1.3 Torseurs cinétique et dynamique	13
1.3.1 Torseur cinétique	13
1.3.2 Torseur dynamique	14
1.4 Référentiel barycentrique	17
1.4.1 Définition	17
1.4.2 Torseurs cinétique et dynamique	18
1.4.3 Théorèmes de Koenig	19
1.4.4 Réduction canonique	20
2 Cinétique du solide	22
2.1 Champ de vitesse	22
2.1.1 Définitions	22
2.1.2 Glissement d'un solide	23
2.2 Moment d'inertie par rapport à un axe	24
2.2.1 Définition	24
2.2.2 Théorème de Huygens	26
2.3 Rotation d'un solide autour d'un axe	27
2.3.1 Axe fixe dans \mathcal{R}	27
3 Lois de la dynamique	30
3.1 Torseur des contraintes extérieures	30
3.1.1 Définitions	30
3.1.2 Glisseur et couple	31
3.2 Loi des actions réciproques	33
3.3 Théorème de la résultante cinétique	34
3.3.1 Dans un référentiel galiléen	34
3.3.2 Dans un référentiel non galiléen	35
3.4 Théorème du moment cinétique	36
3.4.1 En un point fixe d'un référentiel galiléen	36
3.4.2 En un point fixe d'un référentiel non galiléen	38
3.4.3 Dans le référentiel barycentrique	40
4 Énergie d'un système	42
4.1 Puissance et travail d'un système de forces	42
4.1.1 Définitions	42
4.1.2 Cas du solide	44
4.2 Énergie cinétique	47

4.2.1	Expressions	47
4.2.2	Théorème de l'énergie cinétique	49
4.3	Exemples	49
4.3.1	Pendule pesant	49
4.3.2	Bille dans une gouttière	50
4.3.3	Pendule de torsion	54
4.4	Énergie potentielle	55
4.4.1	Actions extérieures	55
4.4.2	Actions intérieures à un système de points	58
4.4.3	Systèmes en interaction	60
4.4.4	Solides indéformables en interaction	62
4.4.5	Énergie potentielle d'un ressort	64
4.4.6	Interactions à puissance nulle	65
4.5	Énergie mécanique	66
4.5.1	Définition	66
4.5.2	Équilibre d'un système	70
4.5.3	Premier principe de la thermodynamique	73
5	Contact de deux solides	74
5.1	Mouvements relatifs	74
5.2	Les frottements	76
5.2.1	Torseur de contact	76
5.2.2	Lois de Coulomb	76
5.2.3	Aspects énergétiques	81
	Formulaire	83

Mécanique

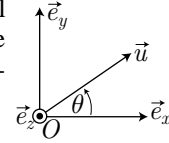
1 Cinétique des systèmes

1.1 Mouvement relatif de deux référentiels

1.1.1 Dérivation d'un vecteur

Soit \mathcal{R} un référentiel d'origine O et de base $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ dans lequel un vecteur unitaire \vec{u} tourne autour de l'axe (O, \vec{e}_z) avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{e}_z$, où $\theta = (\vec{u}, \vec{e}_x)$.

Rappelons que, pour orienter le vecteur $\vec{\Omega}$ associé à un angle θ , il convient de faire tourner les doigts de la main droite dans le sens de l'augmentation de θ , le pouce tendu indiquant alors le sens et la direction de $\vec{\Omega}$.



Dans \mathcal{R} , le vecteur \vec{u} a pour composantes :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \Rightarrow \left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

Remarquons alors que :

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \wedge \vec{u} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \wedge \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \\ &\Rightarrow \boxed{\left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}} \end{aligned} \quad (1)$$

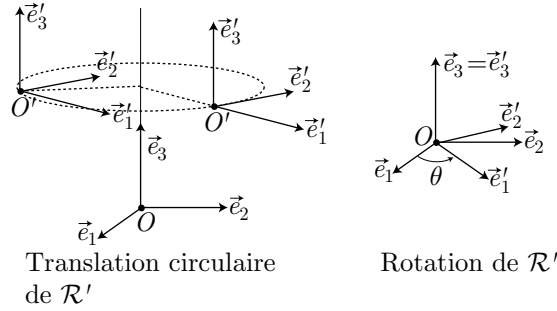
On admettra la généralisation de ce résultat.

Soit $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ un référentiel (que l'on pourra supposer fixe par rapport à nous) et soit $\mathcal{R}' = \{O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ un autre référentiel, éventuellement en mouvement par rapport à \mathcal{R} .

Définition 1. Le référentiel \mathcal{R}' est en rotation par rapport à \mathcal{R} s'il existe un vecteur $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$, appelé **vecteur rotation de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R}** , qui vérifie :

$$\left(\frac{d\vec{e}'_\alpha}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e}'_\alpha \quad \forall \alpha \in \{1, 2, 3\} \quad (2)$$

Attention : Il convient de ne pas confondre **rotation** de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} (il s'agit d'un changement de direction des vecteurs $\{\vec{e}'_\alpha\}$ par rapport aux vecteurs $\{\vec{e}_\alpha\}$) et **translation circulaire** (il s'agit du mouvement circulaire de O' autour de O).



Soit \vec{A} un vecteur qui peut se décomposer sur la base $\{\vec{e}_\alpha\}$ ou sur la base $\{\vec{e}'_\alpha\}$:

$$\vec{A} = \sum_{\alpha=1}^3 A_\alpha \vec{e}_\alpha \text{ et } \vec{A} = \sum_{\alpha=1}^3 A'_\alpha \vec{e}'_\alpha \quad (3)$$

Par définition, dans chacun des référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' , les vecteurs $\{\vec{e}_\alpha\}$ et $\{\vec{e}'_\alpha\}$ sont immobiles :

$$\left(\frac{d\vec{e}_\alpha}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{0} \text{ et } \left(\frac{d\vec{e}'_\alpha}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \vec{0}$$

tandis que la relation (2) traduit la rotation de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} .

Dans le référentiel \mathcal{R}' , compte tenu des définitions (3) :

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{dA'_\alpha}{dt} \vec{e}'_\alpha + \sum_{\alpha=1}^3 A'_\alpha \left(\frac{d\vec{e}'_\alpha}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{dA'_\alpha}{dt} \vec{e}'_\alpha$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= \sum_{\alpha=1}^3 \frac{dA'_\alpha}{dt} \vec{e}'_\alpha + \sum_{\alpha=1}^3 A'_\alpha \left(\frac{d\vec{e}'_\alpha}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \\ &= \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \sum_{\alpha=1}^3 A'_\alpha \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e}'_\alpha \\ &= \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \sum_{\alpha=1}^3 A'_\alpha \vec{e}'_\alpha \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

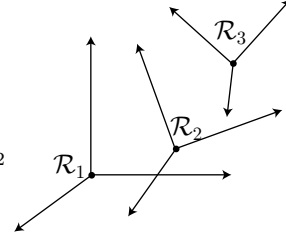
$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{A} \quad (4)$$

1.1.2 Composition des vecteurs rotation

Considérons un référentiel \mathcal{R}_2 , en rotation par rapport à un référentiel \mathcal{R}_1 , avec un vecteur rotation $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}$ et soit \mathcal{R}_3 un troisième référentiel caractérisé par :

- son vecteur rotation $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_1}$ par rapport à \mathcal{R}_1 ;
- son vecteur rotation $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2}$ par rapport à \mathcal{R}_2 .

La variation d'un vecteur \vec{A} peut être suivie dans \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 et \mathcal{R}_3 conformément à la loi de Varignon (4) :



$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} &= \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{A} \\ \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_2} &= \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_3} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2} \wedge \vec{A} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_3} + (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}) \wedge \vec{A}$$

tandis que la loi :

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_3} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{A}$$

suffit à montrer que :

$$\boxed{\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_1} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} \quad (5)$$

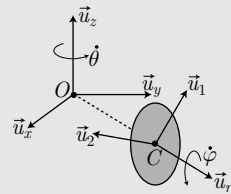
EXEMPLE 1

Par exemple, considérons un disque \mathcal{D} de centre C , qui tourne autour de son axe (C, \vec{u}_r) , avec la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$. Notons $\mathcal{R}_3 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_r\}$ le référentiel attaché à \mathcal{D} . Soit, en outre, un référentiel $\mathcal{R}_2 = \{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z\}$ en rotation dans $\mathcal{R}_1 = \{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$ avec la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. En notant :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2} = \dot{\varphi} \vec{u}_r \text{ et } \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} = \dot{\theta} \vec{u}_z$$

les vecteurs rotation de \mathcal{R}_3 par rapport à \mathcal{R}_2 et de \mathcal{R}_2 par rapport à \mathcal{R}_1 , le vecteur rotation de \mathcal{R}_3 par rapport à \mathcal{R}_1 vaut alors :

$$\boxed{\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_1} = \dot{\varphi} \vec{u}_r + \dot{\theta} \vec{u}_z}$$



EXEMPLE 2

Considérons maintenant deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' tels que $\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}'$. La loi (5) s'écrit :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$$

où $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}} = \vec{0}$ (un référentiel ne tourne pas par rapport à lui même). C'est pourquoi :

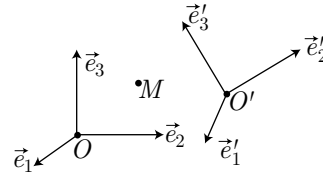
$$\boxed{\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = -\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'}}$$

1.1.3 Composition des vitesses

Soit $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ un référentiel, supposé fixe et soit $\mathcal{R}' = \{O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ un autre référentiel en mouvement par rapport à \mathcal{R} .

La vitesse de M dans \mathcal{R} ou de M dans \mathcal{R}' vaut :

$$\boxed{\vec{v}_{M/\mathcal{R}} \hat{=} \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \text{ et } \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} \hat{=} \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}}$$



D'après ces définitions, le point O' se déplace dans \mathcal{R} avec un vecteur vitesse :

$$\vec{v}_{O'/\mathcal{R}} \hat{=} \left(\frac{d\vec{OO'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$$

On peut ainsi poser :

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= \vec{OO'} + \vec{O'M} \Rightarrow \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{OO'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \\ \Rightarrow \vec{v}_{M/\mathcal{R}} &= \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

où la loi (4) fournit :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{O'M} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{O'M} \\ \Rightarrow \vec{v}_{M/\mathcal{R}} &= \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{O'M} + \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} \end{aligned} \quad (6)$$

Dans un référentiel \mathcal{R}' , un point mobile peut se déplacer en laissant des traces M_i à diverses dates t_i . On appelle **points coïncidents** ces points, immobiles dans \mathcal{R}' .

Définition 2. La vitesse d'entraînement $\vec{v}_e(M)$ d'un point M désigne la vitesse $\vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}$ de son point coïncident M_i , dans le référentiel \mathcal{R} .

D'après cette définition et la loi (6) :

$$\begin{aligned}\vec{v}_e(M) \hat{=} \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} &= \vec{v}_{O/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M_i} \text{ car } \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}'} = \vec{0} \\ &= \vec{v}_{O/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} \text{ car } M = M_i \text{ à } t = t_i\end{aligned}$$

C'est pourquoi la loi de **composition des vitesses** (6) s'écrit aussi :

$$\boxed{\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{v}_e(M) / \vec{v}_e(M) \hat{=} \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}} \quad (7)$$

1.1.4 Composition des accélérations

Reprenons les notations précédentes.

Définition 3. L'accélération de M dans \mathcal{R} ou de \mathcal{M} dans \mathcal{R}' vaut :

$$\boxed{\vec{a}_{M/\mathcal{R}} \hat{=} \left(\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \text{ et } \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} \hat{=} \left(\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}}$$

tandis que l'accélération de O' dans \mathcal{R} vaut :

$$\vec{a}_{O'/\mathcal{R}} \hat{=} \left(\frac{d\vec{v}_{O'/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$$

La loi de composition des vitesses (7) :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

conduit à :

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= \left(\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{d\vec{v}_{O'/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \\ &\quad + \left(\frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}\end{aligned} \quad (8)$$

où la loi (4) permet de poser :

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= \left(\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} \\ &= \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}\end{aligned}$$

et :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

La relation (8) devient alors :

$$\begin{aligned}
 \vec{a}_{M/\mathcal{R}} &= \left(a_{M/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} \right) + \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \left(\frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} \\
 &\quad + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} \right) \\
 &= \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \left(\frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} \\
 &\quad + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} \right) + 2 \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} \quad (9)
 \end{aligned}$$

Définition 4. On appelle **accélération de Coriolis** de M dans le référentiel \mathcal{R}' la grandeur :

$$\vec{a}_c(M) \triangleq 2 \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} \quad (10)$$

Définition 5. On appelle **accélération d'entraînement** de M l'accélération de son point coïncident, dans le référentiel \mathcal{R} .

Notons ainsi M_i le point coïncident de M à une date t_i :

$$\vec{a}_e(M) \triangleq \vec{a}_{M_i/\mathcal{R}}$$

où l'on rappelle que M_i est immobile dans \mathcal{R}' :

$$\vec{v}_{M_i/\mathcal{R}'} = \vec{0} \quad \vec{a}_{M_i/\mathcal{R}'} = \vec{0} \quad M_i = M$$

La relation (9) devient alors :

$$\vec{a}_{M_i/\mathcal{R}} = \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \left(\frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M_i} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M_i} \right)$$

soit encore :

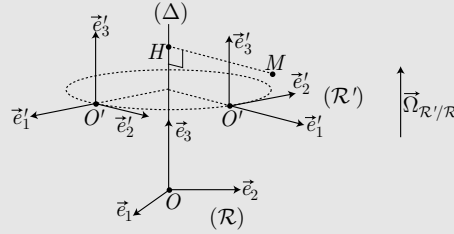
$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \left(\frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} \right)$$

Associée à la définition (10), cette relation permet de présenter la loi de composition des accélérations (9) sous la forme :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M) \quad (11)$$

CAS PARTICULIER 1

Déterminons l'accélération d'entraînement d'un point M dans un référentiel \mathcal{R}' tournant autour d'un axe $\Delta = (O, \vec{e}_z)$, à vitesse constante.



Le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ du référentiel $\mathcal{R}' = \{O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ sera supposée égal à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}_{O'/\mathcal{R}}$ de rotation de O' autour de Δ : $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{O'/\mathcal{R}} = \text{cte}$. Or, si \vec{u} désigne un vecteur unitaire de $\overrightarrow{OO'}$, la rotation de O' autour de Δ se traduit par :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OO'} = OO' \vec{u} &\Rightarrow \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} \hat{=} \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = OO' \left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \text{ car } OO' = \text{cte} \\ &\Rightarrow \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} = OO' \vec{\Omega}_{O'/\mathcal{R}} \wedge \vec{u} = \vec{\Omega}_{O'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OO'} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} &\hat{=} \left(\frac{d\vec{v}_{O'/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{O'/\mathcal{R}} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \text{ car } \left(\frac{d\vec{\Omega}_{O'/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{0} \\ &= \vec{\Omega}_{O'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{O'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\Omega}_{O'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OO'}) \end{aligned}$$

Ce faisant, l'accélération d'entraînement de M dans \mathcal{R} vaut :

$$\begin{aligned} \vec{a}_e(M) &= \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}) \\ &= \vec{\Omega}_{O'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\Omega}_{O'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OO'}) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}) \end{aligned}$$

c'est-à-dire, puisque $\vec{\Omega}_{O'/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$:

$$\vec{a}_e(M) = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM})$$

Notons alors H le projeté orthogonal de M sur Δ (avec $\Delta \parallel \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$), de sorte que :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM} = \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OH}}_{=\vec{0}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{HM}$$

il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \vec{a}_e(M) &= \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{HM}) \\ &= \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \cdot \overrightarrow{HM})}_{=0} - \Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}^2 \overrightarrow{HM} \\ &\Rightarrow \boxed{\vec{a}_e(M) = -\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}^2 \overrightarrow{HM}} \end{aligned}$$

CAS PARTICULIER 2

Considérons maintenant le cas particulier où O' est confondu avec O , $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}$, l'axe de rotation de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} étant confondu avec le vecteur \vec{e}_3 de la base \mathcal{R} .

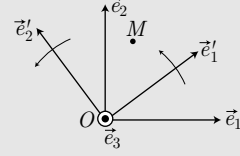
Typiquement, cette situation se rencontre lorsque le référentiel $\mathcal{R}' = \{O, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ est attaché à une tige tournant autour de (O, \vec{e}_3) .

Dans ces conditions, l'accélération d'entraînement d'un point M du plan $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, dans \mathcal{R} , vaut :

$$\begin{aligned}\vec{a}_e(M) &= \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{OM}) \text{ car } \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} = \vec{0} \\ &= \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \cdot \vec{OM}) - \Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}^2 \vec{OM}\end{aligned}$$

où :

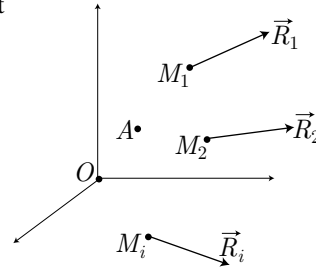
$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \parallel \vec{e}_3 \Rightarrow \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \cdot \vec{OM} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{a}_e(M) = -\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}^2 \vec{OM}}$$

**1.2 Description d'un système matériel****1.2.1 Notion de torseur**

Soit \mathcal{S} un système de points $\{M_1, \dots, M_n\}$ où est défini un champ de vecteurs $\vec{R}_i \hat{=} \vec{R}(M_i)$ et soit A un point de l'espace.

Définition 6. La **résultante** du champ de vecteurs vaut :

$$\boxed{\vec{R} \hat{=} \sum_{i=1}^n \vec{R}_i}$$



Définition 7. Le **moment en A** du champ de vecteur est défini par :

$$\boxed{\vec{M}_A \hat{=} \sum_{i=1}^n \vec{AM}_i \wedge \vec{R}_i}$$

Définition 8. On appelle **torseur** $[R]_A$ l'objet mathématique composé de la résultante du champ vectoriel et de son moment en A ; \vec{R} et \vec{M}_A sont appelés **éléments de réduction** du torseur :

$$\boxed{[R]_A \hat{=} \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}}$$

Étudions quelques propriétés des torseurs :

– **Changement de point**

Soit B un point de l'espace tel que :

$$\begin{aligned}\vec{M}_A &= \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{R}_i = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_i + \sum_{i=1}^n \overrightarrow{BM_i} \wedge \vec{R}_i \\ \Rightarrow \boxed{\vec{M}_A = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R} + \vec{M}_B}\end{aligned}\quad (12)$$

– **Association de deux systèmes**

Soit (\mathcal{S}_1) un système de points $\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ et (\mathcal{S}_2) un autre système de points $\{M_{n+1}, \dots, M_N\}$ à partir desquels sont définis les torseurs :

$$[R]_{A(\mathcal{S}_1)} \hat{=} \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(\mathcal{S}_1)} = \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \\ \vec{M}_{A(\mathcal{S}_1)} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{R}_i \end{array} \right\}$$

et :

$$[R]_{A(\mathcal{S}_2)} \hat{=} \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(\mathcal{S}_2)} = \sum_{i=n+1}^N \vec{R}_i \\ \vec{M}_{A(\mathcal{S}_2)} = \sum_{i=n+1}^N \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{R}_i \end{array} \right\}$$

Considérons maintenant le système $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ composé de la réunion des deux précédents. Les éléments de réduction du torseur $[R]_{A(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)}$ s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}\vec{R}_{(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)} &= \sum_{i=1}^N \vec{R}_i = \sum_{i=1}^n \vec{R}_i + \sum_{i=n+1}^N \vec{R}_i \\ \Rightarrow \vec{R}_{(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)} &= \vec{R}_{(\mathcal{S}_1)} + \vec{R}_{(\mathcal{S}_2)}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\vec{M}_{A(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)} &\hat{=} \sum_{i=1}^N \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{R}_i = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{R}_i + \sum_{i=n+1}^N \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{R}_i \\ \Rightarrow \vec{M}_{A(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)} &= \vec{M}_{A(\mathcal{S}_1)} + \vec{M}_{A(\mathcal{S}_2)}\end{aligned}$$

Ces deux lois se résument alors dans l'identité suivante :

$$\boxed{[R]_{A(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)} = [R]_{A(\mathcal{S}_1)} + [R]_{A(\mathcal{S}_2)}}$$

1.2.2 Centre d'inertie

Considérons un système de points $\mathcal{S} = \{M_1, \dots, M_n\}$, caractérisés par leurs masses respectives $\{m_i\}$ et repérés par leurs vecteurs positions $\overrightarrow{OM_i}$ depuis une origine O .

Définition 9. Le centre d'inertie G de \mathcal{S} est le barycentre des points de \mathcal{S} , pondérés de leurs masses m_i :

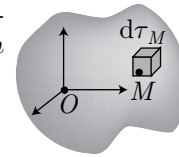
$$\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

De cette définition découle la localisation de G :

$$\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GO} + \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OM_i} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OM_i} \quad (13)$$

Dans la pratique, il est souvent impossible de distinguer chaque point M_i d'un système (\mathcal{S}) . Cependant, on peut décomposer (\mathcal{S}) en éléments de volume $d\tau_M$ centrés sur des points M , dont la masse δm est liée à $d\tau_M$ par la masse volumique de (\mathcal{S}) en M :

$$\delta m = \mu(M) d\tau_M$$



La relation (13) admet alors une généralisation aux systèmes continus de points :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \iiint_{(\mathcal{S})} \delta m \overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \iiint_{(\mathcal{S})} \mu(M) \overrightarrow{OM} d\tau_M \quad (14)$$

EXEMPLE

Déterminons la position du centre d'inertie d'un cône homogène (\mathcal{C}) , de masse volumique μ , de hauteur h , de base circulaire de rayon R et d'axe (Oz) .

À une altitude z , l'intersection du cône avec un plan horizontal est un cercle de rayon $\rho(z)$:

$$\rho = \rho(z) = a \times z + b$$

avec :

$$\begin{cases} \rho(z=0) = R \\ \rho(z=h) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = R \\ 0 = ah + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = R \\ a = -\frac{R}{h} \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\rho = -\frac{Rz}{h} + R \quad (15)$$

– Calcul du volume V du cône

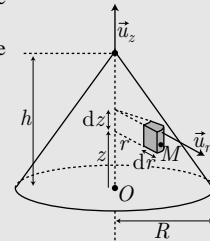
En coordonnées cylindriques, un volume élémentaire s'écrit $d\tau_M = r dr d\theta dz$, où r , z et θ sont les coordonnées du point M . Ainsi :

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{(\mathcal{C})} d\tau_M = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h \int_{r=0}^{\rho} r dr d\theta dz \\ &= 2\pi \int_{z=0}^h dz \int_{r=0}^{\rho} r dr = 2\pi \int_{z=0}^h \frac{\rho^2}{2} dz \end{aligned}$$

où :

$$\rho = -\frac{Rz}{h} + R \Rightarrow dz = -\frac{h}{R} d\rho$$

permet d'effectuer le changement de variable :



$$V = \pi \int_R^0 -\frac{h}{R} \rho^2 d\rho = \frac{\pi h}{R} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^R \Rightarrow V = \frac{\pi R^2 h}{3} \quad (16)$$

– Calcul de la cote z_G de G

La symétrie du cône par rapport à l'axe (Oz) permet de localiser G sur l'axe (Oz) , c'est-à-dire impose :

$$\overrightarrow{OG} = z_G \vec{u}_z \Rightarrow z_G = \vec{u}_z \cdot \overrightarrow{OG}$$

Calculons alors z_G à l'aide de la relation (14) :

$$z_G = \frac{1}{m} \iiint_{(S)} \mu \overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}_z d\tau_M$$

où :

$$\overrightarrow{OM} = z \vec{u}_z + r \vec{u}_r \Rightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}_z = z$$

et $\mu = \frac{m}{V}$ permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{1}{V} \iiint_{(S)} z d\tau_M = \frac{1}{V} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h \int_{r=0}^{\rho} z dz r dr d\theta \\ &= \frac{2\pi}{V} \int_{z=0}^h z dz \int_{r=0}^{\rho} r dr = \frac{2\pi}{V} \int_{z=0}^h z dz \frac{\rho^2}{2} \end{aligned}$$

La relation (15) fournit alors :

$$\rho = \frac{R}{h} (h - z) \Rightarrow z_G = \frac{\pi R^2}{V h^2} \int_{z=0}^h z (h - z)^2 dz$$

tandis que l'expression (16) de V conduit à :

$$\frac{\pi R^2}{V h^2} = \frac{\pi R^2}{h^2} \times \frac{3}{\pi R^2 h} = \frac{3}{h^3}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{3}{h^3} \int_0^h (h^2 z - 2h z^2 + z^3) dz = \frac{3}{h^3} \left[h^2 \frac{z^2}{2} - 2h \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} \right]_0^h \\ &= 3zh \times \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) \Rightarrow \boxed{z_G = \frac{h}{4}} \end{aligned}$$

1.3 Torseurs cinétique et dynamique

1.3.1 Torseur cinétique

Définition 10. Le torseur cinétique d'un système (S) de points

$\{M_1, \dots, M_n\} : [P/\mathcal{R}]_A \hat{=} \left\{ \begin{array}{c} \vec{P}/\mathcal{R} \\ \vec{L}_{A/\mathcal{R}} \end{array} \right\}$ a pour éléments de réduction :

– la **résultante cinétique** de (S) :

$$\boxed{\vec{P}/\mathcal{R} \hat{=} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}}$$

– le **moment cinétique** de (S) en A :

$$\vec{L}_{A/\mathcal{R}} \hat{=} \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}$$

Propriété 1. L'identité (13) conduit à :

$$\begin{aligned} m \overrightarrow{OG} &= \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OM_i} \Rightarrow m \vec{v}_{G/\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} / \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} \hat{=} \left(\frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \\ &\Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_{/\mathcal{R}} = m \vec{v}_{G/\mathcal{R}}} \end{aligned}$$

ce qui montre que la résultante cinétique de (S) s'identifie à la **quantité de mouvement** de son centre d'inertie G , affecté de la masse totale m de (S) .

Propriété 2. Pour le torseur cinétique $\left\{ \begin{array}{c} \vec{P}_{/\mathcal{R}} \\ \vec{L}_{A/\mathcal{R}} \end{array} \right\}$, la loi (12) de changement de point s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{L}_{A/\mathcal{R}} &= \vec{L}_{B/\mathcal{R}} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{P}_{/\mathcal{R}} / \vec{P}_{/\mathcal{R}} = m \vec{v}_{G/\mathcal{R}} \\ &\Rightarrow \boxed{\vec{L}_{A/\mathcal{R}} = \vec{L}_{B/\mathcal{R}} + \overrightarrow{AB} \wedge m \vec{v}_{G/\mathcal{R}}} \end{aligned} \quad (17)$$

Définition 11. Soit Δ un axe passant par A et de vecteur unitaire directeur \vec{u}_{Δ} . Le moment cinétique de (S) par rapport à Δ est la projection du moment cinétique $\vec{L}_{A/\mathcal{R}}$ sur Δ :

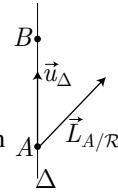
$$\boxed{L_{\Delta} \hat{=} \vec{L}_{A/\mathcal{R}} \cdot \vec{u}_{\Delta}}$$

Soit B un point de Δ . La relation (17) montre que :

$$\vec{L}_{A/\mathcal{R}} \cdot \vec{u}_{\Delta} = \vec{L}_{B/\mathcal{R}} \cdot \vec{u}_{\Delta} + (\overrightarrow{AB} \wedge m \vec{v}_{G/\mathcal{R}}) \cdot \vec{u}_{\Delta}$$

où $(\overrightarrow{AB} \wedge m \vec{v}_{G/\mathcal{R}}) \cdot \vec{u}_{\Delta} = 0$ car $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{u}_{\Delta}$, ce qui montre que la définition de L_{Δ} ne dépend pas du point de Δ choisi :

$$\boxed{\forall (A, B) \in \Delta, L_{\Delta} \hat{=} \vec{L}_{A/\mathcal{R}} \cdot \vec{u}_{\Delta} = \vec{L}_{B/\mathcal{R}} \cdot \vec{u}_{\Delta}}$$



1.3.2 Torseur dynamique

Définition 12. Le **torseur dynamique** d'un système (S) de points $\{M_1, \dots, M_n\}$:

$$\boxed{[S/\mathcal{R}]_A \hat{=} \left\{ \begin{array}{c} \vec{S}_{/\mathcal{R}} \\ \vec{\Gamma}_{A/\mathcal{R}} \end{array} \right\}}$$

a pour éléments de réduction :

- la **résultante dynamique**, qui s'exprime en fonction de l'accélération $\vec{a}_{M_i/\mathcal{R}}$ des points M_i , dans le référentiel \mathcal{R} :

$$\vec{S}_{\mathcal{R}} \triangleq \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_{M_i/\mathcal{R}}$$

- le **moment dynamique** de (\mathcal{S}) en A :

$$\vec{\Gamma}_{A/\mathcal{R}} \triangleq \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{a}_{M_i/\mathcal{R}}$$

Propriété 1. La définition de la résultante cinétique entraîne que :

$$\begin{aligned} \vec{P}_{/\mathcal{R}} &\triangleq \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} \Rightarrow \left(\frac{d\vec{P}_{/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{d\vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \\ &\Rightarrow \left(\frac{d\vec{P}_{/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_{M_i/\mathcal{R}} \Rightarrow \left(\frac{d\vec{P}_{/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{S}_{/\mathcal{R}} \end{aligned} \quad (18)$$

avec, si m est constant :

$$\vec{P}_{/\mathcal{R}} = m \vec{v}_{G/\mathcal{R}} \Rightarrow \left(\frac{d\vec{P}_{/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = m \left(\frac{d\vec{v}_{G/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \Rightarrow \vec{S}_{/\mathcal{R}} = m \vec{a}_{G/\mathcal{R}}$$

Propriété 2. La loi (12) de changement de point, appliquée au torseur $\left\{ \begin{array}{c} \vec{S}_{/\mathcal{R}} \\ \vec{\Gamma}_{A/\mathcal{R}} \end{array} \right\}$ conduit à :

$$\vec{\Gamma}_{A/\mathcal{R}} = \vec{\Gamma}_{B/\mathcal{R}} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{S}_{/\mathcal{R}} = \vec{\Gamma}_{B/\mathcal{R}} + \overrightarrow{AB} \wedge m \vec{a}_{G/\mathcal{R}} \quad (19)$$

Définition 13. Soit Δ un axe passant par A et de vecteur unitaire directeur \vec{u}_{Δ} . Le moment dynamique de (\mathcal{S}) par rapport à Δ est défini par :

$$\Gamma_{\Delta} \triangleq \vec{\Gamma}_{A/\mathcal{R}} \cdot \vec{u}_{\Delta}$$

Soient A et B deux points de Δ . La relation (19) conduit à :

$$\vec{\Gamma}_{A/\mathcal{R}} \cdot \vec{u}_{\Delta} = \vec{\Gamma}_{B/\mathcal{R}} \cdot \vec{u}_{\Delta} + (\overrightarrow{AB} \wedge \vec{S}_{/\mathcal{R}}) \cdot \vec{u}_{\Delta}$$

où :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \parallel \vec{u}_{\Delta} &\Rightarrow (\overrightarrow{AB} \wedge \vec{S}_{/\mathcal{R}}) \cdot \vec{u}_{\Delta} = 0 \\ &\Rightarrow \forall (A, B) \in \Delta, \Gamma_{\Delta} \triangleq \vec{\Gamma}_{A/\mathcal{R}} \cdot \vec{u}_{\Delta} = \vec{\Gamma}_{B/\mathcal{R}} \cdot \vec{u}_{\Delta} \end{aligned}$$

Cette relation montre que Γ_{Δ} ne dépend pas du point de Δ à partir duquel est calculé le moment dynamique de (\mathcal{S}) .

Propriété 3. La définition du moment cinétique de (S) en A fournit :

$$\begin{aligned}\vec{L}_{A/\mathcal{R}} &= \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} \\ \Rightarrow \left(\frac{d\vec{L}_{A/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{d\overrightarrow{AM_i}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \wedge m_i \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \left(\frac{d\vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}\end{aligned}\quad (20)$$

où $\vec{a}_{M_i/\mathcal{R}} \hat{=} \left(\frac{d\vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$ et :

$$\overrightarrow{AM_i} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM_i} \Rightarrow \left(\frac{d\overrightarrow{AM_i}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{AO}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \quad (21)$$

Si le point A est immobile dans le référentiel (\mathcal{R}) , cette relation s'écrit plus simplement :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{AM_i}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} \Rightarrow \left(\frac{d\overrightarrow{AM_i}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \wedge m_i \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} = \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} \wedge m_i \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} = \vec{0}$$

Finalement, l'identité (20) devient :

$$\left(\frac{d\vec{L}_{A/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{a}_{M_i/\mathcal{R}} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{d\vec{L}_{A/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{\Gamma}_{A/\mathcal{R}}} \quad (22)$$

Avec la relation (18), on obtient alors le couple d'identités :

$$\vec{S}_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{P}_{/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \text{ et } \vec{\Gamma}_{A/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{L}_{A/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$$

que l'on peut résumer à l'aide des torseurs associés :

$$\boxed{[S_{/\mathcal{R}}]_A = \frac{d[P_{/\mathcal{R}}]_A}{dt} \text{ si } \vec{v}_{A/\mathcal{R}} = \vec{0}} \quad (23)$$

Remarque : Si le point A est immobile dans \mathcal{R} , sa vitesse :

$$\vec{v}_{A/\mathcal{R}} \hat{=} \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$$

donne à la relation (21) la forme :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{AM_i}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = -\vec{v}_{A/\mathcal{R}} + \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}$$

d'où il découle que :

$$\left(\frac{d\vec{AM}_i}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \wedge m_i \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} = (-\vec{v}_{A/\mathcal{R}} + \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}) \wedge m_i \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} = -\vec{v}_A \wedge m_i \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}$$

de sorte que la relation (20) adopte la forme :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{L}_{A/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= \sum_{i=1}^n (-\vec{v}_{A/\mathcal{R}} \wedge m_i \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}) + \sum_{i=1}^n \vec{AM}_i \wedge m_i \vec{a}_{M_i/\mathcal{R}} \\ &= -\vec{v}_{A/\mathcal{R}} \wedge \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} + \sum_{i=1}^n \vec{AM}_i \wedge m_i \vec{a}_{M_i/\mathcal{R}} \end{aligned}$$

La loi (22) doit alors être remplacée par :

$$\frac{d\vec{L}_{A/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{\Gamma}_{A/\mathcal{R}} - \vec{v}_{A/\mathcal{R}} \wedge \vec{P}_{\mathcal{R}} \text{ si } \vec{v}_{A/\mathcal{R}} \neq \vec{0} \Rightarrow \boxed{\frac{d[\mathcal{P}/\mathcal{R}]_A}{dt} \neq [S/\mathcal{R}]_A} \quad (24)$$

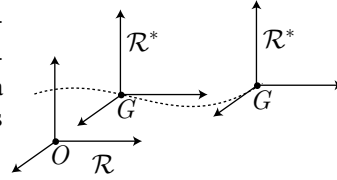
1.4 Référentiel barycentrique

1.4.1 Définition

Définition 14. Soit G le centre de masse d'un système $\mathcal{S} = \{M_1, \dots, M_n\}$ de points, de masses m_i et soit \mathcal{R} un référentiel galiléen. Le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* de \mathcal{S} est le référentiel de centre G , en translation dans \mathcal{R} .

Désormais, les grandeurs mesurées dans \mathcal{R}^* seront repérées par un astérisque. Notamment $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}}$ qui désigne le vecteur rotation de \mathcal{R}^* par rapport à \mathcal{R} , \vec{v}_G^* la vitesse de G dans \mathcal{R}^* et \vec{a}_G^* l'accélération de G dans \mathcal{R}^* . D'après la définition de \mathcal{R}^* :

$$\boxed{\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} \hat{=} \vec{0} \quad \vec{v}_G^* = \vec{0} \quad \vec{a}_G^* = \vec{0}}$$



Remarque : Le référentiel barycentrique n'est pas nécessairement galiléen car $\vec{v}_{G/\mathcal{R}}$ peut ne pas être un vecteur constant.

Soit M un point de l'espace. La loi de composition des vitesses impose :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_M^* + \vec{v}_e(M)$$

où la vitesse d'entraînement de M dans \mathcal{R} est définie par :

$$\vec{v}_e(M) = \vec{v}_{G/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} \wedge \vec{GM} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_e(M) = \vec{v}_{G/\mathcal{R}}}$$

Il s'ensuit que :

$$\boxed{\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_M^* + \vec{v}_{G/\mathcal{R}}} \quad (25)$$

De même, la loi de composition des accélérations :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_M^* + \vec{a}_c(M) + \vec{a}_e(M) \quad (26)$$

fait intervenir :

- l'accélération de Coriolis de M dans \mathcal{R} :

$$\vec{a}_c(M) = 2 \vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_M^* \Rightarrow \boxed{\vec{a}_c(M) = \vec{0}}$$

- l'accélération d'entraînement de M dans \mathcal{R} :

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}_{G/\mathcal{R}} + \left(\frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}}}{dt} \right) \wedge \overrightarrow{GM} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{GM})$$

où :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_e(M) = \vec{a}_{G/\mathcal{R}}} \quad (27)$$

La loi (26) devient alors :

$$\boxed{\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_M^* + \vec{a}_{G/\mathcal{R}}} \quad (28)$$

1.4.2 Torseurs cinétique et dynamique

Dans le référentiel barycentrique, ces torseurs :

$$[P^*]_A \hat{=} \left\{ \begin{array}{c} \vec{P}^* \\ \vec{L}_A^* \end{array} \right\} \text{ et } [S^*]_A \hat{=} \left\{ \begin{array}{c} \vec{S}^* \\ \vec{\Gamma}_A^* \end{array} \right\}$$

ont pour éléments de réduction :

- la **résultante cinétique** :

$$\boxed{\vec{P}^* \hat{=} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{M_i}^* = m \vec{v}_G^* \Rightarrow \vec{P}^* = \vec{0}}$$

- le **moment cinétique en un point A** :

$$\boxed{\vec{L}_A^* \hat{=} \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{v}_{M_i}^*}$$

La loi (12) de changement de point (page 11) fournit :

$$\vec{L}_A^* = \vec{L}_B^* + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{P}^* \text{ avec } \vec{P}^* = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_A^* = \vec{L}_B^*$$

ce qui montre que le moment cinétique ne dépend pas du point par rapport auquel il est évalué. Dans la pratique, on le calcule souvent en G :

$$\boxed{\vec{L}_A^* = \vec{L}^* = \vec{L}_G^*}$$

- la **résultante dynamique** :

$$\vec{S}^* \triangleq \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_{M_i}^* = m \frac{d\vec{v}_G^*}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{S}^* = \vec{0}}$$

- le **moment dynamique** :

$$\boxed{\vec{\Gamma}_A^* \triangleq \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{a}_{M_i}^*}$$

Comme précédemment, la loi de changement de point conduit à :

$$\vec{\Gamma}_A^* = \vec{\Gamma}_B^* + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{S}^* \Rightarrow \vec{\Gamma}_A^* = \vec{\Gamma}_B^* \text{ car } \vec{S}^* = \vec{0} \quad (29)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\Gamma}_A^* = \vec{\Gamma}^* = \vec{\Gamma}_G^*} \quad (30)$$

1.4.3 Théorèmes de Koenig

- Le moment cinétique de (S) en A , dans le référentiel \mathcal{R} , est défini par :

$$\vec{L}_{A/\mathcal{R}} \triangleq \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}$$

où la loi (25) de composition des vitesses fournit :

$$\begin{aligned} \vec{L}_{A/\mathcal{R}} &= \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i (\vec{v}_{G/\mathcal{R}} + \vec{v}_{M_i}^*) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{AM_i} \right) \wedge \vec{v}_{G/\mathcal{R}} + \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{v}_{M_i}^* \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{AM_i} &= \sum_{i=1}^n m_i (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM_i}) \\ &= m \overrightarrow{AG} + \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GM_i}}_{=\vec{0}} \end{aligned}$$

On obtient ainsi le théorème de Koenig relatif au moment cinétique :

$$\boxed{\vec{L}_{A/\mathcal{R}} = \overrightarrow{AG} \wedge m \vec{v}_{G/\mathcal{R}} + \vec{L}_A^*}$$

Dans la pratique, le moment cinétique de (S) est souvent calculé en un point O , origine de \mathcal{R} :

$$\boxed{\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OG} \wedge m \vec{v}_{G/\mathcal{R}} + \vec{L}_G^*}$$

- Dans les référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}^* , les énergies cinétiques sont respectivement définies par :

$$\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} \hat{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_{M_i/\mathcal{R}}^2 \text{ et } \mathcal{E}_c^* \hat{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_{M_i}^{*2}$$

où la loi (25) : $\vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} = \vec{v}_{M_i}^* + \vec{v}_{G/\mathcal{R}}$ fournit :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\vec{v}_{M_i}^* + \vec{v}_{G/\mathcal{R}})^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_{M_i}^{*2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_{G/\mathcal{R}}^2 + \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{M_i}^* \cdot \vec{v}_{G/\mathcal{R}} \\ &= \mathcal{E}_c^* + \frac{1}{2} m v_{G/\mathcal{R}}^2 + \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{M_i}^* \right) \cdot \vec{v}_{G/\mathcal{R}} \end{aligned}$$

Ainsi $\vec{P}^* = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{M_i}^* = \vec{0}$ permet d'exprimer le théorème de Koenig relatif à l'énergie cinétique :

$$\boxed{\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_c^* + \frac{1}{2} m v_{G/\mathcal{R}}^2} \quad (31)$$

1.4.4 Réduction canonique

Soient deux points M_1, M_2 , de masses respectives m_1 et m_2 , dont les vitesses dans le référentiel barycentrique valent :

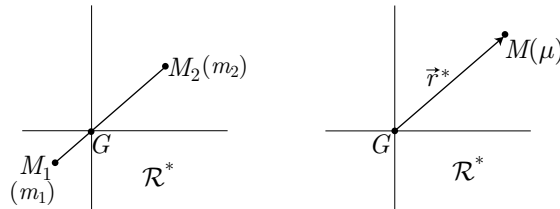
$$\vec{v}_{M_1}^* \hat{=} \left(\frac{d\vec{GM}_1}{dt} \right)_{\mathcal{R}^*} \text{ et } \vec{v}_{M_2}^* \hat{=} \left(\frac{d\vec{GM}_2}{dt} \right)_{\mathcal{R}^*}$$

Définition 15. On appelle **particule fictive** un point M du référentiel barycentrique de **masse réduite** μ :

$$\mu \hat{=} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

et dont la position est repérée, dans le référentiel barycentrique, par le vecteur :

$$\vec{r}^* \hat{=} \vec{GM} = \vec{M_1 M_2}$$



La vitesse de la particule fictive, dans \mathcal{R}^* , vaut :

$$\vec{v}_M^* \hat{=} \left(\frac{d\vec{r}^*}{dt} \right)_{\mathcal{R}^*}$$

Quant à la définition de G :

$$m_1 \overrightarrow{GM}_1 + m_2 \overrightarrow{GM}_2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{GM}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \overrightarrow{GM}_2$$

Elle conduit à :

$$\begin{aligned} \vec{r}^* &= \overrightarrow{M_1 G} + \overrightarrow{GM}_2 = \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \overrightarrow{GM}_2 \\ &= m_2 \times \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \overrightarrow{GM}_2 = \frac{m_2}{\mu} \overrightarrow{GM}_2 \end{aligned}$$

ce qui permet de poser :

$$\mu \vec{r}^* = m_2 \overrightarrow{GM}_2 = -m_1 \overrightarrow{GM}_1$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \overrightarrow{GM}_1 = -\frac{\mu}{m_1} \vec{r}^* \\ \overrightarrow{GM}_2 = \frac{\mu}{m_2} \vec{r}^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_{M_1}^* = -\frac{\mu}{m_1} \vec{v}_M^* \\ \vec{v}_{M_2}^* = \frac{\mu}{m_2} \vec{v}_M^* \end{cases}$$

Ce faisant, le moment cinétique du système $\{M_1, M_2\}$ vaut, dans \mathcal{R}^* :

$$\begin{aligned} \vec{L}^* &\hat{=} \overrightarrow{GM}_1 \wedge m_1 \vec{v}_{M_1}^* + \overrightarrow{GM}_2 \wedge m_2 \vec{v}_{M_2}^* \\ &= \left(-\overrightarrow{GM}_1 + \overrightarrow{GM}_2 \right) \wedge \mu \vec{v}_M^* = \overrightarrow{M_1 M_2} \wedge \mu \vec{v}_M^* \\ &\Rightarrow \boxed{\vec{L}^* = \vec{r}^* \wedge \mu \vec{v}_M^*} \end{aligned}$$

et son énergie cinétique vaut, dans le référentiel barycentrique :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c^* &\hat{=} \frac{1}{2} m_1 (v_{M_1}^*)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_{M_2}^*)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[m_1 \frac{\mu^2}{m_1^2} + m_2 \frac{\mu^2}{m_2^2} \right] (v_M^*)^2 \\ &= \frac{1}{2} \mu^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) (v_M^*)^2 \\ &\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_c^* = \frac{1}{2} \mu (v_M^*)^2} \end{aligned}$$

En conclusion, dans le référentiel barycentrique, les éléments cinétiques du couple de points $\{M_1, M_2\}$ sont identiques à ceux de la particule fictive.

2 Cinétique du solide

2.1 Champ de vitesse

2.1.1 Définitions

Définition 16. Un solide \mathcal{S} indéformable est un ensemble de points qui conservent, dans le temps, la distance qui les sépare :

$$\forall (M_i, M_j) \in \mathcal{S}, M_i M_j \hat{=} \text{cte}$$

Définition 17. Le référentiel \mathcal{R}_s du solide \mathcal{S} est celui dans lequel tous les points de \mathcal{S} sont immobiles :

$$\forall M \in \mathcal{S}, \vec{v}_{M/\mathcal{R}_s} \hat{=} \vec{0} \text{ et } \vec{a}_{M/\mathcal{R}_s} = \vec{0}$$

Soient A et B deux points d'un solide \mathcal{S} , dont le référentiel \mathcal{R}_s a pour vecteur rotation par rapport à un autre référentiel \mathcal{R} : $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}$.

Soient, en outre, deux points A et M de \mathcal{S} . L'origine de \mathcal{R}_s pouvant être choisie en n'importe quel point de \mathcal{S} , on peut la fixer en A , de manière à écrire la loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}_s} + \vec{v}_e(M)$$

où $\vec{v}_{M/\mathcal{R}_s} = \vec{0}$ car $M \in \mathcal{S}$ tandis que la vitesse d'entraînement de M vaut :

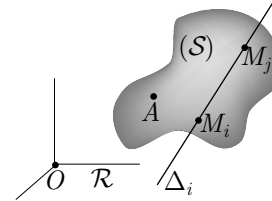
$$\vec{v}_e(M) = \vec{v}_{A/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AM}$$

Par conséquent :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{A/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AM} \quad (32)$$

Définition 18. On appelle axe de rotation instantanée du solide \mathcal{S} l'axe Δ_i qui contient tous les points M_i de \mathcal{S} immobiles dans \mathcal{R} :

$$\forall M_i \in \Delta_i, \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} = \vec{0}$$



Soient M_i et M_j deux points appartenant à l'axe de rotation Δ_i d'un solide (\mathcal{S}) . La loi (32) impose :

$$\vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} = \vec{v}_{A/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AM_i} \text{ et } \vec{v}_{M_j/\mathcal{R}} = \vec{v}_{A/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AM_j}$$

Par suite :

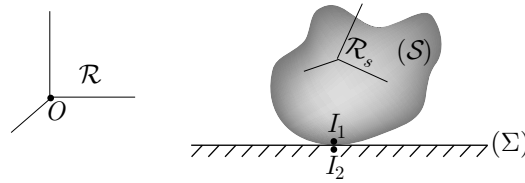
$$\vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} - \vec{v}_{M_j/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \wedge (\overrightarrow{AM_i} - \overrightarrow{AM_j}) = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{M_j M_i}$$

et, puisque M_i et M_j appartiennent à Δ_i :

$$\begin{cases} \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} = \vec{0} \\ \vec{v}_{M_j/\mathcal{R}} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{M_j M_i} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \parallel \Delta_i}$$

2.1.2 Glissement d'un solide

Soit (\mathcal{S}) un solide, de référentiel \mathcal{R}_s et soit (Σ) une surface en contact avec (\mathcal{S}) . À un instant t_c , (\mathcal{S}) est supposé en contact ponctuel avec (Σ) , ce qui signifie aussi qu'un point I_1 de (\mathcal{S}) est confondu avec un point I_2 de (Σ) ; c'est le point de contact de (\mathcal{S}) avec (Σ) .



Définition 19. On appelle **vitesse de glissement** \vec{v}_g la vitesse relative de I_1 par rapport à I_2 :

$$\boxed{\vec{v}_g \hat{=} \vec{v}_{I_1/I_2}}$$

Soit \mathcal{R} un référentiel d'origine O , à partir duquel sont évaluées les vitesses des points I_1 et I_2 :

$$\vec{v}_{I_1/\mathcal{R}} \hat{=} \left(\frac{d\overrightarrow{OI_1}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \text{ et } \vec{v}_{I_2/\mathcal{R}} \hat{=} \left(\frac{d\overrightarrow{OI_2}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$$

La vitesse de glissement peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} \vec{v}_g &= \left(\frac{d\overrightarrow{I_1 I_2}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{I_1 O}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{d\overrightarrow{OI_2}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \\ &\Rightarrow \boxed{\vec{v}_g = \vec{v}_{I_2/\mathcal{R}} - \vec{v}_{I_1/\mathcal{R}}} \end{aligned}$$

Dans de nombreux exercices, on rencontrera le cas des mouvements sans glissement, alors caractérisés par :

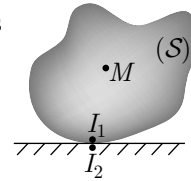
$$\vec{v}_g = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_{I_1/\mathcal{R}} = \vec{v}_{I_2/\mathcal{R}}$$

Soit M un point de (\mathcal{S}) , pour lequel la loi (32) devient :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{I_1/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{I_1 M}$$

La condition de non glissement se traduit alors par :

$$\boxed{\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{I_2/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{I_1 M}} \text{ car } I_1 = I_2$$

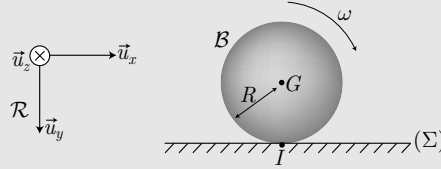


EXEMPLE

Soit \mathcal{B} une boule de centre G et de rayon R , dont la vitesse peut être décrite, dans un référentiel \mathcal{R} , par $\vec{v}_{G/\mathcal{R}}$ et dont le vecteur rotation s'écrit :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} = \omega \vec{u}_z$$

ω étant la vitesse angulaire de \mathcal{B} dans \mathcal{R} .



Notons I le point de contact de \mathcal{B} avec un support (Σ) , immobile dans \mathcal{R} (c'est-à-dire que $I = I_2$ est aussi immobile dans \mathcal{R}) :

$$\vec{v}_{I/\mathcal{R}} = \vec{0}$$

Par suite, le roulement sans glissement de \mathcal{B} se traduit par :

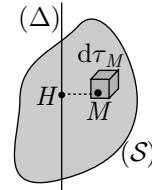
$$\begin{aligned} \vec{v}_{G/\mathcal{R}} &= \vec{v}_{I/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \wedge \vec{IG} = (\omega \vec{u}_z) \wedge (-R \vec{u}_y) \\ &\Rightarrow \boxed{\vec{v}_{G/\mathcal{R}} = R\omega \vec{u}_x} \end{aligned}$$

2.2 Moment d'inertie par rapport à un axe

2.2.1 Définition

Définition 20. Soit (\mathcal{S}) un système de points $\{M_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$, de projetés $\{H_i\}$ sur un axe (Δ) et de masses m_i . On appelle moment d'inertie de (\mathcal{S}) par rapport à l'axe Δ la grandeur :

$$J_{\Delta} \hat{=} \sum_{i=1}^n m_i H_i M_i^2$$



Si les points sont répartis de manière continue dans le système (\mathcal{S}) , par exemple dans un solide, on décompose (\mathcal{S}) en éléments de volume $d\tau_M$, centrés sur M et de masse $\delta m = \mu(M) d\tau_M$, $\mu(M)$ étant la masse volumique de (\mathcal{S}) en M . En notant H le projeté de chaque point M sur (Δ) , on obtient alors le moment d'inertie par le calcul :

$$J_{\Delta} = \iiint_{(\mathcal{S})} H M^2 \delta m = \iiint_{(\mathcal{S})} H M^2 \mu(M) d\tau_M \quad (33)$$

EXEMPLE

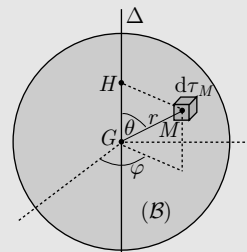
Calculons le moment d'inertie $J_{\Delta G}$ d'une boule (\mathcal{B}) homogène, pleine, d'axe Δ passant par G .

Puisque (\mathcal{B}) a pour volume : $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, sa masse volumique vaut :

$$\mu \triangleq \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi R^3}$$

Chaque point M de (\mathcal{B}) peut être repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) par rapport à G , de sorte qu'un volume élémentaire, centré sur M , vaut :

$$d\tau_M = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$$



Quant au projeté H de M sur Δ , il se trouve à une distance $HM = r \sin \theta$ du point M .

Ce faisant, la relation (33) devient :

$$\begin{aligned} J_{\Delta} &= \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \mu \times (r^2 \sin^2 \theta) \times r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{3m}{4\pi R^3} \int_{r=0}^R r^4 dr \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{3m}{4\pi R^3} \times \frac{R^5}{5} \times 2\pi \times \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{3mR^2}{10} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \end{aligned}$$

où :

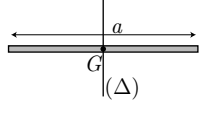
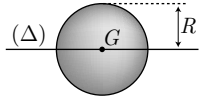
$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta &= \int_0^{\pi} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta = \left[-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi} \\ &= 2 \times \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$J_{\Delta} = \frac{3mR^2}{10} \times \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{J_{\Delta} = \frac{2}{5} mR^2}$$

QUELQUES MOMENTS D'INERTIE

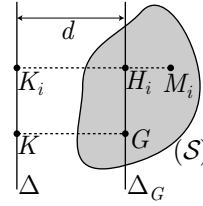
CERCLE		$J_{\Delta} = mR^2$
DISQUE PLEIN		$J_{\Delta} = \frac{1}{2} mR^2$
CYLINDRE PLEIN		$J_{\Delta} = \frac{1}{2} mR^2$
SPHÈRE CREUSE		$J_{\Delta} = \frac{2}{3} mR^2$

TIGE PLEINE		$J_{\Delta} = \frac{1}{12} m a^2$
BOULE PLEINE		$J_{\Delta} = \frac{2}{5} m R^2$

2.2.2 Théorème de Huygens

Soit (S) un solide de centre d'inertie G . Notons Δ_G un axe passant par G et Δ un autre axe, parallèle à Δ_G , situé à une distance d de Δ_G et soit K le projeté orthogonal de G sur Δ . En notant H_i et K_i les projetés de chaque point M_i de (S) respectivement sur Δ_G et sur Δ , non seulement :

$$\forall M_i \in (S), \overrightarrow{K_i H_i} = \overrightarrow{K G}$$



tandis que les moments d'inertie de (S) par rapport à Δ_G et par rapport à Δ sont respectivement définis par :

$$J_{\Delta_G} \triangleq \sum_{i=1}^n m_i H_i^2 \text{ et } J_{\Delta} \triangleq \sum_{i=1}^n m_i K_i^2$$

Cette dernière définition conduit à :

$$\begin{aligned} J_{\Delta} &= \sum_{i=1}^n m_i \left(\overrightarrow{K_i H_i} + \overrightarrow{H_i M_i} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n m_i K_i^2 + \sum_{i=1}^n m_i H_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{K_i H_i} \cdot \overrightarrow{H_i M_i} \\ &= m d^2 + J_{\Delta_G} + 2 \overrightarrow{K G} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{H_i M_i} \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{K G} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{H_i M_i} &= \overrightarrow{K G} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{H_i G} + \overrightarrow{K G} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{G M_i} \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{K G} \cdot \overrightarrow{H_i G} + \overrightarrow{K G} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{G M_i} \end{aligned}$$

D'une part, la définition de G : $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{G M_i} = \vec{0}$ et d'autre part l'orthogonalité entre $\overrightarrow{K G}$ et $\overrightarrow{H_i G}$ permettent de poser :

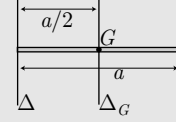
$$\overrightarrow{K G} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{H_i M_i} = 0 \Rightarrow \boxed{J_{\Delta} = J_{\Delta_G} + m d^2}$$

ce qui constitue le **théorème de Huygens**.

EXEMPLE

Considérons une tige de longueur a et de centre d'inertie G . Notons Δ_G un axe passant par G et $\Delta \parallel \Delta_G$ un axe passant par une extrémité de la tige. Connaissant le moment d'inertie de la tige par rapport à Δ_G :

$$J_{\Delta_G} = \frac{1}{12} ma^2$$



calculons le moment d'inertie de cette tige par rapport à Δ , en utilisant le théorème de Huygens :

$$J_{\Delta} = J_{\Delta_G} + md^2 = \frac{1}{12} ma^2 + md^2$$

où :

$$d = \frac{a}{2} \Rightarrow J_{\Delta} = ma^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) \Rightarrow \boxed{J_{\Delta} = \frac{1}{3} ma^2}$$

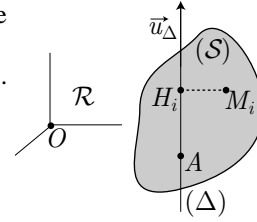
2.3 Rotation d'un solide autour d'un axe

2.3.1 Axe fixe dans \mathcal{R}

Soit (S) un solide et soit (Δ) un axe de rotation instantanée (immobile dans un référentiel \mathcal{R}), contenant un point A de (S) .

Chaque point M_i de (S) se projette sur (Δ) en un point H_i . Le moment cinétique de (S) en A est défini, dans \mathcal{R} , par :

$$\vec{L}_{A/\mathcal{R}} \hat{=} \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}$$



où la vitesse de chaque point M_i vérifie la loi (32) de la page 22 :

$$\vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} = \vec{v}_{H_i/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{H_i M_i}$$

Or, l'axe (Δ) étant un axe de rotation instantanée, $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}$ est colinéaire au vecteur unitaire directeur \vec{u}_{Δ} de (Δ) :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} = \Omega_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \vec{u}_{\Delta}$$

et chaque point H_i est immobile dans \mathcal{R} :

$$\vec{v}_{H_i/\mathcal{R}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_{A/\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{H_i M_i} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{L}_{A/\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \times \left(\overrightarrow{AM_i} \cdot \overrightarrow{H_i M_i} \right) - \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{H_i M_i} \times \left(\overrightarrow{AM_i} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \right)$$

D'une part :

$$\overrightarrow{AM_i} \cdot \overrightarrow{H_i M_i} = \overrightarrow{AH_i} \cdot \overrightarrow{H_i M_i} + H_i M_i^2 = H_i M_i^2 \text{ car } \overrightarrow{AH_i} \perp \overrightarrow{H_i M_i}$$

et, d'autre part, la somme :

$$\vec{L}_\perp \hat{=} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{H_i M_i} \times \left(\overrightarrow{A M_i} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \right) \quad (34)$$

est perpendiculaire à Δ car $\overrightarrow{H_i M_i} \perp \Delta \forall M_i \in (\mathcal{S})$ et $\overrightarrow{A M_i} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}$ est un scalaire. Finalement :

$$\boxed{\vec{L}_{A/\mathcal{R}} = J_\Delta \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} - \vec{L}_\perp} / J_\Delta \hat{=} \sum_{i=1}^n m_i H_i M_i^2$$

Examinons maintenant plusieurs cas :

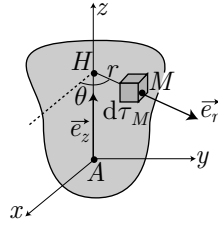
- Si le solide (\mathcal{S}) est contenu dans un plan perpendiculaire à (Δ) , tous les points H_i se confondent avec le point A de sorte que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A M_i} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} &= \overrightarrow{H_i M_i} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} = 0 \text{ car } \overrightarrow{H_i M_i} \perp \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \\ \Rightarrow \vec{L}_\perp &= \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{L}_{A/\mathcal{R}} = J_\Delta \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}} \end{aligned}$$

- En adoptant un modèle continu, la définition (34) devient :

$$\vec{L}_\perp = \iiint_{(\mathcal{S})} \delta m \overrightarrow{H M} \times \left(\overrightarrow{A M} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \right)$$

où chaque point M du solide (\mathcal{S}) est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) par rapport à son axe de rotation Δ que l'on confondra avec (A, \vec{e}_z) .



Dans ce système de coordonnées : $\overrightarrow{H M} = r \vec{e}_r$, $\delta m = \mu(r, \theta, z) d\tau_M$, avec $d\tau_M = r dr d\theta dz$ et $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} = \Omega_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \vec{e}_z$ et :

$$\overrightarrow{A M} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} = (z \vec{e}_z + r \vec{e}_r) \cdot \Omega_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \vec{e}_z = z \Omega_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}$$

Notamment, si (\mathcal{S}) est symétrique par rapport à l'axe Δ , sa masse volumique μ ne dépend pas de θ : $\mu = \mu(r, z)$, de sorte que :

$$\begin{aligned} \vec{L}_\perp &= \iiint_{(\mathcal{S})} \mu(r, z) \times r \vec{e}_r \times z \Omega_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} r dr d\theta dz \\ &= \Omega_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \iint_{(r, z)} \mu(r, z) r^2 dr dz \int_0^{2\pi} \vec{e}_r d\theta \end{aligned}$$

où :

$$\int_0^{2\pi} \vec{e}_r d\theta = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_\perp = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{L}_{A/\mathcal{R}} = J_\Delta \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}}$$

- Le moment cinétique de (\mathcal{S}) par rapport à (Δ) est défini par :

$$L_\Delta \hat{=} \vec{L}_{A/\mathcal{R}} \cdot \vec{u}_\Delta = J_\Delta \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \cdot \vec{u}_\Delta - \vec{L}_\perp \cdot \vec{u}_\Delta$$

où $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} = \Omega_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \vec{u}_\Delta$ et $\vec{L}_\perp \perp \vec{u}_\Delta$ conduisent finalement à :

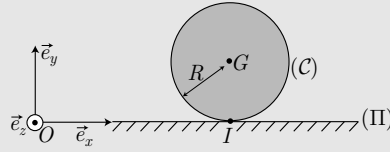
$$\boxed{L_\Delta = J_\Delta \Omega_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}}$$

Remarque : Dans le référentiel barycentrique, l'axe de rotation instantanée Δ passe nécessairement par G car $\vec{v}_G^* = \vec{0}$. Le moment d'inertie par rapport à cet axe vaut donc :

$$L_{\Delta G}^* = J_{\Delta G} \Omega_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \quad (35)$$

APPLICATION

Soit (C) un cylindre de centre G , de rayon R et de masse m , qui roule sans glisser sur un plan horizontal (Π) immobile dans un référentiel $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$.



On note ω la vitesse angulaire à partir de laquelle est défini son vecteur rotation : $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} = \omega \vec{e}_z$.

En notant I le point de contact de (C) sur (Π) , la condition de roulement sans glissement se traduit par :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{G/\mathcal{R}} &= \vec{v}_{I/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \wedge \vec{IG} = (\omega \vec{e}_z) \wedge (R \vec{e}_y) \\ \Rightarrow \vec{v}_{G/\mathcal{R}} &= -R\omega \vec{e}_x \end{aligned}$$

Déterminons, de deux manières, le moment cinétique de (C) par rapport à l'axe (O, \vec{e}_z) , connaissant son moment d'inertie par rapport à l'axe $\Delta_G = (G, \vec{e}_z)$: $J_{\Delta G} = \frac{1}{2} mR^2$.

– La loi (17) de la page 14 relie le moment cinétique de (S) en O à celui en I :

$$\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \vec{L}_{I/\mathcal{R}} + \vec{OI} \wedge m \vec{v}_{G/\mathcal{R}}$$

où :

$$\vec{OI} \parallel \vec{v}_{G/\mathcal{R}} = -R\omega \vec{e}_x \Rightarrow \vec{OI} \wedge m \vec{v}_{G/\mathcal{R}} = \vec{0}$$

tandis que l'axe (I, \vec{e}_z) est un axe de rotation instantanée :

$$\vec{L}_{I/\mathcal{R}} = J_{\Delta I} \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} - \vec{L}_\perp$$

$J_{\Delta I}$ étant le moment d'inertie de (C) par rapport à l'axe $\Delta_I = (I, \vec{e}_z)$, que l'on peut calculer en utilisant le théorème de Huygens :

$$\begin{aligned} J_{\Delta I} &= J_{\Delta G} + mGI^2 = \frac{1}{2} mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2 \\ \Rightarrow \vec{L}_{I/\mathcal{R}} &= \frac{3}{2} mR^2 \omega \vec{e}_z - \vec{L}_\perp \end{aligned}$$

ce qui fournit, finalement :

$$\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \vec{L}_{I/\mathcal{R}} = \frac{3}{2} mR^2 \omega \vec{e}_z - \vec{L}_\perp$$

Le moment cinétique de (C) par rapport à l'axe $\Delta = (O, \vec{e}_z)$ est alors défini par :

$$\begin{aligned} L_\Delta &\hat{=} \vec{L}_{O/\mathcal{R}} \cdot \vec{e}_z \text{ avec } \vec{L}_\perp \perp \vec{e}_z \\ \Rightarrow L_\Delta &= \frac{3}{2} mR^2 \omega \end{aligned}$$

- Dans le référentiel barycentrique, le moment cinétique de (C) par rapport à l'axe Δ_G est donné par la loi (35) :

$$L_{\Delta G}^* = J_{\Delta G} \Omega_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m R^2 \omega$$

Quant au théorème de Koenig, il fournit directement le moment cinétique $\vec{L}_{O/\mathcal{R}}$ en fonction du moment cinétique \vec{L}_G^* en G , dans le référentiel barycentrique de (S) :

$$\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \vec{L}_G^* + \vec{OG} \wedge m \vec{v}_{G/\mathcal{R}}$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{OG} \wedge m \vec{v}_{G/\mathcal{R}} &= (x \vec{e}_x + R \vec{e}_y) \wedge (-mR\omega \vec{e}_x) = -mR^2\omega \vec{e}_y \wedge \vec{e}_x \\ &= mR^2\omega \vec{e}_z \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \vec{L}_{O/\mathcal{R}} &= \vec{L}_G^* + mR^2\omega \vec{e}_z \\ \Rightarrow L_{\Delta} &\triangleq \vec{L}_{O/\mathcal{R}} \cdot \vec{e}_z = \vec{L}_G^* \cdot \vec{e}_z + mR^2\omega \end{aligned}$$

où, par définition :

$$\begin{aligned} L_{\Delta G}^* &\triangleq \vec{L}_G^* \cdot \vec{e}_z = \frac{1}{2} m R^2 \omega \\ \Rightarrow L_{\Delta} &= \frac{1}{2} m R^2 \omega + m R^2 \omega = \frac{3}{2} m R^2 \omega \end{aligned}$$

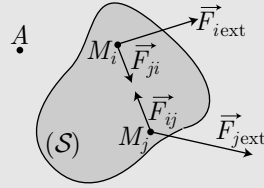
3 Lois de la dynamique

3.1 Torseur des contraintes extérieures

3.1.1 Définitions

Définition 21. Soit un système $\mathcal{S} = \{M_1, \dots, M_n\}$ de points soumis à des forces extérieures $\{\vec{F}_{1\text{ ext}}, \dots, \vec{F}_{n\text{ ext}}\}$. Le torseur des contraintes extérieures est le torseur dont les éléments de réduction sont constitués de la **résultante des forces extérieures** \vec{F}_{ext} et du **moment des forces extérieures** en A :

$$[F_{\text{ext}}]_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{\text{ext}} \triangleq \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i\text{ ext}} \\ \vec{\mathcal{M}}_{A\text{ ext}} \triangleq \sum_{i=1}^n \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_{i\text{ ext}} \end{array} \right\}$$



CALCUL PRÉLIMINAIRE :

Notons α_{ij} une grandeur dépendant de deux indices i et j :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \alpha_{ij} &= (\alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{14} + \cdots) + (\alpha_{21} + \alpha_{23} + \alpha_{24} + \cdots) \\ &\quad + (\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{34} + \cdots) + \cdots \\ &= [(\alpha_{12} + \alpha_{21}) + (\alpha_{13} + \alpha_{31}) + (\alpha_{14} + \alpha_{41}) + \cdots] \\ &\quad + [(\alpha_{23} + \alpha_{32}) + (\alpha_{24} + \alpha_{42}) + \cdots] + \cdots \end{aligned}$$

soit encore :

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \alpha_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j > i}^n (\alpha_{ij} + \alpha_{ji})} \quad (36)$$

3.1.2 Glisseur et couple

Définition 22. Un glisseur est un torseur de contraintes de résultante non nulle, mais dont il existe un point K de l'espace en lequel le moment est nul :

$$\boxed{[F]_K \text{ glisseur} \Leftrightarrow \exists K \nearrow [F]_K \hat{=} \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} \neq \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}_K = \vec{0} \end{array} \right\}}$$

EXEMPLE

Considérons le torseur dont la résultante est le poids \vec{P} d'un système de points $\{M_i\}$, de masses m_i , plongé dans un champ de gravitation \vec{g} uniforme et de moment $\vec{\mathcal{M}}_G$ en G , barycentre de ces points :

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{g} = m \vec{g} \neq \vec{0} \quad (37)$$

et :

$$\vec{\mathcal{M}}_G \hat{=} \sum_{i=1}^n \overrightarrow{GM_i} \wedge m_i \vec{g} = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GM_i} \wedge \vec{g}$$

où la définition de G impose :

$$\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GM_i} \hat{=} \vec{0} \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_G = \vec{0} \quad (38)$$

Les identités (37) et (38) révèlent que le torseur $[P]_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{P} \neq \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}_G = \vec{0} \end{array} \right\}$ est un glisseur.

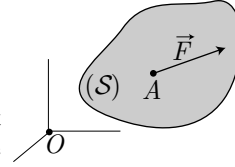
Considérons un glisseur :

$$[F]_A \hat{=} \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} \neq \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}_A = \vec{0} \end{array} \right\}$$

La loi de changement de point permet de calculer le moment de ce glisseur en n'importe quel point $O \neq A$:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_A + \vec{OA} \wedge \vec{F} \Rightarrow \boxed{\vec{M}_O = \vec{OA} \wedge \vec{F}}$$

Cette relation montre que, d'un point de vue dynamique, tout se passe comme si le système (S) de points était soumis à une unique force \vec{F} , agissant sur A .



Remarque : Le poids étant un glisseur de moment nul en G , il se comporte comme une unique force agissant en G .

Définition 23. On appelle couple un torseur de contraintes dont la résultante \vec{F} est nulle mais dont le moment est non nul :

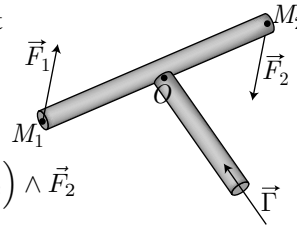
$$[F]_K \text{ couple} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = \vec{0} \\ \vec{M}_K = \vec{\Gamma} \neq 0 \end{array} \right\}$$

On peut rencontrer cette situation lorsque deux points M_1 et M_2 d'un solide sont soumis à des forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 non nulles, mais qui s'opposent ; bien que la résultante soit nulle :

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

le moment en O ne l'est pas :

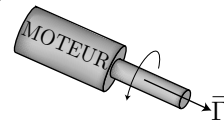
$$\begin{aligned} \vec{M}_O &\cong \vec{OM}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{OM}_2 \wedge \vec{F}_2 = (\vec{M}_1\vec{O} + \vec{OM}_2) \wedge \vec{F}_2 \\ &\Rightarrow \vec{M}_O = \vec{M}_1\vec{M}_2 \wedge \vec{F}_2 = \vec{\Gamma} \neq 0 \end{aligned}$$



Citons, comme couples, les exemples suivants :

- un moteur exerce, sur son arbre, un couple moteur $\vec{\Gamma}$ non nul ;
- Un solide en rotation, dans un milieu fluide, de vecteur rotation $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}$, peut être soumis à un couple résistant proportionnel à $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}$:

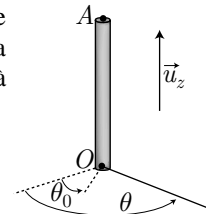
$$\boxed{\vec{\Gamma} = -\lambda \times \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} / \lambda \in \mathbb{R}^+}$$



- Une tige élastique, dont une extrémité (A) est fixe tandis que l'autre (O) est soumise à une torsion d'angle θ par rapport à sa position au repos θ_0 , exerce un **couple de rappel** qui s'oppose à cette torsion :

$$\boxed{\vec{\Gamma} = -C \times (\theta - \theta_0) \vec{u}_z}$$

où $C > 0$ est la constante de rappel du couple.

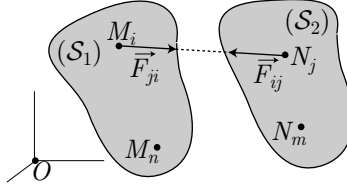


Remarque : On rapprochera cette loi à la force de rappel exercée par un ressort :

$$\vec{F}_{\text{rappel}} = -k(x - x_0) \vec{u}$$

3.2 Loi des actions réciproques

Soient deux systèmes de points $\mathcal{S}_1 = \{M_1, \dots, M_n\}$ et $\mathcal{S}_2 = \{N_1, \dots, N_m\}$ en interaction : chaque point N_j de (\mathcal{S}_2) est soumis à une force résultante $\vec{F}_{12}(N_j)$ de la part des points de (\mathcal{S}_1) et chaque point M_i de (\mathcal{S}_1) est soumis, de la part de (\mathcal{S}_2) , à une force résultante $\vec{F}_{21}(M_i)$, avec :



$$\vec{F}_{12}(N_j) \cong \sum_{i=1}^n \vec{F}_{ij} \text{ et } \vec{F}_{21}(M_i) \cong \sum_{j=1}^m \vec{F}_{ji}$$

où \vec{F}_{ij} et \vec{F}_{ji} désignent respectivement la force que M_i exerce sur N_j et celle que N_j exerce sur M_i en réaction. Le principe des actions réciproques stipule que :

$$\forall M_i \in (\mathcal{S}_1) \text{ et } \forall N_j \in (\mathcal{S}_2) : \begin{cases} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = \vec{0} \\ \vec{F}_{ij} \parallel \overrightarrow{M_i N_j} \end{cases}$$

Définissons maintenant les torseurs d'interaction $[F_{1 \rightarrow 2}]_O$ et $[F_{2 \rightarrow 1}]_O$ en un point O d'un référentiel \mathcal{R} , à partir de leurs éléments de réduction :

$$[F_{1 \rightarrow 2}]_O \cong \begin{pmatrix} \vec{F}_{12} = \sum_{j=1}^m \vec{F}_{12}(N_j) \\ \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{12}) = \sum_{j=1}^m \overrightarrow{ON_j} \wedge \vec{F}_{12}(N_j) \end{pmatrix}$$

et :

$$[F_{2 \rightarrow 1}]_O \cong \begin{pmatrix} \vec{F}_{21} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{21}(M_i) \\ \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{21}) = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_{21}(M_i) \end{pmatrix}$$

Dans ces conditions :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \vec{F}_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) \Rightarrow \boxed{\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0}} \end{aligned} \quad (39)$$

et :

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{12}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{21}) &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \overrightarrow{ON_j} \wedge \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_{ji} \\
 &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left(\overrightarrow{ON_j} \wedge \vec{F}_{ij} + \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_{ji} \right) \\
 &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left(\overrightarrow{ON_j} - \overrightarrow{OM_i} \right) \wedge \vec{F}_{ij} \\
 &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \overrightarrow{M_i N_j} \wedge \vec{F}_{ij}
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{12}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{21}) = \vec{0}} \text{ car } \overrightarrow{M_i N_j} \parallel \vec{F}_{ij} \quad (40)$$

Les relations (39) et (40) peuvent être condensées dans l'identité :

$$\boxed{[F_{1 \rightarrow 2}]_O = -[F_{2 \rightarrow 1}]_O}$$

qui constitue la **loi des actions réciproques**.

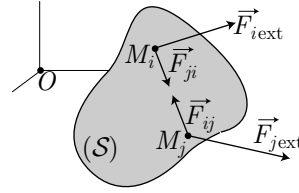
3.3 Théorème de la résultante cinétique

3.3.1 Dans un référentiel galiléen

Soit $\mathcal{S} = \{M_1, \dots, M_n\}$ un système de points ; chaque point M_i est soumis à une force résultante $\vec{F}_{i \text{ ext}}$ provenant de l'extérieur de (\mathcal{S}) , tandis que tout couple de points (M_i, M_j) de \mathcal{S} interagit : le point M_j exerce sur M_i une force \vec{F}_{ji} et le point M_i exerce, en réaction, une force \vec{F}_{ij} sur M_j .

Ainsi, chaque point $M_i \in \mathcal{S}$ est soumis à une force résultante :

$$\vec{F}(M_i) \cong \vec{F}_{i \text{ ext}} + \sum_{j \neq i}^n \vec{F}_{ji}$$



La loi fondamentale de la dynamique précise que le référentiel d'étude \mathcal{R}_g est galiléen si, pour chaque point M_i , il est possible d'écrire :

$$\boxed{m_i \vec{a}_{M_i/\mathcal{R}_g} = \vec{F}(M_i) \Leftrightarrow \mathcal{R}_g \text{ est galiléen.}}$$

Soit $\vec{S}_{/\mathcal{R}_g} \cong \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_{M_i/\mathcal{R}_g}$ la résultante dynamique de \mathcal{S} et soit $\vec{F}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i \text{ ext}}$ la résultante des actions extérieures à \mathcal{S} . La loi précédente conduit à :

$$\vec{S}_{/\mathcal{R}_g} = \sum_{i=1}^n \vec{F}(M_i) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i \text{ ext}} + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \vec{F}_{ji}$$

où la relation (36) de la page 31 fournit :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \vec{F}_{ji} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j > i}^n (\vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ij}) \\ &= \vec{0} \text{ car } \vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ij} = \vec{0} \end{aligned}$$

Finalement, le théorème de la résultante cinétique s'écrit :

$$\vec{S}_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext}} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{P}_{/\mathcal{R}_g}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}} \quad (41)$$

Remarque : Puisque la résultante cinétique $\vec{P}_{/\mathcal{R}_g}$ vaut aussi $m \vec{v}_{G/\mathcal{R}_g}$, lorsque la masse m du système est constante, le théorème de la résultante cinétique se présente aussi sous la forme :

$$\boxed{m \frac{d\vec{v}_{G/\mathcal{R}_g}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}}$$

3.3.2 Dans un référentiel non galiléen

Considérons maintenant le même système que précédemment, qui peut être étudié dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g ou dans un référentiel non galiléen \mathcal{R}_{ng} .

En notant $\vec{a}_e(M_i)$ et $\vec{a}_c(M_i)$ respectivement l'accélération d'entraînement du point M_i et son accélération de Coriolis, la loi de composition des accélérations :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{M_i/\mathcal{R}_g} &= \vec{a}_{M_i/\mathcal{R}_{ng}} + \vec{a}_e(M_i) + \vec{a}_c(M_i) \\ \Rightarrow \vec{a}_{M_i/\mathcal{R}_{ng}} &= \vec{a}_{M_i/\mathcal{R}_g} - \vec{a}_e(M_i) - \vec{a}_c(M_i) \end{aligned}$$

fournit la résultante dynamique de ce système dans le référentiel \mathcal{R}_{ng} :

$$\begin{aligned} \vec{S}_{/\mathcal{R}_{ng}} &\hat{=} \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_{M_i/\mathcal{R}_{ng}} \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_{M_i/\mathcal{R}_g} - \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_e(M_i) - \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_c(M_i) \end{aligned}$$

où :

- le théorème de la résultante cinétique (41) fournit :

$$\vec{S}_{/\mathcal{R}_g} \hat{=} \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_{M_i/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

- la **force d'entraînement** qui s'exerce sur le système est définie par :

$$\boxed{\vec{F}_e \hat{=} - \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_e(M_i)} \quad (42)$$

– la **force de Coriolis** qui s'exerce sur le système est définie par :

$$\vec{F}_c \triangleq - \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_c(M_i)$$

En conclusion, dans un référentiel non galiléen, le théorème de la résultante cinétique prévaut toujours, à condition toutefois de faire intervenir les forces d'inertie¹ :

$$\vec{S}_{/\mathcal{R}_{ng}} = \frac{d\vec{P}_{/\mathcal{R}_{ng}}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{F}_e + \vec{F}_c \quad (43)$$

3.4 Théorème du moment cinétique

3.4.1 En un point fixe d'un référentiel galiléen

Soit un système $\mathcal{S} = \{M_1, \dots, M_n\}$ de points matériels, de masses m_i , que l'on étudie dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g de centre O , où A désigne un point fixe. Le moment dynamique de \mathcal{S} en A est défini, dans \mathcal{R}_g , par :

$$\vec{\Gamma}_{A/\mathcal{R}_g} \triangleq \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{a}_{M_i/\mathcal{R}_g}$$

où l'accélération $\vec{a}_{M_i/\mathcal{R}_g}$ de chaque point M_i provient de la résultante des forces qui s'exercent dessus :

$$m_i \vec{a}_{M_i/\mathcal{R}_g} = \vec{F}(M_i) = \vec{F}_{i\text{ext}} + \sum_{j \neq i}^n \vec{F}_{ji}$$

Il s'ensuit que :

$$\vec{\Gamma}_{A/\mathcal{R}_g} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F}_{i\text{ext}} + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F}_{ji}$$

où, d'une part, on reconnaît la définition du moment des actions extérieures en A :

$$\vec{\mathcal{M}}_{A\text{ext}} \triangleq \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F}_{i\text{ext}}$$

et, d'autre part, le calcul préliminaire (36) de la page 31 conduit à :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F}_{ji} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j > i}^n \left(\overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F}_{ji} + \overrightarrow{AM_j} \wedge \vec{F}_{ij} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j > i}^n \left(-\overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F}_{ij} + \overrightarrow{AM_j} \wedge \vec{F}_{ij} \right) \text{ car } \vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j > i}^n \overrightarrow{M_i M_j} \wedge \vec{F}_{ij} = \vec{0} \text{ car } \overrightarrow{M_i M_j} \parallel \vec{F}_{ij} \end{aligned}$$

¹ Ces forces d'inertie sont des pseudo-forces en ce sens qu'elles ne traduisent par une interaction entre points matériels, mais sont simplement définies mathématiquement de manière à assurer une généralisation du théorème de la résultante cinétique.

Finalement, il reste :

$$\vec{\Gamma}_{A/\mathcal{R}_g} = \vec{\mathcal{M}}_{A \text{ ext}} \quad (44)$$

En outre, comme A est un point fixe du référentiel d'étude, la loi (22) de la page 16 fournit l'expression du théorème du moment cinétique :

$$\left(\frac{d\vec{L}_{A/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g} = \vec{\mathcal{M}}_{A \text{ ext}}$$

Remarque : Les identités (41) et (38) :

$$\vec{\Gamma}_{A/\mathcal{R}_g} = \vec{\mathcal{M}}_{A \text{ ext}} \text{ et } \vec{S}_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

permettent d'établir une relation générale entre le torseur dynamique et le torseur des actions extérieures :

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{S}_{/\mathcal{R}_g} \\ \vec{\Gamma}_{A/\mathcal{R}_g} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{\text{ext}} \\ \vec{\mathcal{M}}_{A \text{ ext}} \end{array} \right\} \Leftrightarrow [S/\mathcal{R}_g]_A = [F_{\text{ext}}]_A$$

Dans le cas où le point A est immobile dans \mathcal{R}_g , la relation (23) de la page 16 généralise finalement la loi fondamentale de la dynamique :

$$\frac{d[P/\mathcal{R}_g]_A}{dt} = [F_{\text{ext}}]_A \text{ si } \vec{v}_{A/\mathcal{R}_g} = \vec{0}$$

EXEMPLE

Soit (S) un solide de masse m , pouvant tourner autour d'un axe $(O, \vec{e}_z) = \Delta_O$, avec un vecteur rotation $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_g} = \dot{\theta} \vec{e}_z$. On admettra que le référentiel d'étude, associé au repère $\{O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ est galiléen.

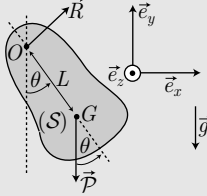
Le solide (S) est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_y$ et à la réaction \vec{R} de l'axe Δ_O , supposé immobile. Le centre d'inertie G de (S) est repéré par l'angle θ entre Δ_O et OG . On supposera connu le moment d'inertie I_{Δ_O} de (S) par rapport à Δ_O .

Utilisons alors le théorème du moment cinétique en O afin d'obtenir l'équation du mouvement de (S) . Pour cela, il convient de procéder en plusieurs étapes :

1. Expression du moment cinétique en O – Puisque l'axe (O, \vec{e}_z) est un axe de rotation instantanée, le moment cinétique en O s'écrit :

$$\vec{L}_{O/\mathcal{R}_g} = I_{\Delta_O} \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_g} - \vec{L}_{\perp}$$

où \vec{L}_{\perp} peut a priori ne pas être nul car, dans un cas général, le solide (S) est ni symétrique par rapport à Δ_O , ni contenu dans un plan perpendiculaire à Δ_O . C'est pourquoi on aura intérêt à travailler avec le moment cinétique par rapport à Δ_O , défini ni par :



$$\begin{aligned} L_{\Delta O} &\hat{=} \vec{L}_{O/\mathcal{R}_g} \cdot \vec{e}_z = I_{\Delta O} \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_g} \text{ car } \vec{L}_{\perp} \cdot \vec{e}_z \\ &= I_{\Delta O} \dot{\theta} \end{aligned}$$

2. Expression du moment des actions extérieures en O – Le solide (S) est soumis, de la part de l'extérieur, à son poids \vec{P} et à la réaction \vec{R} de l'axe. Le moment en O de ces forces vaut :

$$\vec{\mathcal{M}}_{O \text{ ext}} = \underbrace{\vec{OO} \wedge \vec{R}}_{=\vec{0}} + \vec{OG} \wedge \vec{P} = -Lmg \sin \theta \vec{e}_z$$

3. Application du théorème du moment cinétique – Le théorème du moment cinétique s'exprime par :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}_g}}{dt} &= \vec{\mathcal{M}}_{O \text{ ext}} \Rightarrow \vec{e}_z \cdot \frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}_g}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{O \text{ ext}} \cdot \vec{e}_z \\ \Rightarrow \frac{dL_{\Delta O}}{dt} &= \vec{\mathcal{M}}_{O \text{ ext}} \cdot \vec{e}_z \\ \Rightarrow I_{\Delta O} \ddot{\theta} &= -mgL \sin \theta \end{aligned} \quad (45)$$

L'équation du mouvement de (S) s'écrit donc :

$$\ddot{\theta} + \frac{mgL}{I_{\Delta O}} \sin \theta = 0$$

Notamment, si l'angle θ est suffisamment petit, le développement limité :

$$\sin \theta \sim \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgL}{I_{\Delta O}} \theta = 0$$

montre que des oscillations prennent naissance, avec une pulsation :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{I_{\Delta O}}}$$

3.4.2 En un point fixe d'un référentiel non galiléen

Soit A un point fixe d'un référentiel non galiléen \mathcal{R}_{ng} , de vecteur rotation $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_{ng}/\mathcal{R}_g}$ par rapport à un référentiel galiléen \mathcal{R}_g . Notons $\vec{a}_e(M_i)$ et $\vec{a}_c(M_i)$ les accélérations d'entraînement et de Coriolis de chaque point M_i de S . De même que les résultantes des forces d'entraînement et de Coriolis sont définies par :

$$\vec{F}_e \hat{=} - \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_e(M_i) \text{ et } \vec{F}_c \hat{=} - \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_c(M_i)$$

on définira les moments associés en un point A immobile dans \mathcal{R}_g par :

$$\vec{\mathcal{M}}_{Ae} \hat{=} - \sum_{i=1}^n \vec{AM}_i \wedge m_i \vec{a}_e(M_i) \text{ et } \vec{\mathcal{M}}_{Ac} \hat{=} - \sum_{i=1}^n \vec{AM}_i \wedge m_i \vec{a}_c(M_i)$$

C'est ainsi qu'apparaissent les torseurs :

$$[F_{\text{ent}}]_A \hat{=} \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_e \\ \vec{\mathcal{M}}_{Ae} \end{array} \right\} \text{ et } [F_{\text{Coriolis}}]_A \hat{=} \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_c \\ \vec{\mathcal{M}}_{Ac} \end{array} \right\}$$

La loi de composition des accélérations (11) de la page 8 permet d'écrire le moment dynamique de (S) dans \mathcal{R}_{ng} sous la forme :

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_{A/\mathcal{R}_{ng}} &\hat{=} \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{a}_{M_i/\mathcal{R}_{ng}} \\ &= \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{a}_{M_i/\mathcal{R}_g} - \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{a}_e(M_i) - \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{a}_c(M_i)\end{aligned}$$

soit encore :

$$\vec{\Gamma}_{A/\mathcal{R}_{ng}} = \vec{\Gamma}_{A/\mathcal{R}_g} + \vec{\mathcal{M}}_{Ae} + \vec{\mathcal{M}}_{Ac}$$

où la loi (44) identifie $\vec{\Gamma}_{A/\mathcal{R}_g}$ à $\vec{\mathcal{M}}_{A\text{ext}}$:

$$\boxed{\vec{\Gamma}_{A/\mathcal{R}_{ng}} = \vec{\mathcal{M}}_{A\text{ext}} + \vec{\mathcal{M}}_{Ae} + \vec{\mathcal{M}}_{Ac}} \quad (46)$$

Remarque : Les lois (43) et (46) :

$$\vec{S}_{/\mathcal{R}_{ng}} = \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{F}_e + \vec{F}_c \text{ et } \vec{\Gamma}_{A/\mathcal{R}_{ng}} = \vec{\mathcal{M}}_{A\text{ext}} + \vec{\mathcal{M}}_{Ae} + \vec{\mathcal{M}}_{Ac}$$

peuvent être condensées dans l'identité des torseurs :

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{array}{c} \vec{S}_{/\mathcal{R}_{ng}} \\ \vec{\Gamma}_{A/\mathcal{R}_{ng}} \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{\text{ext}} \\ \vec{\mathcal{M}}_{A\text{ext}} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_e \\ \vec{\mathcal{M}}_{Ae} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_c \\ \vec{\mathcal{M}}_{Ac} \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \boxed{[S_{/\mathcal{R}_{ng}}]_A = [F_{\text{ext}}]_A + [F_e]_A + [F_{\text{Coriolis}}]_A}\end{aligned}$$

En outre, puisque le point A est immobile dans \mathcal{R}_g , la loi (22) :

$$\vec{\Gamma}_{A/\mathcal{R}_{ng}} = \left(\frac{d\vec{L}_{A/\mathcal{R}_{ng}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_{ng}}$$

généralise le théorème du moment cinétique au cas des référentiels non galiléens :

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{L}_{A/\mathcal{R}_{ng}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_{ng}} = \vec{\mathcal{M}}_{A\text{ext}} + \vec{\mathcal{M}}_{Ae} + \vec{\mathcal{M}}_{Ac}}$$

Remarque : Lorsque le point A est immobile, la relation (23) de la page 16 :

$$\frac{d[P_{/\mathcal{R}_{ng}}]_A}{dt} = [S_{/\mathcal{R}_{ng}}]_A$$

permet de généraliser la loi fondamentale de la dynamique :

$$\boxed{\frac{d[P_{/\mathcal{R}_{ng}}]_A}{dt} = [F_{\text{ext}}]_A + [F_e]_A + [F_{\text{Coriolis}}]_A}$$

3.4.3 Dans le référentiel barycentrique

Il s'agit d'un cas particulier : le référentiel \mathcal{R}^* (éventuellement non galiléen) est en mouvement de translation par rapport à un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , tandis que le point G est immobile dans \mathcal{R}^* .

Notons alors $\vec{\Gamma}^*$ le moment dynamique dans le référentiel barycentrique. L'identité (30) de la page 19 montre que ce moment ne dépend pas du point par rapport auquel il est mesuré :

$$\vec{\Gamma}^* = \vec{\Gamma}_G^* = \vec{\Gamma}_A^*$$

de sorte que :

$$\vec{\Gamma}^* \cong \sum_{i=1}^n \overrightarrow{GM_i} \wedge m_i \vec{a}_{M_i}^*$$

où la loi (28) a permis de remarquer que :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{M_i/\mathcal{R}_g} &= \vec{a}_{M_i}^* + \vec{a}_{G/\mathcal{R}_g} \\ \Rightarrow \vec{\Gamma}^* &= \sum_{i=1}^n \overrightarrow{GM_i} \wedge m_i \vec{a}_{M_i/\mathcal{R}_g} - \sum_{i=1}^n \overrightarrow{GM_i} \wedge m_i \vec{a}_{G/\mathcal{R}_g} \\ \Rightarrow \vec{\Gamma}^* &= \vec{\Gamma}_{G/\mathcal{R}_g} - \left(\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GM_i} \right) \wedge \vec{a}_{G/\mathcal{R}_g} = \vec{\Gamma}_{G/\mathcal{R}_g} \end{aligned}$$

c'est-à-dire, compte tenu du résultat (44) :

$$\vec{\Gamma}^* = \vec{\mathcal{M}}_{G \text{ ext}}$$

Enfin, puisque G est immobile dans \mathcal{R}^* :

$$\vec{\Gamma}^* = \left(\frac{d\vec{L}^*}{dt} \right)_{\mathcal{R}^*}$$

d'où découle l'expression du théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique :

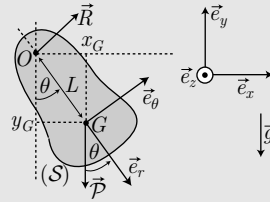
$$\boxed{\left(\frac{d\vec{L}^*}{dt} \right)_{\mathcal{R}^*} = \left(\frac{d\vec{L}_G^*}{dt} \right)_{\mathcal{R}^*} = \vec{\mathcal{M}}_{G \text{ ext}}}$$

EXEMPLE

Reprenons l'exemple de la page 37, en notant R_r , R_θ et R_z les composantes de \vec{R} dans la base polaire $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$.

1. Expression du moment cinétique barycentrique – Dans le référentiel barycentrique, l'axe (G, \vec{e}_z) est un axe de rotation instantanée, par rapport auquel (S) a un moment d'inertie $I_{\Delta G}$. Son moment cinétique barycentrique vaut alors :

$$\vec{L}^* = \vec{L}_G^* = I_{\Delta G} \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}^*} - \vec{L}_\perp^*$$



où la loi de composition des vecteurs rotation impose :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_g} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}^*} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}_g}}_{=\vec{0}} \Rightarrow \dot{\theta} \vec{e}_z = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s^*/\mathcal{R}_g}$$

Il s'ensuit que :

$$\vec{L}^* = I_{\Delta G} \dot{\theta} \vec{e}_z - \vec{L}_{\perp}^*$$

Or, à nouveau, (S) étant a priori ni symétrique par rapport à Δ_G , ni plan, il sera préférable de travailler avec le moment cinétique barycentrique par rapport à l'axe Δ_G :

$$\begin{aligned} L_{\Delta G}^* &\hat{=} \vec{L}^* \cdot \vec{e}_z = I_{\Delta G} \dot{\theta} - \vec{L}_{\perp}^* \cdot \vec{e}_z \\ &= I_{\Delta G} \dot{\theta} \text{ car } \vec{L}_{\perp}^* \perp \vec{e}_z \end{aligned}$$

2. Moment des forces extérieures – En G , le moment des forces extérieures (\vec{P} et \vec{R}) vaut :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_{G \text{ ext}} &= \underbrace{\vec{G}\vec{G} \wedge \vec{P}}_{=\vec{0}} + \vec{G}\vec{O} \wedge \vec{R} = (-L \vec{e}_r) \wedge \vec{R} \\ &= \begin{pmatrix} -L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_r \\ R_\theta \\ R_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ LR_z \\ -LR_\theta \end{pmatrix} = LR_z \vec{e}_\theta - LR_\theta \vec{e}_z \\ &\Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_{G \text{ ext}} \cdot \vec{e}_z = -LR_\theta \end{aligned}$$

3. Théorème du moment cinétique – Dans le référentiel barycentrique, le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{L}^*}{dt} \right)_{\mathcal{R}^*} &= \vec{\mathcal{M}}_{G \text{ ext}} \Rightarrow \vec{e}_z \cdot \left(\frac{d\vec{L}^*}{dt} \right)_{\mathcal{R}^*} = \vec{\mathcal{M}}_{G \text{ ext}} \cdot \vec{e}_z \\ &\Rightarrow \left(\frac{dL_{\Delta G}^*}{dt} \right)_{\mathcal{R}^*} = \vec{\mathcal{M}}_{G \text{ ext}} \cdot \vec{e}_z \\ &\Rightarrow I_{\Delta G} \ddot{\theta} = -LR_\theta \end{aligned} \quad (47)$$

Dans cette équation apparaissent deux inconnues : θ et R_θ . C'est pourquoi il convient d'écrire une nouvelle équation générale de la mécanique :

4. Théorème de la résultante cinétique – En coordonnées polaires, la vitesse de G est donnée par :

$$\vec{v}_{G/\mathcal{R}_g} = L\dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

d'où découle l'expression de la résultante cinétique de (S) :

$$\begin{aligned} \vec{P}_{/\mathcal{R}_g} &= m \vec{v}_{G/\mathcal{R}_g} = mL \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ &\Rightarrow \frac{d\vec{P}_{/\mathcal{R}_g}}{dt} = mL \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + mL \dot{\theta} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \\ &\Rightarrow \frac{d\vec{P}_{/\mathcal{R}_g}}{dt} = -mL \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + mL \ddot{\theta} \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

Aussi, puisque (S) est soumis à son poids $\vec{P} = \begin{pmatrix} mg \cos \theta \\ -mg \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$ et à la réaction \vec{R} de l'axe, le théorème de la résultante cinétique impose, dans la base $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$:

$$\frac{d\vec{P}_{/\mathcal{R}_g}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} \Rightarrow \begin{pmatrix} -mL \dot{\theta}^2 \\ mL \ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg \cos \theta \\ -mg \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_r \\ R_\theta \\ R_z \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'expression de R_θ peut être extraite de cette équation :

$$R_\theta = mL\ddot{\theta} + mg \sin \theta$$

et réintroduite dans l'équation (47), qui devient :

$$\begin{aligned} I_{\Delta G} \ddot{\theta} &= -mL^2 \ddot{\theta} - mgL \sin \theta \\ \Rightarrow (I_{\Delta G} + mL^2) \ddot{\theta} + mgL \sin \theta &= 0 \end{aligned}$$

Finalement, le théorème de Huygens stipule que :

$$I_{\Delta O} = I_{\Delta G} + mL^2 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgL}{I_{\Delta O}} \sin \theta = 0$$

ce qui confirme l'équation du mouvement (45) obtenue à la page 38.

4 Énergie d'un système

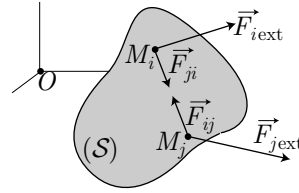
4.1 Puissance et travail d'un système de forces

4.1.1 Définitions

Considérons un système (S) de points M_i , chacun étant soumis à une force résultante :

$$\vec{F}(M_i) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i \text{ ext}} + \sum_{j \neq i}^n \vec{F}_{ji}$$

provenant de l'extérieur et de l'interaction des autres points M_j de (S) .



Définition 24. Le travail des forces qui s'exercent sur le système (S) est la somme des travaux qui s'exercent sur chacun des points du système (S) , dans un référentiel \mathcal{R} d'origine O :

$$\delta W \cong \sum_{i=1}^n \vec{F}(M_i) \cdot d\vec{OM}_i$$

La définition des vecteurs $\vec{F}(M_i)$:

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i \text{ ext}} \cdot d\vec{OM}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{OM}_i$$

montre que δW est la somme de deux termes :

$$\boxed{\delta W = \delta W_{\text{ext}} + \delta W_{\text{int}}} \quad (48)$$

où :

- δW_{ext} désigne le travail exercé sur (S) par l'ensemble des forces extérieures à (S) :

$$\delta W_{\text{ext}} \hat{=} \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i \text{ ext}} \cdot d\vec{OM}_i$$

- les interactions entre les différents points de (S) fournissent un travail :

$$\delta W_{\text{int}} \hat{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{OM}_i \quad (49)$$

c'est-à-dire, compte tenu de la loi (36) de la page 31 :

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \left(\vec{F}_{ji} \cdot d\vec{OM}_i + \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{OM}_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \left(d\vec{M}_i \vec{O} + d\vec{OM}_j \right) \cdot \vec{F}_{ij} \text{ car } \vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij} \\ &\Rightarrow \delta W_{\text{int}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n d\vec{M}_i \vec{M}_j \cdot \vec{F}_{ij} \end{aligned} \quad (50)$$

Remarque : Toujours en vertu de la loi (36), on peut poser :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{M}_i \vec{M}_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \left(\vec{F}_{ij} \cdot d\vec{M}_i \vec{M}_j + \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{M}_j \vec{M}_i \right)$$

où :

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \text{ et } \vec{M}_j \vec{M}_i = -\vec{M}_i \vec{M}_j \Rightarrow d\vec{M}_j \vec{M}_i = -d\vec{M}_i \vec{M}_j$$

conduisent à :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{M}_i \vec{M}_j = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{M}_i \vec{M}_j$$

de sorte que la loi (50) s'écrit aussi :

$$\delta W_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{M}_i \vec{M}_j$$

Définition 25. La puissance qu'un système (S) reçoit des forces extérieures est le rapport du travail que ces forces exercent sur (S) par la durée dt pendant laquelle elles s'exercent :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}} \hat{=} \frac{\delta W_{\text{ext}}}{dt}$$

La définition de δW_{ext} , associée à celle de la vitesse de chaque point M_i , dans \mathcal{R} , conduit à poser :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i \text{ ext}} \cdot \left(\frac{d\vec{OM}_i}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i \text{ ext}} \cdot \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}} \quad (51)$$

Définition 26. Si, pendant dt , les interactions entre les points de (S) exercent un travail δW_{int} , la puissance associée est définie par :

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{int}} \triangleq \frac{\delta W_{\text{int}}}{dt}}$$

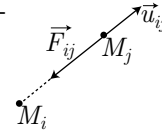
Remarque : La relation (48) permet d'associer au système (S) une puissance mécanique totale :

$$\mathcal{P} \triangleq \frac{\delta W}{dt} \Rightarrow \boxed{\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}}$$

4.1.2 Cas du solide

Un solide indéformable (S) est un ensemble de n points dont les distances $M_i M_j$ sont maintenues constantes. Ainsi, en notant \vec{u}_{ij} un vecteur unitaire de $\vec{M_i M_j}$:

$$\vec{M_i M_j} = M_i M_j \vec{u}_{ij} \Rightarrow d\vec{M_i M_j} = M_i M_j d\vec{u}_{ij}$$



avec :

$$\|\vec{u}_{ij}\| = 1 \Rightarrow (\vec{u}_{ij})^2 = 1 \Rightarrow 2 \vec{u}_{ij} \cdot d\vec{u}_{ij} = 0$$

Or, le principe des actions réciproques stipule que la force \vec{F}_{ij} exercée par M_i sur M_j est colinéaire à $\vec{M_i M_j}$:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ij} \parallel \vec{M_i M_j} &\Rightarrow \vec{F}_{ij} \parallel \vec{u}_{ij} \Rightarrow \vec{F}_{ij} = F_{ij} \vec{u}_{ij} \\ &\Rightarrow \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{M_i M_j} = (F_{ij} \vec{u}_{ij}) \cdot (M_i M_j d\vec{u}_{ij}) = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, la relation (50) devient :

$$\delta W_{\text{int}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n d\vec{M_i M_j} \cdot \vec{F}_{ij} = 0$$

Ainsi, le seul travail reçu par un solide est celui des forces extérieures :

$$\boxed{\delta W = \delta W_{\text{ext}} \Rightarrow \mathcal{P} = \mathcal{P}_{\text{ext}}}$$

Il est alors possible d'isoler plusieurs cas :

- Si le solide (\mathcal{S}) est soumis à une seule force extérieure \vec{F} , qui s'exerce en un point $A \in (\mathcal{S})$ (par exemple l'action d'un ressort) :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{A/\mathcal{R}}$$

- Si (\mathcal{S}) est soumis à un seul type de forces extérieures (par exemple son poids) :

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i \text{ ext}}$$

La vitesse de chaque point M_i , dans \mathcal{R} , peut s'exprimer en fonction de la vitesse de n'importe quel point A de (\mathcal{S}) :

$$\vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} = \vec{v}_{A/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AM_i}$$

Ainsi, la puissance mécanique reçue par (\mathcal{S}) vaut :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathcal{P}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i \text{ ext}} \cdot \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i \text{ ext}} \cdot \vec{v}_{A/\mathcal{R}} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i \text{ ext}} \cdot \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AM_i} \right) \\ &= \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{A/\mathcal{R}} + \sum_{i=1}^n \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \cdot \left(\overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F}_{i \text{ ext}} \right) \end{aligned}$$

Cette puissance peut donc se calculer simplement à l'aide de la relation :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\text{ext}} = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{A/\mathcal{R}} + \vec{\mathcal{M}}_{A \text{ ext}} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \forall A \in (\mathcal{S}) \quad (52)$$

- Si le torseur des actions extérieures est un glisseur, il existe un point $K \in (\mathcal{S})$ tel que $\vec{\mathcal{M}}_{K \text{ ext}} = \vec{0}$. Dans ce cas, la puissance vaut :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{K/\mathcal{R}}$$

Par exemple, le poids est un glisseur de centre G ; sa puissance vaut :

$$\mathcal{P}_{\text{poids}} = \vec{P} \cdot \vec{v}_{G/\mathcal{R}} \quad (53)$$

- Si le torseur des actions extérieures est un couple de résultante nulle et de moment en A $\vec{\Gamma}_A \neq \vec{0}$:

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \vec{\mathcal{M}}_{A \text{ ext}} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} = \vec{\Gamma}_A \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}$$

Ce cas se rencontre, notamment, lors de l'étude de la torsion d'un fil.

- Si (\mathcal{S}) est soumis à un ensemble de forces (par exemple le poids, une force électrique, des frottements,...) : $\left\{ \vec{F}_{i \text{ ext}}^{(\alpha)} \right\}_{\alpha \in \{1, \dots, Q\}}$:

$$\vec{F}_{i \text{ ext}} = \sum_{\alpha=1}^Q \vec{F}_{i \text{ ext}}^{(\alpha)}$$

La puissance mécanique reçue vaut alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\text{ext}} &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i \text{ ext}} \cdot \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^Q \vec{F}_{i \text{ ext}}^{(\alpha)} \cdot \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} \\ &= \sum_{\alpha=1}^Q \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i \text{ ext}}^{(\alpha)} \cdot \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}\end{aligned}$$

où l'on reconnaît la puissance $\mathcal{P}_{\text{ext}}^{(\alpha)}$ de chacun de ces types de forces :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \sum_{\alpha=1}^Q \mathcal{P}_{\text{ext}}^{(\alpha)} \quad \mathcal{P}_{\text{ext}}^{(\alpha)} \hat{=} \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i \text{ ext}}^{(\alpha)} \cdot \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}$$

Remarque : Dans la pratique, chacune des puissances $\mathcal{P}_{\text{ext}}^{(\alpha)}$ se calculera à l'aide de la loi (52).

- Dans un référentiel non galiléen, aux « forces » d'inertie (d'entraînement et de Coriolis) :

$$\vec{F}_{\text{ent}} \hat{=} - \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_e(M_i) \quad \text{et} \quad \vec{F}_c \hat{=} - \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_c(M_i)$$

peuvent être associées des puissances qui généralisent la relation (51) :

$$\mathcal{P}_{\text{ent}/\mathcal{R}_{ng}} \hat{=} - \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_e(M_i) \cdot \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}_{ng}}$$

et :

$$\mathcal{P}_{\text{Coriolis}/\mathcal{R}_{ng}} \hat{=} - \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_c(M_i) \cdot \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}_{ng}}$$

où l'accélération de Coriolis s'exprime en fonction du vecteur rotation de \mathcal{R}_{ng} dans un référentiel galiléen :

$$\begin{aligned}\vec{a}_c(M_i) &\hat{=} 2 \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_{ng}/\mathcal{R}_g} \wedge \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}_{ng}} \perp \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}_{ng}} \\ &\Rightarrow \vec{a}_c(M_i) \cdot \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}_{ng}} = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_{\text{Coriolis}/\mathcal{R}_{ng}} = 0}\end{aligned}$$

Considérons le cas particulier du référentiel barycentrique \mathcal{R}^* , de vecteur rotation nul par rapport à un référentiel galiléen \mathcal{R}_g : $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}_g} = \vec{0}$ et dont le centre G est animé d'une accélération $\vec{a}_{G/\mathcal{R}_g}$ dans \mathcal{R}_g . L'accélération d'entraînement d'un point M_i de (S) est donnée par l'identité (27) de la page 18 :

$$\begin{aligned}\forall M_i \in (S), \vec{a}_e(M_i) &= \vec{a}_{G/\mathcal{R}_g} \\ \Rightarrow \mathcal{P}_{\text{ent}/\mathcal{R}^*} &= - \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{M_i}^* \right) \cdot \vec{a}_{G/\mathcal{R}_g}\end{aligned}$$

où l'on reconnaît l'expression de la résultante cinétique de (S) dans son référentiel barycentrique :

$$\vec{P}^* \triangleq \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{M_i}^* = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_{\text{ent}}^* = 0} \quad (54)$$

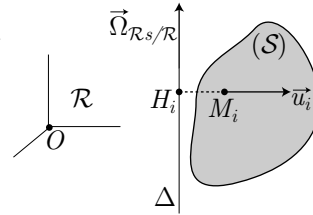
4.2 Énergie cinétique

4.2.1 Expressions

– Solide en rotation autour d'un axe fixe

Soit Δ un axe fixe dans un référentiel \mathcal{R} de centre O , autour duquel un solide (S) tourne avec un vecteur rotation $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \parallel \Delta$. On note H_i le projeté orthogonal de chaque point M_i sur Δ , ce qui permet de

définir la vitesse $\vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{OM}_i}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$ par :



$$\vec{OM}_i = \vec{OH}_i + \vec{H_iM_i} \Rightarrow \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{H_iM_i}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \text{ car } \left(\frac{d\vec{OH_i}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{0}$$

Aussi, en définissant par \vec{u}_i le vecteur unitaire directeur de $\vec{H_iM_i}$:

$$\begin{aligned} \vec{H_iM_i} = H_i M_i \vec{u}_i &\Rightarrow \left(\frac{d\vec{H_iM_i}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = H_i M_i \left(\frac{d\vec{u}_i}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \text{ car } H_i M_i = \text{cte} \\ &\Rightarrow \left(\frac{d\vec{H_iM_i}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = H_i M_i \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \wedge \vec{u}_i \\ &\Rightarrow \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \wedge \vec{H_iM_i} \end{aligned}$$

où :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \perp \vec{H_iM_i} \Rightarrow v_{M_i/\mathcal{R}}^2 = H_i M_i^2 \Omega_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}^2$$

Donc, l'énergie cinétique de (S) dans \mathcal{R} vaut :

$$\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_{M_i/\mathcal{R}}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i H_i M_i^2 \Omega_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}^2$$

où l'on connaît l'expression du moment d'inertie par rapport à Δ :

$$J_{\Delta} \triangleq \sum_{i=1}^n m_i H_i M_i^2 \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} J_{\Delta} \Omega_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}^2}$$

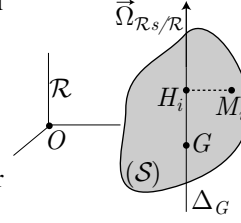
– Énergie cinétique barycentrique

Les vitesses de deux points A et M_i , dans un référentiel \mathcal{R} sont liées par la relation :

$$\vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} = \vec{V}_{A/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \wedge \vec{AM_i}$$

Notamment, si \mathcal{R} désigne le référentiel barycentrique et si A est confondu avec G :

$$\begin{aligned}\vec{v}_{M_i}^* &= \vec{v}_G^* + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}^*} \overrightarrow{GM_i} \\ &= \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}^*} \wedge \overrightarrow{GM_i} \text{ car } \vec{v}_G^* = \vec{0}\end{aligned}$$



Or, par rapport à tout autre référentiel galiléen \mathcal{R} , le vecteur rotation de \mathcal{R}^* est nul, ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned}\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_g} &= \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}^*} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}}}_{=\vec{0}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}^*} \\ \Rightarrow \vec{v}_{M_i}^* &= \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \overrightarrow{GM_i}\end{aligned}$$

Définissons alors l'axe Δ_G parallèle à $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}$ et passant par G , sur lequel les points M_i se projettent en H_i , de sorte que :

$$\begin{aligned}\vec{v}_{M_i}^* &= \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{GH_i}}_{=\vec{0}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{H_iM_i} \\ \Rightarrow (v_{M_i}^*)^2 &= \Omega_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}^2 \times H_iM_i^2 \text{ car } \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \perp \overrightarrow{H_iM_i}\end{aligned}$$

Par conséquent, l'énergie cinétique barycentrique vaut :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_c^* &\hat{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (v_{M_i}^*)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_i H_iM_i^2 \right) \Omega_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}^2 \\ \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_c^* = \frac{1}{2} J_{\Delta G} \Omega_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}^2} &\not/J_{\Delta G} \hat{=} \sum_{i=1}^n m_i H_iM_i^2\end{aligned}$$

Remarque : Cette expression montre que, dans le référentiel barycentrique, (S) a un mouvement de rotation autour de son axe de rotation instantanée Δ_G .

– Dans le cas général

Considérons maintenant un solide (S) dont le centre d'inertie G se déplace à une vitesse $\vec{v}_{G/\mathcal{R}}$ dans un référentiel \mathcal{R} et est en rotation autour d'un axe Δ_G dans \mathcal{R}^* . Le théorème de Koenig indique alors comment calculer l'énergie cinétique de (S) dans (\mathcal{R}) :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} &= \frac{1}{2} m v_{G/\mathcal{R}}^2 + \mathcal{E}_c^* \\ \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m v_{G/\mathcal{R}}^2 + \frac{1}{2} J_{\Delta G} \Omega_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}^2} &\quad (55)\end{aligned}$$

4.2.2 Théorème de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un système $\mathcal{S} = \{M_1, \dots, M_n\}$ de points vaut, dans le référentiel galiléen :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}_g} &\hat{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_{M_i/\mathcal{R}_g}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\vec{v}_{M_i/\mathcal{R}_g})^2 \\ \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}_g}}{dt} &= \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_{M_i/\mathcal{R}_g}}{dt} \cdot \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}_g}\end{aligned}$$

où la loi fondamentale de la dynamique relie la force $\vec{F}(M_i)$ qui s'exerce sur M_i à son accélération, dans un référentiel galiléen :

$$\vec{F}(M_i) = m_i \vec{a}_{M_i/\mathcal{R}_g} \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}_g}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}(M_i) \cdot \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}_g}$$

On reconnaît alors la puissance mécanique reçue par (\mathcal{S}) , d'où l'on déduit le **théorème de l'énergie cinétique** en référentiel galiléen :

$$\boxed{\frac{d\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}_g}}{dt} = \mathcal{P}_{\mathcal{R}_g}}$$

Dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* (pas nécessairement galiléen), la loi fondamentale de la dynamique admet une généralisation :

$$\vec{a}_{M_i/\mathcal{R}^*} = \vec{F}(M_i) + \vec{F}_c(M_i) + \vec{F}_e(M_i) = \vec{a}_{M_i}^*$$

où la force de Coriolis est nulle. Il s'ensuit que :

$$\frac{d\mathcal{E}_c^*}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_{M_i}^* \cdot \vec{v}_{M_i}^* = \mathcal{P}^* + \mathcal{P}_{\text{ent}}^*$$

L'identité (54) : $\mathcal{P}_{\text{ent}}^* = 0$ permet alors d'obtenir l'expression du théorème de l'énergie cinétique dans le référentiel barycentrique :

$$\boxed{\frac{d\mathcal{E}_c^*}{dt} = \mathcal{P}^*}$$

4.3 Exemples

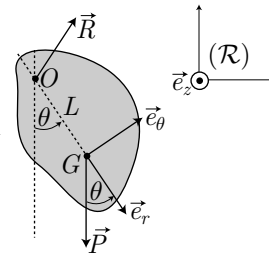
4.3.1 Pendule pesant

Considérons le solide (\mathcal{S}) en rotation autour de l'axe (O, \vec{e}_z) , décrit à la page 37 et appliquons-lui le théorème de l'énergie cinétique en procédant en plusieurs étapes :

1. Expression de l'énergie cinétique

Puisque \mathcal{S} est en rotation autour de l'axe (O, \vec{e}_z) , avec un vecteur rotation $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} = \dot{\theta} \vec{e}_z$, cette énergie cinétique vaut :

$$\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} I_{\Delta O} \Omega_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}^2 = \frac{1}{2} I_{\Delta O} \dot{\theta}^2$$



2. Puissance reçue par (\mathcal{S})

Puisque (\mathcal{S}) est soumis à son poids \vec{P} et à la réaction \vec{R} :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\text{ext}} = \mathcal{P}(\vec{R}) + \mathcal{P}(\vec{P})$$

où :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\vec{R}) &= \vec{v}_{O/\mathcal{R}} \cdot \vec{R} + \vec{M}_O(\vec{R}) \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \text{ avec } \begin{cases} \vec{v}_{O/\mathcal{R}} = \vec{0} \\ \vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{OO} \wedge \vec{R} = \vec{0} \end{cases} \\ \Rightarrow \mathcal{P}(\vec{R}) &= 0 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\vec{P}) &= \vec{v}_{G/\mathcal{R}} \cdot \vec{P} + \vec{M}_G(\vec{P}) \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \\ &= \vec{v}_{G/\mathcal{R}} \cdot \vec{P} \text{ car } \vec{M}_G(\vec{P}) = \vec{GG} \wedge \vec{P} = \vec{0} \end{aligned}$$

Dans la base polaire $\mathcal{B} = \{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$:

$$\vec{v}_{G/\mathcal{R}} \cdot \vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ L\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \cdot \begin{pmatrix} mg \cos \theta \\ -mg \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \Rightarrow \mathcal{P}(\vec{P}) = -mgL \sin \theta \dot{\theta}$$

3. Expression du théorème de l'énergie cinétique

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} &= \mathcal{P} \Rightarrow I_{\Delta O} \ddot{\theta} = -mgL \sin \theta \dot{\theta} \\ \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{mgL}{I_{\Delta O}} \sin \theta &= 0} \end{aligned}$$

On s'assurera de la compatibilité de cette relation avec le résultat (45) établi à la page 38.

4.3.2 Bille dans une gouttière

Considérons une bille \mathfrak{B} , de masse m , de rayon r , de centre d'inertie G , dont le moment d'inertie par rapport à tout axe Δ_G passant par G vaut $J_{\Delta G} = \frac{2}{5} mr^2$.

Cette bille est supposée rouler sans glissement dans une gouttière de forme cylindrique, de rayon R . On note I le point de contact de \mathfrak{B} avec la gouttière et :

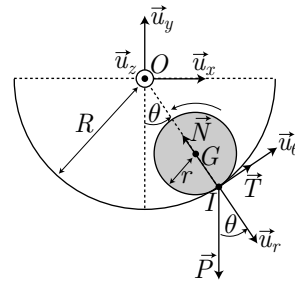
$$\vec{v}_{G/\mathcal{R}} = (R - r)\dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

la vitesse de G dans le référentiel d'étude \mathcal{R} , supposé galiléen, auquel on associe la base polaire $\mathcal{B} = \{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z\}$.

Dans ce référentiel, la position de \mathfrak{B} est repérée par l'angle θ que fait OG avec la verticale, tandis que son vecteur rotation vaut :

$$\vec{\Omega}_{\mathfrak{B}/\mathcal{R}} = \dot{\varphi} \vec{u}_z$$

Établissons l'équation du mouvement en utilisant deux méthodes différentes :



PREMIÈRE MÉTHODE : LOIS GÉNÉRALES DE LA MÉCANIQUE

1. Théorème de la résultante cinétique

La résultante cinétique de \mathfrak{B} dans \mathcal{R} vaut :

$$\begin{aligned}\vec{\mathfrak{P}}_{G/\mathcal{R}} &= m \vec{v}_{G/\mathcal{R}} = m(R-r)\dot{\theta} \vec{u}_\theta \\ \Rightarrow \frac{d\vec{\mathfrak{P}}_{G/\mathcal{R}}}{dt} &= m(R-r)\ddot{\theta} \vec{u}_\theta - m(R-r)\dot{\theta}^2 \vec{u}_r = \begin{pmatrix} -m(R-r)\dot{\theta}^2 \\ m(R-r)\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\end{aligned}$$

tandis que la résultante des forces extérieures est composée du poids \vec{P} de \mathfrak{B} et de la réaction de la gouttière, de composantes normale $\vec{N} = -N \vec{u}_r$ et tangentielle $\vec{T} = T \vec{u}_\theta$:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} = \begin{pmatrix} mg \cos \theta \\ -mg \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + \begin{pmatrix} -N \\ T \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Le théorème de la résultante cinétique impose alors :

$$\frac{d\vec{\mathfrak{P}}_{G/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} \Rightarrow \begin{pmatrix} -m(R-r)\dot{\theta}^2 \\ m(R-r)\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} mg \cos \theta - N \\ -mg \sin \theta + T \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

d'où il découle que :

$$\begin{cases} N = mg \cos \theta + m(R-r)\dot{\theta}^2 \\ T = mg \sin \theta + m(R-r)\ddot{\theta} \end{cases} \quad (56)$$

2. Théorème du moment cinétique

Puisque \mathfrak{B} est symétrique par rapport à l'axe $\Delta_G = (G, \vec{u}_z)$ et puisque l'énoncé donne le moment d'inertie de \mathfrak{B} par rapport à cet axe, le moment cinétique sera calculé par rapport à Δ_G , dans le référentiel barycentrique :

$$\begin{aligned}\vec{L}^* &\hat{=} \vec{L}_G^* = J_{\Delta_G} \vec{\Omega}_{\mathfrak{B}/\mathcal{R}} = \frac{2}{5} mr^2 \dot{\varphi} \vec{u}_z \\ \Rightarrow L_{\Delta_G}^* &= \vec{L}^* \cdot \vec{u}_z = \frac{2}{5} mr^2 \dot{\varphi}\end{aligned}$$

Quant au moment, en G , des forces extérieures, il vaut :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_{G \text{ ext}} &= \vec{GG} \wedge \vec{P} + \vec{GI} \wedge \vec{N} + \vec{GI} \wedge \vec{T} \\ &= \vec{GI} \wedge \vec{T} \text{ car } \vec{GI} \parallel \vec{N} \\ &= (r \vec{u}_r) \wedge (T \vec{u}_\theta) = rT \vec{u}_z\end{aligned}$$

Le théorème du moment cinétique devient alors :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{G \text{ ext}} &\Rightarrow \frac{d}{dt} (\vec{L}^* \cdot \vec{u}_z) = \vec{\mathcal{M}}_{G \text{ ext}} \cdot \vec{u}_z \\ \Rightarrow \frac{dL_{\Delta_G}^*}{dt} &= rT \Rightarrow \frac{2}{5} mr^2 \ddot{\varphi} = rT\end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$T = \frac{2}{5} m r \ddot{\varphi} \quad (57)$$

3. Condition de roulement sans glissement

Les trois équations (56) et (57) font intervenir quatre inconnues : N , T , θ et φ . Il convient alors d'introduire une nouvelle équation entre ces inconnues, laquelle équation provient en général d'une contrainte imposée au système. Par exemple, les vitesses de G et I dans \mathcal{R} sont liées :

$$\vec{v}_{G/\mathcal{R}} = \vec{v}_{I/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathfrak{B}/\mathcal{R}} \wedge \vec{IG}$$

où $\vec{v}_{I/\mathcal{R}} = \vec{0}$ lorsque \mathfrak{B} roule sans glisser dans la gouttière. C'est pourquoi :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{G/\mathcal{R}} &= \vec{\Omega}_{\mathfrak{B}/\mathcal{R}} \wedge \vec{IG} \Rightarrow (R-r)\dot{\theta} \vec{u}_\theta = (\dot{\varphi} \vec{u}_z) \wedge (-r \vec{u}_r) \\ &\Rightarrow (R-r)\dot{\theta} \vec{u}_\theta = -r\dot{\varphi} \vec{u}_\theta \\ &\Rightarrow r\dot{\varphi} = -(R-r)\dot{\theta} \Rightarrow r\ddot{\varphi} = -(R-r)\ddot{\theta} \end{aligned} \quad (58)$$

Ainsi, la relation (57) devient :

$$T = \frac{2}{5} m \times r \ddot{\varphi} = -\frac{2}{5} m(R-r)\ddot{\theta}$$

ce qui permet d'écrire la deuxième équation du système (56) sous la forme :

$$\begin{aligned} -\frac{2}{5} m(R-r)\ddot{\theta} &= mg \sin \theta + m(R-r)\ddot{\theta} \\ &\Rightarrow \frac{7}{5} m(R-r)\ddot{\theta} + mg \sin \theta = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R-r)} \sin \theta = 0} \end{aligned} \quad (59)$$

Notamment, si les oscillations sont de faible amplitude, cette équation différentielle se linéarise :

$$\sin \theta \sim \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R-r)} \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

et fait apparaître la pulsation de ces oscillations :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}}$$

DEUXIÈME MÉTHODE : THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

1. Expression de l'énergie cinétique

Dans le référentiel \mathcal{R} , l'énergie cinétique se calcule à l'aide de la loi générale (55) de la page (48) :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} &= \frac{1}{2} m v_{G/\mathcal{R}}^2 + \frac{1}{2} J_{\Delta G} \Omega_{\mathfrak{B}/\mathcal{R}}^2 \\ &= \frac{1}{2} m(R-r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} m r^2 \dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

où la relation (58) indique que :

$$\begin{aligned} r^2 \dot{\varphi}^2 &= (R-r)^2 \dot{\theta}^2 \Rightarrow \mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m(R-r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} m(R-r)^2 \dot{\theta}^2 \\ \Rightarrow \mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} &= \frac{1}{2} \times \frac{7}{5} m(R-r)^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

2. Puissance mécanique reçue

Puisque \mathfrak{B} est soumis à son poids \vec{P} , à \vec{N} et \vec{T} , la puissance mécanique reçue par \mathfrak{B} vaut :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\text{ext}} = \mathcal{P}(\vec{P}) + \mathcal{P}(\vec{N}) + \mathcal{P}(\vec{T})$$

Or, le poids étant un glisseur, la relation (53) de la page 45 fournit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\vec{P}) &= \vec{P} \cdot \vec{v}_{G/\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} mg \cos \theta \\ -mg \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ (R-r)\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \\ &= -mg(R-r) \sin \theta \dot{\theta} \end{aligned}$$

Quant aux composantes \vec{N} et \vec{T} de la réaction exercée par la gouttière, elles sont à l'origine des puissances :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\vec{N}) &= \vec{v}_{I/\mathcal{R}} \cdot \vec{N} + \vec{\Omega}_{\mathfrak{B}/\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_I(\vec{N}) \\ &= 0 \text{ car } \begin{cases} \vec{v}_{I/\mathcal{R}} = \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}_I(\vec{N}) = \vec{II} \wedge \vec{N} = \vec{0} \end{cases} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\vec{T}) &= \vec{v}_{I/\mathcal{R}} \cdot \vec{T} + \vec{\Omega}_{\mathfrak{B}/\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_I(\vec{T}) \\ &= 0 \text{ car } \begin{cases} \vec{v}_{I/\mathcal{R}} = \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}_I(\vec{T}) = \vec{II} \wedge \vec{T} = \vec{0} \end{cases} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\text{ext}} = -mg(R-r) \sin \theta \dot{\theta}$$

3. Théorème de l'énergie cinétique

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

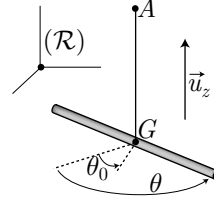
$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}}{dt} &= \mathcal{P} \Rightarrow \frac{7}{5} m(R-r)^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = -mg(R-r) \sin \theta \dot{\theta} \\ \Rightarrow &\boxed{\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R-r)} \sin \theta = 0} \end{aligned}$$

Puisque cette équation est la même que l'équation (59), elle amène les mêmes solutions.

4.3.3 Pendule de torsion

Un pendule de torsion est composé d'une tige de longueur ℓ , de masse m et de centre d'inertie G , par lequel passe un fil élastique, dont l'autre extrémité est attachée un point A , fixe dans le référentiel d'étude \mathcal{R} . Ce fil exerce, sur la tige, un couple dont le moment en G vaut :

$$\vec{\mathcal{M}}_{G \text{ ext}} = \vec{\Gamma} = -C (\theta - \theta_0) \vec{u}_z$$



où C est la constante de torsion du fil et θ_0 est l'angle repérant la position d'équilibre de la tige. Enfin, on rappelle l'expression du moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe $\Delta_G = (G, \vec{u}_z)$: $J_{\Delta G} = \frac{1}{12} m \ell^2$.

Déterminons l'équation du mouvement de la tige à l'aide du théorème de l'énergie cinétique.

1. Expression de l'énergie cinétique

Puisque G est immobile dans \mathcal{R} , le théorème de Koenig fournit directement :

$$\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m v_{G/\mathcal{R}}^2 + \frac{1}{2} J_{\Delta G} \Omega_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}^2$$

où $\vec{v}_{G/\mathcal{R}} = \vec{0}$ et $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} = \dot{\theta} \vec{u}_z$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} &= \frac{1}{2} J_{\Delta G} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} m \ell^2 \dot{\theta}^2 \\ \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}}{dt} &= \frac{1}{12} m \ell^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} \end{aligned}$$

2. Expression de la puissance mécanique

La seule action extérieure étant celle du fil de torsion, la puissance mécanique reçue par la tige vaut :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\text{ext}} = \vec{v}_{G/\mathcal{R}} \cdot \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{\mathcal{M}}_{G \text{ ext}} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}$$

où $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$ est la résultante des actions exercées par le fil et $\vec{v}_{G/\mathcal{R}} = \vec{0}$. Il s'ensuit que :

$$\mathcal{P} = [-C (\theta - \theta_0) \vec{u}_z] \cdot (\dot{\theta} \vec{u}_z) = -C (\theta - \theta_0) \dot{\theta}$$

3. Théorème de l'énergie cinétique

Selon ce théorème :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}}{dt} = \mathcal{P} &\Rightarrow \frac{1}{12} m \ell^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = -C (\theta - \theta_0) \dot{\theta} \\ &\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{12C}{m \ell^2} (\theta - \theta_0) = 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que la tige est animée d'un mouvement oscillatoire, de pulsation

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{12C}{m \ell^2}}.$$

4.4 Énergie potentielle

4.4.1 Actions extérieures

Définition 27. Soit $\psi(x, y, z)$ un champ scalaire, dont la valeur dépend du point M_i où il est mesuré. On appelle **gradient** de ψ , calculé en $M_i(x_i, y_i, z_i)$, la grandeur :

$$\left(\overrightarrow{\text{grad}} \psi \right)_{M_i} \hat{=} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{M_i} \vec{e}_x + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{M_i} \vec{e}_y + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{M_i} \vec{e}_z$$

Soit un point $M_i(x_i, y_i, z_i)$ se déplaçant vers un point $M'_i(x_i + dx_i, y_i + dy_i, z_i + dz_i)$:

$$d\overrightarrow{OM_i} \hat{=} \overrightarrow{M_i M'_i} = \begin{pmatrix} dx_i \\ dy_i \\ dz_i \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{où } \mathcal{B} = \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$$

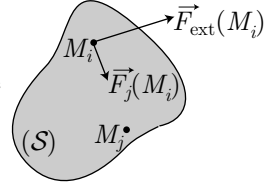
Au cours de ce déplacement, le champ ψ varie de la quantité :

$$\begin{aligned} d\psi &\hat{=} \psi(x_i + dx_i, y_i + dy_i, z_i + dz_i) - \psi(x_i, y_i, z_i) \\ &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{M_i} dx_i + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{M_i} dy_i + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{M_i} dz_i \end{aligned}$$

On s'assure aisément que cette équation différentielle s'exprime aussi sous forme d'un produit scalaire :

$$d\psi = \left(\overrightarrow{\text{grad}} \psi \right)_{M_i} \cdot d\overrightarrow{OM_i}$$

Considérons un solide (S) constitué des points $\{M_1, \dots, M_N\}$. Chaque point M_i de (S) est soumis à une résultante extérieure $\vec{F}_{\text{ext}}(M_i)$ et à une résultante $\vec{F}_{\text{int}}(M_i)$ qui provient des interactions avec les autres points de (S) :



$$\vec{F}_{\text{int}}(M_i) \hat{=} \sum_{j \neq i}^N \vec{F}_j(M_i) \Rightarrow \vec{F}(M_i) = \vec{F}_{\text{ext}}(M_i) + \vec{F}_{\text{int}}(M_i)$$

Définition 28. La résultante des actions extérieures : $\vec{F}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{\text{ext}}(M_i)$ est dite conservative s'il existe une fonction $\mathcal{E}_{p \text{ ext}}$ dont la variation s'identifie au travail de \vec{F}_{ext} :

$$d\mathcal{E}_{p \text{ ext}} = -\delta W_{\text{ext}} \hat{=} - \sum_{i=1}^N \vec{F}_{\text{ext}}(M_i) \cdot d\overrightarrow{OM_i} \quad (60)$$

Dans ce cas $\mathcal{E}_{p\text{ext}}$ est l'**énergie potentielle** de (S) provenant des actions extérieures. En admettant que l'énergie potentielle soit additive, on peut attribuer, à chaque point M_i de (S) , une énergie potentielle $\mathcal{E}_{p\text{ext}}(M_i)$ ayant pour origine les actions extérieures à (S) :

$$\mathcal{E}_{p\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_{p\text{ext}}(M_i) \Rightarrow d\mathcal{E}_{p\text{ext}} = \sum_{i=1}^N d\mathcal{E}_{p\text{ext}}(M_i)$$

L'identification avec la relation (60) conduit à :

$$d\mathcal{E}_{p\text{ext}}(M_i) = -\vec{F}_{\text{ext}}(M_i) \cdot d\vec{OM}_i = \left(\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_{p\text{ext}} \right)_{M_i} \cdot d\vec{OM}_i$$

d'où il ressort qu'une force extérieure conservative dérive d'une énergie potentielle :

$$\vec{F}_{\text{ext}}(M_i) \text{ conservative} \Leftrightarrow \exists \mathcal{E}_{p\text{ext}} / \vec{F}_{\text{ext}}(M_i) = - \left(\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_{p\text{ext}} \right)_{M_i}$$

EXEMPLE N°1

La puissance exercée par le poids est définie par :

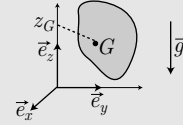
$$\mathcal{P}(\vec{P}) = \frac{\delta W(\vec{P})}{dt}$$

Soit, conformément à la relation (60), l'énergie potentielle de pesanteur \mathcal{E}_{pp} est définie par :

$$d\mathcal{E}_{pp} = -\delta W(\vec{P}) \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}_{pp}}{dt} = -\mathcal{P}(\vec{P})$$

où la puissance de \vec{P} est donnée par la relation (53) de la page 45 :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\vec{P}) &= \vec{P} \cdot \vec{v}_{G/\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_G \\ \dot{y}_G \\ \dot{z}_G \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \\ &= -mg \frac{dz_G}{dt} = -\frac{d}{dt}(mgz_G) \end{aligned}$$



Il s'ensuit que :

$$\frac{d\mathcal{E}_{pp}}{dt} = \frac{d}{dt}(mgz_G) \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_{pp} = mgz_G + \text{cte}}$$

EXEMPLE N°2

Considérons un solide (S) dont un des points M est relié à un ressort fixé en un point O , lequel ressort est caractérisé par sa longueur $r = OM$, sa longueur à vide r_0 et sa constante k . À nouveau, l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{p\text{ext}}$ de la force élastique est reliée à la puissance \mathcal{P}_{ext} de cette force :

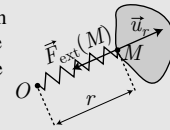
$$\boxed{\frac{d\mathcal{E}_{p\text{ext}}}{dt} = -\mathcal{P}_{\text{ext}}} \quad (61)$$

qui est donnée par :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}} + \vec{\mathcal{M}}_M(\vec{F}_{\text{ext}}) \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}$$

Or, \vec{F}_{ext} étant un glisseur de point d'application M :

$$\vec{\mathcal{M}}_M(\vec{F}_{\text{ext}}) = \vec{0} \Rightarrow \mathcal{P}_{\text{ext}} = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$



tandis que :

$$\vec{F}_{\text{ext}} = -k(r - r_0) \vec{u}_r$$

avec, en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r \Rightarrow \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + r \sin \theta \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_\varphi$$

Il s'ensuit que :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = -k(r - r_0) \frac{dr}{dt} = -\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} k(r - r_0)^2 \right]$$

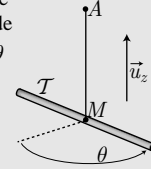
La relation (61) fournit alors :

$$\frac{d\mathcal{E}_{p\text{ext}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} k(r - r_0)^2 \right] \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_{p\text{ext}} = \frac{1}{2} k(r - r_0)^2 + \text{cte}}$$

EXEMPLE N°3 : PENDULE DE TORSION

Considérons une tige \mathcal{T} , dont un des points M est attaché à l'extrémité d'un fil de torsion, dont l'autre extrémité A est fixe. Ce fil de torsion exerce en M un couple de moment $\vec{\Gamma} = -C(\theta - \theta_0) \vec{u}_z$, θ étant l'angle de torsion du fil et θ_0 la valeur de θ au repos. La puissance des actions extérieures qui s'exercent sur \mathcal{T} vaut alors :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}} + \vec{\mathcal{M}}_{M\text{ext}} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{T}/\mathcal{R}}$$



où $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$, $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{0}$, $\vec{\mathcal{M}}_{M\text{ext}} = \vec{\Gamma}$ et $\vec{\Omega}_{\mathcal{T}/\mathcal{R}} = \dot{\theta} \vec{u}_z$ conduisent à :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{ext}} &= [-C(\theta - \theta_0) \vec{u}_z] \cdot (\dot{\theta} \vec{u}_z) = -C(\theta - \theta_0) \frac{d\theta}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} C(\theta - \theta_0)^2 \right] \end{aligned}$$

Par conséquent, la loi (61) fournit l'expression de l'énergie potentielle élastique du fil de torsion :

$$\frac{d\mathcal{E}_{p\text{ext}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} C(\theta - \theta_0)^2 \right] \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_{p\text{ext}} = \frac{1}{2} C(\theta - \theta_0)^2 + \text{cte}}$$

Supposons maintenant que chaque point M_i de (S) soit soumis à des forces extérieures de diverses natures (poids, forces électriques, frottements, ...) :

$$\vec{F}_{\text{ext}}(M_i) = \sum_{\alpha=1}^Q \vec{F}_{\text{ext}}^{(\alpha)}(M_i)$$

À chacune de ces forces pourra être associée une énergie potentielle $\mathcal{E}_{p\text{ext}}^{(\alpha)}$, à condition qu'elle soit conservative. La définition (60) fournit non seulement une définition de $\mathcal{E}_{p\text{ext}}^{(\alpha)}$:

$$d\mathcal{E}_{p\text{ext}}^{(\alpha)} \hat{=} - \sum_{i=1}^N \vec{F}_{\text{ext}}^{(\alpha)}(M_i) \cdot d\overrightarrow{OM}_i$$

mais également celle de l'énergie potentielle totale provenant des actions extérieures conservatives :

$$\begin{aligned}
 d\mathcal{E}_{p\text{ ext}} &\hat{=} - \sum_{i=1}^N \vec{F}_{\text{ext}}(M_i) \cdot d\vec{OM}_i \\
 &= - \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^Q \vec{F}_{\text{ext}}^{(\alpha)}(M_i) \cdot d\vec{OM}_i \\
 &= - \sum_{\alpha=1}^Q \sum_{i=1}^N \vec{F}_{\text{ext}}^{(\alpha)}(M_i) \cdot d\vec{OM}_i = \sum_{\alpha=1}^Q d\mathcal{E}_{p\text{ ext}}^{(\alpha)}
 \end{aligned}$$

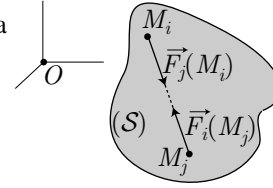
d'où ressort la loi d'additivité des énergies potentielles :

$$\boxed{\mathcal{E}_{p\text{ ext}} = \sum_{\alpha=1}^Q \mathcal{E}_{p\text{ ext}}^{(\alpha)}}$$

4.4.2 Actions intérieures à un système de points

Considérons un système (S) de points en interaction : chaque point M_i de (S) est soumis à une force $\vec{F}_j(M_i)$ de la part des autres points M_j de (S) dont la résultante vaut :

$$\vec{F}_{\text{int}}(M_i) = \sum_{j \neq i}^n \vec{F}_j(M_i)$$



Le travail des forces intérieures à (S) vaut alors :

$$\begin{aligned}
 \delta W_{\text{int}} &\hat{=} \sum_{i=1}^n \vec{F}_{\text{int}}(M_i) \cdot d\vec{OM}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \vec{F}_j(M_i) \cdot d\vec{OM}_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j > i}^n \left[\vec{F}_j(M_i) \cdot d\vec{OM}_i + \vec{F}_i(M_j) \cdot d\vec{OM}_j \right]
 \end{aligned}$$

La loi des actions réciproques impose quant à elle :

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_j(M_i) &= -\vec{F}_i(M_j) \\
 \Rightarrow \delta W_{\text{int}} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j > i}^n \left[-d\vec{OM}_i + d\vec{OM}_j \right] \cdot \vec{F}_i(M_j) \\
 \Rightarrow \delta W_{\text{int}} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j > i}^n \vec{F}_i(M_j) \cdot d\vec{M}_i M_j
 \end{aligned} \tag{62}$$

Définition 29. Les forces extérieures $\vec{F}_j(M_i)$ sont conservatives s'il existe un champ scalaire $\mathcal{E}_{p\text{ int}}$, appelé **énergie potentielle interne**, tel que :

$$\boxed{d\mathcal{E}_{p\text{ int}} \hat{=} -\delta W_{\text{int}}}$$

L'identification avec l'équation (62) conduit à postuler pour l'existence d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_{p\,ij}$ d'interaction de M_i sur M_j :

$$\boxed{d\mathcal{E}_{p\,ij} \hat{=} -\vec{F}_i(M_j) \cdot d\overrightarrow{M_i M_j} \Rightarrow d\mathcal{E}_{p\,\text{int}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n d\mathcal{E}_{p\,ij}} \quad (63)$$

EXEMPLE N°1

Soient $\{M_1, M_2\}$ un système de deux points en interaction élastique : le point M_1 exerce sur le point M_2 une force de rappel qui dépend de la distance $r = M_1 M_2$:

$$\vec{F}_1(M_2) = -k(r - r_0) \vec{u}_r \text{ où } \overrightarrow{M_1 M_2} = r \vec{u}_r$$

r_0 et k désignant des constantes.

La définition (63) donne l'énergie potentielle du système :

$$d\mathcal{E}_{p\,\text{int}} = d\mathcal{E}_{p\,12} \text{ avec } d\mathcal{E}_{p\,12} = -\vec{F}_1(M_2) \cdot d\overrightarrow{M_1 M_2}$$

soit encore, en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_{p\,\text{int}} &= [k(r - r_0) \vec{u}_r] \cdot [dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi] \\ &= k(r - r_0) dr = d \left[\frac{1}{2} k (r - r_0)^2 \right] \end{aligned}$$

d'où il découle que :

$$\boxed{\mathcal{E}_{p\,\text{int}} = \frac{1}{2} k (r - r_0)^2 + \text{cte}}$$

Remarque : Puisque $\vec{F}_i(M_j) = -\vec{F}_j(M_i)$ et :

$$\overrightarrow{M_i M_j} = -\overrightarrow{M_j M_i} \Rightarrow d\overrightarrow{M_i M_j} = -d\overrightarrow{M_j M_i}$$

la définition (63) de l'énergie potentielle d'interaction entre les points M_i et M_j devient :

$$d\mathcal{E}_{p\,ij} = -\vec{F}_j(M_i) \cdot d\overrightarrow{M_j M_i} = d\mathcal{E}_{p\,ji} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_{p\,ij} = \mathcal{E}_{p\,ji}}$$

Compte tenu de cette remarque :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n d\mathcal{E}_{p\,ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n (d\mathcal{E}_{p\,ij} + d\mathcal{E}_{p\,ji}) = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n d\mathcal{E}_{p\,ij}$$

ce qui permet d'exprimer la relation (63) sous la forme suivante :

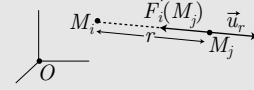
$$\boxed{d\mathcal{E}_{p\,\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n d\mathcal{E}_{p\,ij} / d\mathcal{E}_{p\,ij} \hat{=} -\vec{F}_i(M_j) \cdot d\overrightarrow{M_i M_j}} \quad (64)$$

EXEMPLE N°2

Intéressons-nous à un système de points $\mathcal{S} = \{M_1, \dots, M_n\}$, chaque point M_i portant une charge électrique q_i .

Rappelons que chaque point M_i est soumis à un potentiel électrostatique $V(M_i)$ produit par l'ensemble des autres charges de \mathcal{S} :

$$V(M_i) = \sum_{j \neq i}^n \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 M_i M_j}$$



Puisque $\overrightarrow{M_i M_j} = r \vec{u}_r$ et $\vec{F}_i(M_j) = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$, en coordonnées sphériques la définition (64) et l'énergie potentielle d'interaction entre deux points fournit :

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_{p\,ij} &= \left(-\frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \right) \cdot (dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi) \\ &= -\frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = d\left(\frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \end{aligned}$$

En admettant que l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{p\,ij}$ soit nulle lorsque r tend vers l'infini (M_i et M_j sont infiniment éloignés l'un de l'autre), on obtient :

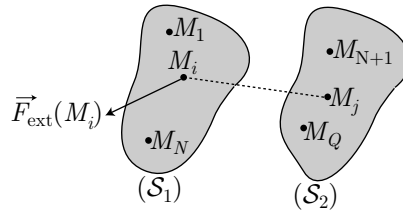
$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{p\,ij} &= \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 M_i M_j} \Rightarrow \mathcal{E}_{p\,\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 M_i M_j} \\ &\Rightarrow \mathcal{E}_{p\,\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(q_i \sum_{j \neq i}^n \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 M_i M_j} \right) \\ &\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_{p\,\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(M_i)} \end{aligned}$$

En notation continue, il convient d'introduire la densité volumique de charge $\rho(M)$ en M :

$$\boxed{\mathcal{E}_{p\,\text{int}} = \frac{1}{2} \iiint_{(\mathcal{S})} \rho(M) V(M) d\tau_M}$$

4.4.3 Systèmes en interaction

Considérons les systèmes de points $\mathcal{S}_1 = \{M_1, \dots, M_n\}$ et $\mathcal{S}_2 = \{M_{N+1}, \dots, M_Q\}$.



Notons $\vec{F}_j(M_i)$ la force qu'un point M_j exerce sur M_i et $\vec{F}_{\text{ext}}(M_i)$ la force que l'extérieur au système $\{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2\}$ exerce sur M_i . Nous noterons $\vec{F}_{2/1}$ la résultante des forces

exercée par \mathcal{S}_2 sur \mathcal{S}_1 et $\vec{F}_{1/2}$ celle que \mathcal{S}_1 exerce sur \mathcal{S}_2 :

$$\vec{F}_{2/1} \hat{=} \sum_{i=1}^N \sum_{j=N+1}^Q \vec{F}_j(M_i) \text{ et } \vec{F}_{1/2} \hat{=} \sum_{j=N+1}^Q \sum_{i=1}^N \vec{F}_i(M_j)$$

De même, on notera $\vec{\mathcal{M}}_{K_1}(F_{2/1})$ le moment en un point K_1 des actions exercées par \mathcal{S}_2 sur \mathcal{S}_1 et $\vec{\mathcal{M}}_{K_2}(F_{1/2})$ le moment en un point K_2 des actions exercées par \mathcal{S}_1 sur \mathcal{S}_2 :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_{K_1}(F_{2/1}) &\hat{=} \sum_{i=1}^N \overrightarrow{K_1 M_i} \wedge \vec{F}_{2/1}(M_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=N+1}^Q \overrightarrow{K_1 M_i} \wedge \vec{F}_j(M_i) \end{aligned}$$

et :

$$\vec{\mathcal{M}}_{K_2}(F_{1/2}) \hat{=} \sum_{j=N+1}^Q \overrightarrow{K_2 M_j} \wedge \vec{F}_{1/2}(M_j) = \sum_{j=N+1}^Q \sum_{i=1}^N \overrightarrow{K_2 M_j} \wedge \vec{F}_i(M_j)$$

où l'on a défini les forces résultantes :

$$\vec{F}_{2/1}(M_i) \hat{=} \sum_{j=N+1}^Q \vec{F}_j(M_i) \text{ et } \vec{F}_{1/2}(M_j) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i(M_j)$$

Chacun des points M_i de \mathcal{S}_1 étant soumis à une force :

$$\vec{F}(M_i) = \vec{F}_{\text{ext}}(M_i) + \sum_{j \neq i}^N \vec{F}_j(M_i) + \sum_{j=N+1}^Q \vec{F}_j(M_i)$$

la puissance mécanique reçue par \mathcal{S}_1 vaut :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= \sum_{i=1}^N \vec{F}(M_i) \cdot \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_{\text{ext}}(M_i) \cdot \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \vec{F}_j(M_i) \cdot \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{j=N+1}^Q \vec{F}_j(M_i) \cdot \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} \\ &= \mathcal{P}_{1 \text{ ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}(1/1) + \mathcal{P}_{\text{int}}(2/1) \end{aligned}$$

où l'on a défini :

- la puissance que l'extérieur du système $\{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2\}$ exerce sur \mathcal{S}_1 :

$$\mathcal{P}_{1 \text{ ext}} \hat{=} \sum_{i=1}^N \vec{F}_{\text{ext}}(M_i) \cdot \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}$$

– la puissance des actions intérieures à \mathcal{S}_1 :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(1/1) \hat{=} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \vec{F}_j(M_i) \cdot \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}$$

– la puissance des actions que \mathcal{S}_2 exerce sur \mathcal{S}_1 :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(2/1) \hat{=} \sum_{i=1}^N \sum_{j=N+1}^Q \vec{F}_j(M_i) \cdot \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}$$

De même, la puissance mécanique reçue par \mathcal{S}_1 s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2 &= \sum_{j=N+1}^Q \vec{F}(M_j) \cdot \vec{v}_{M_j/\mathcal{R}} \\ &= \sum_{j=N+1}^N \vec{F}_{\text{ext}}(M_j) \cdot \vec{v}_{M_j/\mathcal{R}} + \sum_{j=N+1}^Q \sum_{i \neq j}^Q \vec{F}_i(M_j) \cdot \vec{v}_{M_j/\mathcal{R}} \\ &\quad + \sum_{j=N+1}^Q \sum_{i=1}^N \vec{F}_i(M_j) \cdot \vec{v}_{M_j/\mathcal{R}} \\ &= \mathcal{P}_{2\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}(2/2) + \mathcal{P}_{\text{int}}(1/2) \end{aligned}$$

où l'on a défini de la même manière les différents termes de puissance.

Par conséquent la puissance totale, reçue par le système, des actions mécaniques qui s'exercent sur $\{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2\}$ vaut :

$$\boxed{\mathcal{P} = \mathcal{P}_{1\text{ext}} + \mathcal{P}_{2\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}(1/1) + \mathcal{P}_{\text{int}}(2/2) + \mathcal{P}_{\text{int}}(1/2) + \mathcal{P}_{\text{int}}(2/1)} \quad (65)$$

4.4.4 Solides indéformables en interaction

Nous avons déjà montré que, pour des solides indéformables : $\mathcal{P}_{\text{int}}(1/1) = 0$ et $\mathcal{P}_{\text{int}}(2/2) = 0$, ce qui simplifie l'expression de \mathcal{P} :

$$\boxed{\mathcal{P} = \mathcal{P}_{1\text{ext}} + \mathcal{P}_{2\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}(1/2) + \mathcal{P}_{\text{int}}(2/1) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dt}} \quad (66)$$

si toutes les actions sont conservatives.

Considérons un point K_1 de \mathcal{S}_1 , de sorte que :

$$\forall M_i \in \mathcal{S}_1, \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} = \vec{v}_{K_1/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{K_1 M_i}$$

ce qui permet de poser :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{int}}(2/1) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=N+1}^Q \vec{F}_j(M_i) \cdot \left(\vec{v}_{K_1/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{K_1 M_i} \right) \\ &= \vec{F}_{2/1} \cdot \vec{v}_{K_1/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{R}} \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=N+1}^Q \overrightarrow{K_1 M_i} \wedge \vec{F}_j(M_i) \end{aligned}$$

soit encore :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(2/1) = \vec{F}_{2/1} \cdot \vec{v}_{K_1/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_{K_1}(\vec{F}_{2/1}) \quad (67)$$

De la même manière, on trouve, pour un point K_2 de \mathcal{S}_2 :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(1/2) = \vec{F}_{1/2} \cdot \vec{v}_{K_2/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_2/\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_{K_2}(\vec{F}_{1/2}) \quad (68)$$

EXEMPLE

Considérons deux solides indéformables en interaction élastique : (\mathcal{S}_1) exerce sur (\mathcal{S}_2) une force $\vec{F}_{1/2}$ au point K_2 (il s'agit d'un glisseur) tandis que (\mathcal{S}_2) exerce sur (\mathcal{S}_1) une force $\vec{F}_{2/1}$ en K_1 (il s'agit aussi d'un glisseur). Les points K_1 et K_2 sont repérés dans un référentiel \mathcal{R} de centre O et sont distants de r . Le vecteur \vec{u}_r est un vecteur unitaire directeur de K_1K_2 :

$$\overrightarrow{K_1K_2} = r \vec{u}_r$$

tandis que la force élastique adopte la forme :

$$\vec{F}_{1/2} = -k(r - r_0) \vec{u}_r$$

où k et r_0 sont des constantes. La puissance des actions intérieures à $\{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2\}$ s'écrit alors :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \mathcal{P}_{\text{int}}(2/1) + \mathcal{P}_{\text{int}}(1/2)$$

où la loi (68) indique que :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(1/2) = \vec{F}_{1/2} \cdot \vec{v}_{K_2/\mathcal{R}} \text{ car } \vec{\mathcal{M}}_{K_2}(\vec{F}_{1/2}) = \vec{0}$$

et, compte tenue de la loi des actions réciproques : $\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2}$, la loi (67) devient :

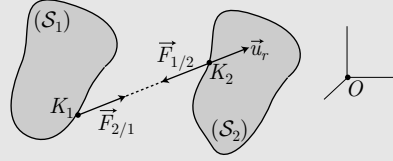
$$\mathcal{P}_{\text{int}}(2/1) = -\vec{F}_{1/2} \cdot \vec{v}_{K_1/\mathcal{R}}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{int}} &= \vec{F}_{1/2} \cdot (\vec{v}_{K_2/\mathcal{R}} - \vec{v}_{K_1/\mathcal{R}}) \\ &= \vec{F}_{1/2} \cdot \left[\left(\frac{d\overrightarrow{OK_2}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} - \left(\frac{d\overrightarrow{OK_1}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \right] = \vec{F}_{1/2} \cdot \left(\frac{d\overrightarrow{K_1K_2}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \\ &= [-k(r - r_0) \vec{u}_r] \cdot \left[\frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt} \right] \\ &= -k(r - r_0) \frac{dr}{dt} \text{ car } \vec{u}_r \perp \frac{d\vec{u}_r}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} k (r - r_0)^2 \right] \end{aligned}$$

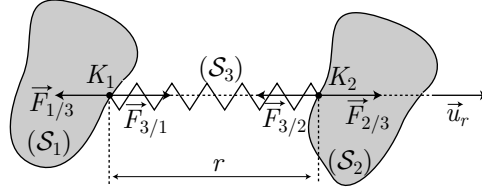
La relation (66) se simplifie alors :

$$\begin{aligned} -\frac{d\mathcal{E}_{p\text{int}}}{dt} &= \mathcal{P}_{\text{int}} = -\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} k (r - r_0)^2 \right] \\ \Rightarrow \quad \mathcal{E}_{p\text{int}} &= \frac{1}{2} k (r - r_0)^2 + \text{cte} \end{aligned} \quad (69)$$



4.4.5 Énergie potentielle d'un ressort

Considérons maintenant un système composé de deux solides indéformables \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 et d'un ressort \mathcal{S}_3 liant \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 aux points respectifs K_1 et K_2 ; on notera $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3\}$ le système complet.



Le ressort exerce, aux points K_1 et K_2 , les forces respectives :

$$\vec{F}_{3/1} = k(r - r_0) \vec{u}_r \text{ et } \vec{F}_{3/2} = -k(r - r_0) \vec{u}_r / \overrightarrow{K_1 K_2} = r \vec{u}_r$$

où \vec{u}_r est un vecteur unitaire directeur de $\overrightarrow{K_1 K_2}$, r est la distance entre K_1 et K_2 (longueur du ressort), r_0 désigne la longueur à vide du ressort et k sa raideur. Par réaction, \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 exercent sur le ressort, aux points K_1 et K_2 , les forces respectives $\vec{F}_{1/3} = -\vec{F}_{3/1}$ et $\vec{F}_{2/3} = -\vec{F}_{3/2}$. En généralisant le résultat (65), il apparaît que l'énergie potentielle intérieure à \mathcal{S} vérifie :

$$\begin{aligned} -\frac{d\mathcal{E}_{p\text{int}}}{dt} &= \mathcal{P}_{\text{int}}(1/1) + \mathcal{P}_{\text{int}}(2/2) + \mathcal{P}_{\text{int}}(3/3) + \mathcal{P}_{\text{int}}(1/2) + \mathcal{P}_{\text{int}}(2/1) \\ &\quad + \mathcal{P}_{\text{int}}(1/3) + \mathcal{P}_{\text{int}}(3/1) + \mathcal{P}_{\text{int}}(3/2) + \mathcal{P}_{\text{int}}(2/3) \end{aligned}$$

où :

- puisque les solides \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 sont indéformables :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(1/1) = 0 \text{ et } \mathcal{P}_{\text{int}}(2/2) = 0$$

- $\mathcal{P}_{\text{int}}(3/3) \neq 0$ désigne la puissance des actions internes au ressort, au cours de sa déformation ;
- $\mathcal{P}_{\text{int}}(1/2) = 0$ et $\mathcal{P}_{\text{int}}(2/1) = 0$ car \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 n'interagissent pas directement l'un sur l'autre ;
- les forces $\vec{F}_{1/3}$ et $\vec{F}_{3/1}$ s'exercent sur le même point K_1 , auquel cas les relations (67) et (68) indiquent que :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{\text{int}}(1/3) = \vec{F}_{1/3} \cdot \vec{v}_{K_1/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_3/\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_{K_1}(F_{1/3}) \\ \mathcal{P}_{\text{int}}(3/1) = \vec{F}_{3/1} \cdot \vec{v}_{K_1/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_{K_1}(F_{3/1}) \end{cases}$$

Or, $\vec{\mathcal{M}}_{K_1}(F_{1/3}) = \vec{0}$ et $\vec{\mathcal{M}}_{K_1}(F_{3/1}) = \vec{0}$ fournissent alors :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(1/3) + \mathcal{P}_{\text{int}}(3/1) = \underbrace{(\vec{F}_{1/3} + \vec{F}_{3/1})}_{=\vec{0}} \cdot \vec{v}_{K_1/\mathcal{R}} = 0$$

- pour les mêmes raisons :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(2/3) + \mathcal{P}_{\text{int}}(3/2) = 0$$

Finalement, il reste :

$$-\frac{d\mathcal{E}_{p\text{int}}}{dt} = \mathcal{P}_{\text{int}}(3/3) = -\frac{d\mathcal{E}_{p\text{ressort}}}{dt}$$

ce qui montre que le ressort possède une énergie potentielle intrinsèque, donnée par la relation (69) :

$$\mathcal{E}_{p\text{ressort}} = \frac{1}{2} k (r - r_0)^2 + \text{cte}$$

Finalement, l'énergie potentielle du système (\mathcal{S}) pourra s'écrire simplement :

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{p1\text{ ext}} + \mathcal{E}_{p2\text{ ext}} + \mathcal{E}_{p3\text{ ext}} + \mathcal{E}_{p\text{ressort}} \quad (70)$$

4.4.6 Interactions à puissance nulle

Lorsqu'une interaction conservative présente une puissance nulle, l'énergie potentielle qui lui est associée est constante car :

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dt} = \mathcal{P} = 0 \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_p = \text{cte}}$$

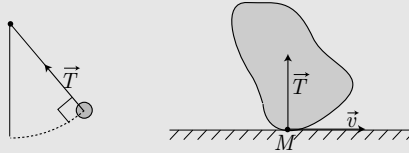
Remarque : On adopte souvent la valeur arbitraire $\mathcal{E}_p = 0$ dans ces cas.

EXEMPLE N°1

Lorsque la force extérieure au système \vec{F} agit sur un point M de (\mathcal{S}), perpendiculairement à son déplacement :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = 0$$

Cette situation se rencontre notamment dans le cas de la tension \vec{T} du pendule pesant ou de la réaction \vec{R} d'un support en l'absence de frottements.



EXEMPLE N°2

Lorsque deux systèmes (\mathcal{S}_1) et (\mathcal{S}_2) interagissent en un seul point K commun, les forces $\vec{F}_{2/1}$ et $\vec{F}_{1/2}$ étant de moments nuls en K (glisseurs de centre K). Les relations (67) et (68) fournissent la puissance interne d'un tel système :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{int}} &= \mathcal{P}_{\text{int}}(1/2) + \mathcal{P}_{\text{int}}(2/1) = \vec{F}_{1/2} \cdot \vec{v}_{K_2/\mathcal{R}} + \vec{F}_{2/1} \cdot \vec{v}_{K_1/\mathcal{R}} \\ &= \vec{F}_{1/2} \cdot (\vec{v}_{K_2/\mathcal{R}} - \vec{v}_{K_1/\mathcal{R}}) \text{ car } \vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2} \end{aligned}$$

avec :

$$\vec{v}_{K_2/\mathcal{R}} - \vec{v}_{K_1/\mathcal{R}} = 0 \text{ car } K_1 = K_2 = K \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_{\text{int}} = 0}$$

C'est à partir de cette loi qu'a été obtenue l'énergie potentielle (70) d'un système muni d'un ressort :

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{p1\text{ ext}} + \mathcal{E}_{p2\text{ ext}} + \mathcal{E}_{p3\text{ ext}} + \mathcal{E}_{p\text{ressort}}$$

4.5 Énergie mécanique

4.5.1 Définition

Chaque point M_i d'un système (S) peut être soumis à une force résultante $\vec{F}(M_i)$ qui présente une composante conservative $\vec{F}^{(c)}(M_i)$ et une composante dissipative² $\vec{F}^{(d)}(M_i)$:

$$\vec{F}(M_i) = \vec{F}^{(c)}(M_i) + \vec{F}^{(d)}(M_i)$$

Le travail de ces actions est alors défini par :

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{i=1}^n \vec{F}(M_i) \cdot d\vec{OM}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}^{(c)}(M_i) \cdot d\vec{OM}_i + \sum_{i=1}^n \vec{F}^{(d)}(M_i) \cdot d\vec{OM}_i \\ &= \delta W^{(c)} + \delta W^{(d)} \end{aligned}$$

où $\delta W^{(c)}$ et $\delta W^{(d)}$ sont respectivement les travaux des forces conservatives et dissipatives. Or, le théorème de l'énergie cinétique permet d'exprimer l'énergie cinétique $\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}$ du système (S) en fonction de δW , tandis que, par définition, l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}$ de (S) s'exprime en fonction de $\delta W^{(c)}$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \delta W = d\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} \\ \delta W^{(c)} = -d\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}} \end{cases} &\Rightarrow d\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} = -d\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}} + \delta W^{(d)} \\ &\Rightarrow d(\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} + \mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}) = \delta W^{(d)} \end{aligned} \quad (71)$$

Définition 30. L'énergie mécanique de (S) est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_{m/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} + \mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}$$

L'identité (71) montre que la variation d'énergie mécanique de (S) provient des forces dissipatives :

$$d\mathcal{E}_{m/\mathcal{R}} = \delta W^{(d)} \quad (72)$$

Remarque : En l'absence de force dissipative (souvent en l'absence de frottements), l'énergie mécanique est alors constante. L'équation :

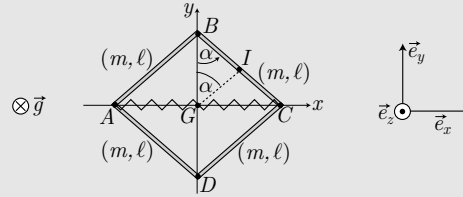
$$\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} + \mathcal{E}_{p/\mathcal{R}} = cte = \mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}(t=0) + \mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}(t=0)$$

donne alors l'équation du mouvement de (S) , son membre de droite pouvant être évalué à la date $t=0$. Cette équation est souvent appelée **intégrale première du mouvement**.

²Une force est dissipative si elle ne dérive pas d'une énergie potentielle, c'est-à-dire si elle n'est pas conservative.

EXEMPLE

Un losange, de centre d'inertie G , est formé de quatre barres identiques homogènes, de masse m et de longueur ℓ . Il se trouve dans le plan horizontal (xGy) , A et C pouvant coulisser sans frottements sur l'axe (Gx) , B et D sur l'axe (Gy) . La déformation du losange est caractérisée par l'angle $\alpha = [\vec{BG}, \vec{BC}]$. Un ressort, de masse négligeable et de raideur k , est accroché entre les points A et C ; il est non tendu pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Les liaisons entre les barres du losange sont supposées parfaites.



On cherche à déterminer la période T_0 des oscillations au voisinage de l'angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$, en fonction de m et k .

On rappelle le moment d'inertie de la barre (BC) par rapport à l'axe (I, \vec{e}_z) : $J_{\Delta I} = \frac{1}{12} m\ell^2$.

RÉPONSE

Pour obtenir l'expression de T_0 , nous remarquons qu'en l'absence de force de frottement (liaisons parfaites), l'énergie mécanique du système {losange + ressort} est une constante ; on peut donc obtenir une intégrale première du mouvement en calculant cette énergie mécanique \mathcal{E}_m :

1. Calcul de l'énergie cinétique

Dans la base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$, le centre I de la barre BC est repéré par sa position \vec{GI} , d'où découle sa vitesse $\vec{v}_{I/\mathcal{R}}$ dans le référentiel \mathcal{R} de G :

$$\vec{GI} = \frac{\ell}{2} \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}_B \Rightarrow \vec{v}_{I/\mathcal{R}} \hat{=} \frac{d\vec{GI}}{dt} = \frac{\ell}{2} \dot{\alpha} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}_B$$

Ainsi, en notant $\vec{\Omega}_{BC/\mathcal{R}} = \dot{\alpha} \vec{e}_z$ le vecteur rotation de la barre (BC) dans (\mathcal{R}) , le théorème de Koenig fournit l'expression de l'énergie cinétique de cette barre :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}(BC) &= \frac{1}{2} m v_{I/\mathcal{R}}^2 + \frac{1}{2} J_{\Delta I} \Omega_{BC/\mathcal{R}}^2 \\ &= \frac{1}{2} m \times \frac{\ell^2}{4} \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} m \ell^2 \times \dot{\alpha}^2 \\ &= \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\alpha}^2 \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\alpha}^2 \times \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Puisque les quatre tiges ont la même énergie cinétique que (BC) , alors que le ressort a une masse nulle (donc une énergie cinétique nulle), l'énergie cinétique

totale du système vaut :

$$\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} = 4 \times \mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}(BC) = \frac{2}{3} m \ell^2 \dot{\alpha}^2$$

2. Calcul de l'énergie potentielle

Par analogie avec la relation (70), l'énergie potentielle du système vaut :

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{p\text{ ext}}(AB) + \mathcal{E}_{p\text{ ext}}(BC) + \mathcal{E}_{p\text{ ext}}(CD) + \mathcal{E}_{p\text{ ext}}(DA) + \mathcal{E}_{p\text{ ressort}}$$

où les quatre premier termes sont constants car les points A , B , C et D se déplacent dans le plan horizontal (Gxy), perpendiculaire aux actions extérieures (poids et réaction des axes).

Quant à l'énergie potentielle du ressort, elle vaut :

$$\mathcal{E}_{p\text{ ressort}} = \frac{1}{2} k (L - L_v)^2 + \text{cte}$$

où $L = AC$ désigne la longueur du ressort et L_v sa longueur au repos (lorsque $\alpha = \frac{\pi}{4}$ rad). Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} L &= AC = 2GC = 2BC \sin \alpha = 2\ell \sin \alpha \\ \Rightarrow L_v &= 2\ell \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) = \ell\sqrt{2} \\ \Rightarrow \mathcal{E}_{p\text{ ressort}} &= \frac{1}{2} k \ell^2 (2 \sin \alpha - \sqrt{2})^2 + \text{cte} \end{aligned}$$

Par conséquent, l'énergie potentielle du système vaut :

$$\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} k \ell^2 (2 \sin \alpha - \sqrt{2})^2 + K$$

où K est une constante.

3. Intégrale première du mouvement

En l'absence de phénomène dissipatif, l'énergie mécanique :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m/\mathcal{R}} &= \mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} + \mathcal{E}_{p/\mathcal{R}} \\ &= \frac{2}{3} m \ell^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} k \ell^2 (2 \sin \alpha - \sqrt{2})^2 + K \end{aligned}$$

est constante. Considérons alors qu'à la date $t = 0$, le système soit abandonné avec un angle α_0 voisin de $\frac{\pi}{4}$, avec une vitesse angulaire nulle ($\dot{\alpha} = 0$). L'énergie mécanique initiale vaut alors :

$$\mathcal{E}_{m/\mathcal{R}}(t = 0) = \frac{1}{2} k \ell^2 (2 \sin \alpha_0 - \sqrt{2})^2 + K$$

Ainsi, l'absence de phénomène dissipatif introduit l'équation :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m/\mathcal{R}} &= \mathcal{E}_{m/\mathcal{R}}(t = 0) \\ \Rightarrow \frac{2}{3} m \ell^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} k \ell^2 (2 \sin \alpha - \sqrt{2})^2 &= \frac{1}{2} k \ell^2 (2 \sin \alpha_0 - \sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

d'où découle l'intégrale première du mouvement :

$$\dot{\alpha}^2 + \frac{3k}{4m} (2 \sin \alpha - \sqrt{2})^2 = \frac{3k}{4m} (2 \sin \alpha_0 - \sqrt{2})^2 \quad (73)$$

4. Résolution de l'équation du mouvement

Supposons que le mouvement du système soit caractérisé par un angle $\alpha = \frac{\pi}{4} + \varepsilon$ très voisin de $\frac{\pi}{4}$ ($|\varepsilon| \ll \frac{\pi}{4}$), qui autorise l'emploi d'un développement limité :

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \sin \left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon \right) \sim \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) + \varepsilon \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \varepsilon \\ \Rightarrow 2 \sin \alpha - \sqrt{2} &\simeq \sqrt{2} \varepsilon \text{ et } 2 \sin \alpha_0 - \sqrt{2} \simeq \sqrt{2} \varepsilon_0\end{aligned}$$

En remarquant que :

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \varepsilon \Rightarrow \dot{\alpha} = \dot{\varepsilon}$$

l'équation (73) se linéarise :

$$\dot{\varepsilon}^2 + \frac{3k}{2m} \varepsilon^2 = \frac{3k}{2m} \varepsilon_0^2 \quad (74)$$

Deux méthodes permettent d'extraire, de cette équation, l'expression de T_0 :

– La dérivation de l'équation (74) fournit directement l'équation différentielle :

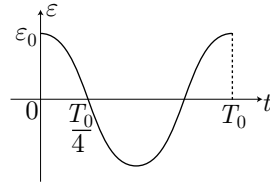
$$2\dot{\varepsilon}\ddot{\varepsilon} + \frac{3k}{m} \varepsilon \dot{\varepsilon} = 0 \Rightarrow \ddot{\varepsilon} + \frac{3k}{2m} \varepsilon = 0$$

dont la solution est harmonique, de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{2m}}$ et donc de période :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{3k}}$$

– Entre la date $t = 0$ et la date $t = \frac{T_0}{4}$, ε décroît de ε_0 à 0, tandis que l'équation (74) s'écrit :

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right)^2 = \frac{3k}{2m} (\varepsilon_0^2 - \varepsilon^2) \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} = -\sqrt{\frac{3k}{2m}} \sqrt{\varepsilon_0^2 - \varepsilon^2}$$



le signe négatif provenant de la décroissance de ε . Ainsi :

$$dt = -\sqrt{\frac{2m}{3k}} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon_0^2 - \varepsilon^2}} \Rightarrow \int_0^{T_0/4} dt = -\sqrt{\frac{2m}{3k}} \int_{\varepsilon_0}^0 \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon_0^2 - \varepsilon^2}}$$

Le changement de variable :

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_0 \sin u \Rightarrow d\varepsilon = \varepsilon_0 \cos u \, du \\ \Rightarrow \varepsilon_0^2 - \varepsilon^2 &= \varepsilon_0^2 (1 - \sin^2 u) = \varepsilon_0^2 \cos^2 u\end{aligned}$$

conduit à :

$$\begin{aligned}\frac{T_0}{4} &= -\sqrt{\frac{2m}{3k}} \int_{\pi/2}^0 \frac{\varepsilon_0 \cos u \, du}{\varepsilon_0 \cos u} = \frac{2m}{3k} \int_0^{\pi/2} du \\ \Rightarrow T_0 &= 4 \times \sqrt{\frac{2m}{3k}} \times \frac{\pi}{2} \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{3k}}\end{aligned}$$

4.5.2 Équilibre d'un système

Soit $\mathcal{S} = \{M_1, \dots, M_n\}$ un système de points étudiés dans un référentiel galiléen \mathcal{R} d'origine O et soumis à des forces exclusivement conservatives $\vec{F}^{(c)}(M_i)$. La variation d'énergie potentielle $\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}$ de \mathcal{S} est alors liée au travail $\delta W^{(c)}$ de ces forces :

$$d\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}} \hat{=} - \sum_{i=1}^n \vec{F}^{(c)}(M_i) \cdot d\vec{OM}_i \quad (75)$$

Supposons que \mathcal{S} soit totalement décrit, en mécanique, par un paramètre ξ (position, angle, ...); l'équation précédente devient :

$$\frac{d\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}}{d\xi} = - \sum_{i=1}^n \vec{F}^{(c)}(M_i) \cdot \frac{d\vec{OM}_i}{d\xi}$$

- Si le système \mathcal{S} est en équilibre, chacun des points M_i (qui occupe une position M_{ie} correspondant à $\xi = \xi_e$) possède une accélération $\vec{a}_{M_i}(\xi_e) = \vec{0}$, de sorte que :

$$\vec{F}^{(c)}(M_{ie}) = m_i \vec{a}_{M_i}(\xi_e) = \vec{0} \Rightarrow \left(\frac{d\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}}{d\xi} \right)_{\xi_e} = 0$$

ce qui montre qu'un système en équilibre présente un extremum d'énergie potentielle.

- Si le système \mathcal{S} présente un extremum d'énergie potentielle en $\xi = \xi_e$, le gradient $\vec{\text{grad}} \mathcal{E}_p$ s'annule en $\xi = \xi_e$. Or, la relation (75) montre que :

$$\vec{F}^{(c)}(M_{ie}) = -\vec{\text{grad}} \mathcal{E}_p(M_{ie}) = \vec{0}$$

c'est-à-dire que les points de \mathcal{S} sont soumis à une force résultante nulle.

Par conséquent, rechercher les positions d'équilibre de \mathcal{S} revient à rechercher les extrema de $\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}$. Considérons maintenant qu'il existe une fonction $\psi(\xi)$ permettant d'écrire l'énergie cinétique de \mathcal{S} sous la forme :

$$\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} = \psi(\xi) \times \dot{\xi}^2$$

tandis qu'au voisinage d'une position d'équilibre ($\xi = \xi_e$), l'énergie potentielle admet pour développement limité d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}(\xi) &\simeq \mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}(\xi_e) + (\xi - \xi_e) \left(\frac{d\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}}{d\xi} \right)_{\xi_e} + \frac{1}{2} (\xi - \xi_e)^2 \left(\frac{d^2\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}}{d\xi^2} \right)_{\xi_e} \\ &= \mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}(\xi_e) + \frac{1}{2} k (\xi - \xi_e)^2 \text{ car } \left(\frac{d\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}}{d\xi} \right)_{\xi_e} = 0 \end{aligned}$$

en posant $k \hat{=} \left(\frac{d^2\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}}{d\xi^2} \right)_{\xi_e}$. Ce faisant, l'énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_{m/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} + \mathcal{E}_{p/\mathcal{R}} = \psi(\xi) \dot{\xi}^2 + \mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}(\xi_e) + \frac{1}{2} k (\xi - \xi_e)^2$$

est constante, ce qui impose :

$$\frac{d\mathcal{E}_{m/\mathcal{R}}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\psi}{d\xi} \dot{\xi}^3 + 2\psi(\xi) \dot{\xi} \ddot{\xi} + k \dot{\xi} (\xi - \xi_e) = 0 \quad (76)$$

Notamment, au voisinage de la position d'équilibre, il est possible d'introduire le paramètre ε tel que :

$$\xi = \xi_e + \varepsilon \Rightarrow \xi - \xi_e = \varepsilon \text{ et } \dot{\xi} = \dot{\varepsilon} \Rightarrow \ddot{\xi} = \ddot{\varepsilon}$$

donne à l'équation (76), simplifiée par $\dot{\xi}$, la forme suivante :

$$\frac{d\psi}{d\xi} \dot{\varepsilon}^2 + 2\psi(\xi) \ddot{\varepsilon} + k\varepsilon = 0$$

avec :

$$\psi(\xi) \simeq \psi(\xi_e) + \varepsilon \left(\frac{d\psi}{d\xi} \right)_{\xi_e}$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{d\psi}{d\xi} \dot{\varepsilon}^2 + 2\psi(\xi_e) \ddot{\varepsilon} + \varepsilon \ddot{\varepsilon} \left(\frac{d\psi}{d\xi} \right)_{\xi_e} + k\varepsilon = 0 \quad (77)$$

Si A désigne l'amplitude de ε qui dépend du temps par l'intermédiaire d'une fonction $f(t)$:

$$\varepsilon = A \times f(t) \Rightarrow \dot{\varepsilon} = A \dot{f} \Rightarrow \ddot{\varepsilon} = A \ddot{f}$$

Ce faisant, les termes ε et $\ddot{\varepsilon}$ apparaissent d'ordre 1 en A , tandis que $\dot{\varepsilon}^2 = A^2 \dot{f}^2$ et $\varepsilon \ddot{\varepsilon} = A^2 f \ddot{f}$ sont des termes d'ordre 2 en A . Or, en remarquant que A est petit (comme l'est ε), on peut ne conserver que les termes d'ordre 1 en A dans l'équation (77), qui devient :

$$2\psi(\xi_e) \ddot{\varepsilon} + k\varepsilon = 0 \quad (78)$$

– Si $k > 0$, cette équation :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{k}{2\psi(\xi_e)} \varepsilon = 0 \quad (79)$$

admet une solution harmonique de pulsation :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{2\psi(\xi_e)}} = \sqrt{\frac{1}{2\psi(\xi_e)} \times \left(\frac{d^2 \mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}}{d\xi^2} \right)_{\xi_e}}$$

ce qui montre la stabilité de l'équilibre : écarté de la position $\xi = \xi_e$, le système oscille autour de cette position. En outre :

$$k > 0 \Rightarrow \left(\frac{d^2 \mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}}{d\xi^2} \right)_{\xi_e} > 0 \text{ avec } \left(\frac{d\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}}{d\xi} \right)_{\xi_e} = 0$$

montre que :

sur une position d'équilibre stable, l'énergie potentielle est minimale.

– Si $k < 0$, l'équation (79) :

$$\ddot{\varepsilon} - \frac{|k|}{2\psi(\xi_e)} \varepsilon = 0$$

admet une solution de la forme :

$$\varepsilon(t) = \lambda \sinh \left(\sqrt{\frac{|k|}{2\psi(\xi_e)}} \times t \right) + \mu \cosh \left(\sqrt{\frac{|k|}{2\psi(\xi_e)}} \times t \right)$$

qui montre que $\xi(t) = \xi_e + \varepsilon(t)$ s'éloigne de ξ_e dans le temps ; écarté de sa position d'équilibre, le système continue à s'en écarter davantage ; l'équilibre est instable. Or, puisque la relation :

$$k < 0 \Rightarrow \left(\frac{d^2 \mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}}{d\xi^2} \right)_{\xi_e} < 0 \text{ avec } \left(\frac{d\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}}{d\xi} \right)_{\xi_e} = 0$$

montre que $\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}$ est un maximum de la fonction $\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}(\xi)$, on peut conclure que :

sur une position d'équilibre instable, l'énergie potentielle est maximale.

EXEMPLE

Reprenons l'exemple du losange développé à la page 67, dont l'énergie cinétique et l'énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} = \frac{2}{3} m \ell^2 \dot{\alpha}^2 \text{ et } \mathcal{E}_{p/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} k \ell^2 (2 \sin \alpha - \sqrt{2})^2 + K$$

dépendent du seul paramètre α .

Étudions les différents équilibres possibles de ce système.

1. Recherche des positions d'équilibre

L'expression de $\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}$ permet de calculer :

$$\frac{d\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}}{d\alpha} = k \ell^2 \times 2 \cos \alpha \times (2 \sin \alpha - \sqrt{2})$$

d'où sont déduites les valeurs de $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ qui rendent $\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}$ extremum :

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4} \text{ et } \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$$

Ces deux valeurs correspondent aux positions d'équilibre du système.

2. Stabilité des équilibres

La stabilité des équilibres précédents se déduit du signe de :

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}}{d\alpha^2} = 2k\ell^2 \left[2 \cos^2 \alpha - \sin \alpha (2 \sin \alpha - \sqrt{2}) \right]$$

– Pour $\alpha = \alpha_1 = \frac{\pi}{4}$:

$$\left(\frac{d^2 \mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}}{d\alpha^2} \right)_{\alpha_1} = 2k\ell^2 \times \left[2 \times \frac{1}{2} \right] \Rightarrow \left(\frac{d^2 \mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}}{d\alpha^2} \right)_{\alpha_1} = 2k\ell^2 > 0$$

Le signe positif de cette dérivée seconde révèle qu'en $\alpha = \alpha_1$, le système adopte une position d'équilibre stable.

– Pour $\alpha = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$:

$$\left(\frac{d^2 \mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}}{d\alpha^2} \right)_{\alpha_2} = 2k\ell^2 \left[-(2 - \sqrt{2}) \right] < 0 \text{ car } 2 > \sqrt{2}$$

Le signe négatif de cette dérivée seconde traduit l'instabilité de la position d'équilibre en $\alpha = \alpha_2$.

2. Oscillations

Si l'on écarte un peu le système de sa position d'équilibre stable, l'équation différentielle (79) montre que des oscillations vont se produire, avec une pulsation :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{2\psi(\alpha_1)} \times \left(\frac{d^2\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}}{d\alpha^2} \right)_{\alpha_1}}$$

où $\psi(\alpha)$ permet d'écrire l'énergie cinétique du système sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c &= \psi(\alpha) \dot{\alpha}^2 = \frac{2}{3} m \ell^2 \dot{\alpha}^2 \Rightarrow \psi(\alpha) = \frac{2m\ell^2}{3} \\ \Rightarrow \omega_0 &= \sqrt{\frac{3}{4m\ell^2} \times 2k\ell^2} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{2m}} \end{aligned}$$

4.5.3 Premier principe de la thermodynamique

Considérons un système caractérisé par :

- son énergie cinétique barycentrique \mathcal{E}_c^* ;
- l'énergie cinétique de son centre de masse G , que l'on confond ici avec l'énergie cinétique perçue à l'échelle macroscopique (énergie due au déplacement global du système) :

$$\mathcal{E}_{c \text{ macro}} \hat{=} \frac{1}{2} m v_{G/\mathcal{R}}^2$$

Par exemple, un objet posé sur une table possède une énergie cinétique d'ensemble nulle ($\mathcal{E}_{c \text{ macro}} = 0$), bien que les molécules qui le composent soient agitées ($\mathcal{E}_c^* \neq 0$).

- une énergie potentielle $\mathcal{E}_{p \text{ int}}$ provenant des interactions entre les particules qui composent le système. Nous supposons que ces interactions sont purement conservatives, ce qui revient à négliger le travail $\delta W_{\text{int}}^{(d)}$ d'éventuelles interactions dissipatives dans le système. Une telle hypothèse est strictement vérifiée dans le cas des gaz parfaits (absence d'interaction entre particules) ou des solides indéformables (travail nul des éventuelles interactions).
- une énergie potentielle $\mathcal{E}_{p \text{ ext}}$ provenant des actions extérieures qui s'exercent sur le système. Ces actions fournissent au système un travail :

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{ext}}^{(d)} + \delta W_{\text{ext}}^{(c)}$$

où $\delta W_{\text{ext}}^{(d)}$ provient des actions dissipatives et $\delta W_{\text{ext}}^{(c)}$ provient des actions conservatives, à l'origine du terme d'énergie potentielle $\mathcal{E}_{p \text{ ext}}$:

$$d\mathcal{E}_{p \text{ ext}} \hat{=} - \delta W_{\text{ext}}^{(c)}$$

Définition 31. L'énergie interne U d'un tel système prend en compte les énergie cinétique et potentielles intrinsèques au système :

$$U \hat{=} \mathcal{E}_c^* + \mathcal{E}_{p \text{ int}}$$

Remarque : Dans le cas du gaz parfait, l'absence d'interaction entre les particules de gaz se traduit par $\mathcal{E}_{p\text{int}} = 0$. De fait, puisque l'énergie d'agitation thermique est proportionnelle à la température T ($\mathcal{E}_c^* = \frac{3}{2} NkT$ pour un gaz parfait monoatomique), il en va de même de U . C'est pourquoi on pose : $dU_{G.P.} = C_V dT$.

Lorsqu'un système reçoit une énergie thermique δQ , la relation (72) de la page 66 admet une généralisation :

$$d\mathcal{E}_m = \delta W^{(d)} + \delta Q \quad (80)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2} m v_G^2 + \mathcal{E}_c^* + \mathcal{E}_{p\text{int}} + \mathcal{E}_{p\text{ext}} \\ &= \mathcal{E}_{c\text{macro}} + \mathcal{E}_c^* + \mathcal{E}_{p\text{int}} + \mathcal{E}_{p\text{ext}} \\ &= \mathcal{E}_{c\text{macro}} + U + \mathcal{E}_{p\text{ext}} \end{aligned}$$

Ce faisant, la relation (80) conduit à :

$$d\mathcal{E}_{c\text{macro}} + dU + d\mathcal{E}_{p\text{ext}} = \delta W^{(d)} + \delta Q$$

où :

$$\begin{cases} d\mathcal{E}_{p\text{ext}} = -\delta W_{\text{ext}}^{(c)} \\ \delta W^{(d)} = \delta W_{\text{ext}}^{(d)} + \delta W_{\text{int}}^{(d)} \simeq \delta W_{\text{ext}}^{(d)} \end{cases}$$

fournissent :

$$d\mathcal{E}_{c\text{macro}} + dU - \delta W_{\text{ext}}^{(c)} = \delta W_{\text{ext}}^{(d)} + \delta Q \Rightarrow d\mathcal{E}_{c\text{macro}} + dU = \delta W_{\text{ext}}^{(c)} + \delta W_{\text{ext}}^{(d)} + \delta Q$$

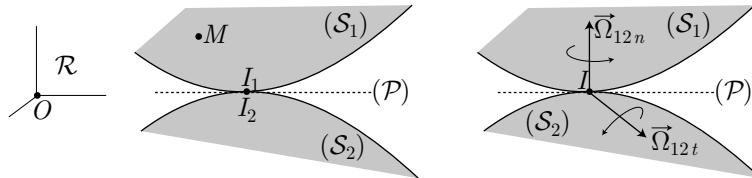
Aussi, en remarquant que $\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{ext}}^{(c)} + \delta W_{\text{ext}}^{(d)}$ désigne le travail que l'extérieur fournit au système, le **premier principe de la thermodynamique** s'exprime par :

$$\boxed{d\mathcal{E}_{c\text{macro}} + dU = \delta W_{\text{ext}} + \delta Q}$$

5 Contact de deux solides

5.1 Mouvements relatifs

Admettons ici que le contact entre deux solides (\mathcal{S}_1) et (\mathcal{S}_2) ne déforme pas ces solides ; le contact est alors ponctuel : le point de contact I est confondu avec le point I_1 de (\mathcal{S}_1) et avec un point I_2 de (\mathcal{S}_2) , ce qui signifie qu'il existe, en I , un plan tangent (\mathcal{P}) aux deux solides.



Soit $\vec{\Omega}_{12} = \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{R}} - \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_2/\mathcal{R}}$ le vecteur rotation de (\mathcal{S}_1) par rapport à (\mathcal{S}_2) , qui se décompose en une composante $\vec{\Omega}_{12n}$ normale à (\mathcal{P}) et une composante $\vec{\Omega}_{12t}$ tangente à (\mathcal{P}) .

Le mouvement relatif de (\mathcal{S}_1) par rapport à (\mathcal{S}_2) peut se décomposer en trois types de mouvements :

- Le **glissement** de (\mathcal{S}_1) par rapport à (\mathcal{S}_2) est caractérisé par la vitesse de glissement :

$$\vec{v}_g \hat{=} \vec{v}_{I_1/I_2} = \vec{v}_{I_1/\mathcal{R}} - \vec{v}_{I_2/\mathcal{R}}$$

Remarque : Les points I_1 et I_2 sont provisoirement confondus mais peuvent ne pas posséder la même vitesse.

Pour tout point M de (\mathcal{S}_1) , il est possible d'écrire :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{I_1/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{I_1M} = \vec{v}_{I_1/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{IM}$$

d'où découlent les deux cas suivants :

- si (\mathcal{S}_2) est immobile ($\vec{v}_{I_2/\mathcal{R}} = \vec{0}$) et (\mathcal{S}_1) glisse sur (\mathcal{S}_2) :

$$\vec{v}_{I_1/\mathcal{R}} = \vec{v}_g \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_g + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{IM}}$$

- en l'absence de glissement, si (\mathcal{S}_2) se déplace avec une vitesse $\vec{v}_{I_2/\mathcal{R}} = \vec{v}_{I/\mathcal{R}}$:

$$\vec{v}_{I_1/\mathcal{R}} = \vec{v}_{I_2/\mathcal{R}} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{I/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{IM}}$$

- Le **pivotement** de (\mathcal{S}_1) par rapport à (\mathcal{S}_2) est caractérisé par :

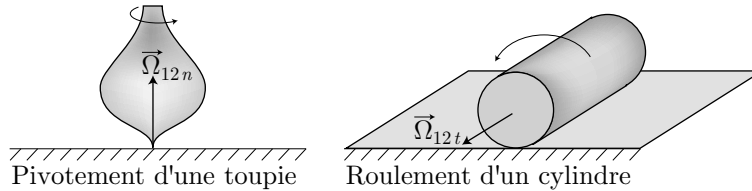
$$\boxed{\vec{\Omega}_{12t} = \vec{0} \text{ et } \vec{\Omega}_{12n} \neq \vec{0}}$$

Il s'agit typiquement du mouvement d'une toupie sur un support.

- Le **roulement** de (\mathcal{S}_1) sur (\mathcal{S}_2) est caractérisé, quant à lui, par :

$$\boxed{\vec{\Omega}_{12t} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{\Omega}_{12n} = \vec{0}}$$

Par exemple, le mouvement, sans glissement, d'un cylindre sur un support horizontal est un roulement.

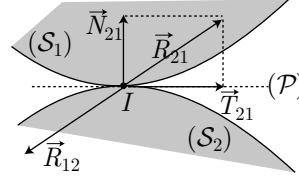


5.2 Les frottements

5.2.1 Torseur de contact

Si le contact entre (S_1) et (S_2) se faisait ponctuellement en I , il serait caractérisé par le glisseur de centre I dont la résultante \vec{R}_{21} exercée par (S_2) sur (S_1) se décompose en :

- une composante \vec{N}_{21} , normale à (P) en I , souvent appelée **réaction** de (S_2) ;
- une composante \vec{T}_{21} , tangente à (P) , appelée **frottements de glissement**.



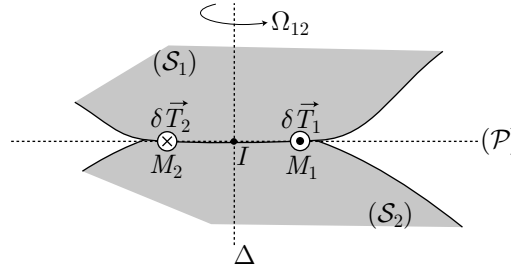
Remarque : La condition de contact entre (S_1) et (S_2) s'écrit :

$$\|\vec{N}_{12}\| > 0 \Leftrightarrow \text{contact entre } (S_1) \text{ et } (S_2).$$

Remarque : L'absence de frottements entre deux solides en contact se traduit par :

$$\vec{T}_{12} = \vec{0} \Leftrightarrow \text{pas de frottements.}$$

Dans la réalité, le contact entre deux solides n'est pas rigoureusement ponctuel ; il se fait sur une surface contenant I .



Considérons, par exemple, la rotation de (S_1) par rapport à (S_2) autour d'un axe Δ passant par I . Supposons que, parmi tous les points de la surface de contact entre (S_1) et (S_2) , deux points M_1 et M_2 soient soumis aux forces de frottement respectives $\delta \vec{T}_1$ et $\delta \vec{T}_2 = -\delta \vec{T}_1$. Il apparaît ainsi que la résultante de ces forces est nulle, tandis que son moment en I est défini par :

$$\delta \vec{\mathcal{M}}_I(2/1) \cong \overrightarrow{IM}_1 \wedge \delta \vec{T}_1 + \overrightarrow{IM}_2 \wedge \delta \vec{T}_2$$

Les frottements produisent, dans ce cas, un **couple de frottement**.

Dans le cadre du programme de MP, on se limitera aux cas où $\vec{\mathcal{M}}_I(2/1) = \vec{0}$.

5.2.2 Lois de Coulomb

Lorsque deux solides sont en contact ($\|\vec{N}_{12}\| > 0$), le solide (S_2) exerce sur (S_1) une force de frottement qui semble s'exercer sur un unique point I de la surface de

contact. Les caractéristiques de cette force dépendent de l'état de mouvement relatif de (\mathcal{S}_1) par rapport à (\mathcal{S}_2) .

- S'il y a glissement ($\vec{v}_g \neq \vec{0}$), $\vec{T}_{21} \neq \vec{0}$ et les frottements s'opposent au glissement : $\vec{v}_g \cdot \vec{T}_{21} < 0$. L'intensité des frottements est proportionnelle à celle de la réaction :

$$\|\vec{T}_{21}\| = f_d \times \|\vec{N}_{21}\|$$

le coefficient f_d s'appelant le *coefficient de frottement dynamique*.

- En l'absence de glissement ($\vec{v}_g = \vec{0}$), $\|\vec{T}_{21}\|$ (non nul s'il y a frottement) est majoré, sans quoi le glissement se produit :

$$\|\vec{T}_{21}\| < f_s \times \|\vec{N}_{21}\| \quad (81)$$

Le coefficient f_s est le *coefficient de frottement statique*.

Les **lois de Coulomb** sont alors résumées dans le tableau ci-dessous :

Glissement	Pas de glissement
$\vec{v}_g \neq \vec{0}$	$\vec{v}_g = \vec{0}$
$\vec{T}_{21} \cdot \vec{v}_g < 0$	$\ \vec{T}_{21}\ \neq 0$ (frottements)
$\ \vec{T}_{21}\ = f_d \times \ \vec{N}_{21}\ $	$\ \vec{T}_{21}\ < f_s \times \ \vec{N}_{21}\ $

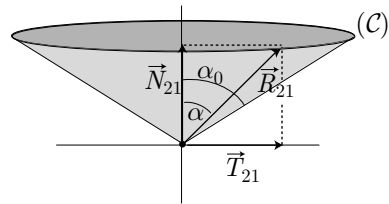
Remarque : Dans la réalité, les coefficients f_d et f_s sont différents : $f_s \gtrsim f_d$ (il est plus difficile de mettre en mouvement un corps au repos que d'entretenir un mouvement déjà existant). Cependant, dans la pratique, on confond généralement ces deux coefficients.

Soit α l'angle entre \vec{R}_{21} et \vec{N}_{21} , tel que :

$$\tan \alpha = \frac{\|\vec{T}_{21}\|}{\|\vec{N}_{21}\|}$$

où la relation (81) montre que l'absence de glissement est conditionnée par :

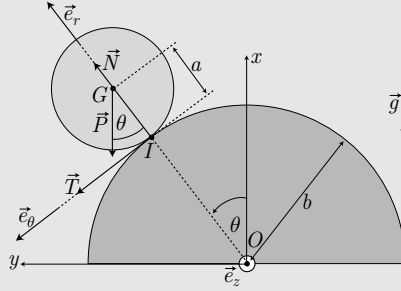
$$\tan \alpha < f_s \Rightarrow \exists \alpha_0 \quad \alpha < \alpha_0 \text{ avec } \tan \alpha_0 = f_s$$



Cette inégalité révèle que, pour éviter le glissement, le vecteur \vec{R}_{21} doit rester à l'intérieur d'un cône d'angle $\alpha_0 = \arctan f_s$, appelé **cône de glissement**.

EXEMPLE

Une bille sphérique, homogène, de rayon a et de masse m , roule sans glisser sur un cylindre de rayon b , dans un plan orthogonal à l'axe du cylindre (O, \vec{e}_z) .



La position de G est repérée grâce à l'angle $\theta = (\vec{e}_z, \overrightarrow{OG})$. On note $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ le vecteur rotation de la bille par rapport au référentiel terrestre galiléen.

On donne le moment d'inertie de la bille par rapport à l'axe Gz : $J_{Gz} = \frac{2}{5} ma^2$.

On lance la bille à partir de la position $\theta = 0$, avec une vitesse négligeable.

On note μ le facteur de frottement de la bille avec le cylindre.

1. On suppose que la bille roule sans glisser sur le cylindre. Quelle relation traduit ce mouvement sans glissement ?
2. En appliquant les théorèmes généraux à la bille, établir l'équation différentielle du mouvement en θ .
3. Montrer que la bille commence à glisser sur le cylindre pour une valeur $\theta = \theta_g$ telle que :

$$17\mu \cos \theta_g - 2 \sin \theta_g = 10\mu$$

RÉPONSE

Compte tenu du mouvement de rotation de G autour de l'axe (Oz) , nous adopterons le système de coordonnées cylindriques, associé à la base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$, pour lequel $\overrightarrow{OG} = (a+b) \vec{e}_r$.

1. Dans ce système de coordonnées, le point G a pour vitesse :

$$\vec{v}_G \triangleq \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = (a+b) \frac{d\vec{e}_r}{dt} = (a+b) \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

En outre, si I représente le point où s'exerce le contact entre la bille et le cylindre, l'absence de glissement en I se traduit par :

$$\vec{v}_G = \vec{v}_I + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IG}$$

où $\vec{v}_I = \vec{0}$ car le cylindre est immobile. Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \vec{v}_G &= (\omega \vec{e}_z) \wedge (a \vec{e}_r) \\ \Rightarrow (a+b) \dot{\theta} \vec{e}_\theta &= a\omega \vec{e}_\theta \Rightarrow \boxed{(a+b) \dot{\theta} = a\omega} \end{aligned} \quad (82)$$

2. L'expression de la vitesse \vec{v}_G conduit à celle de la résultante cinétique $\vec{\mathcal{P}}$ de la bille :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{P}} &= m \vec{v}_G = m(a+b) \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \Rightarrow \frac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt} &= m(a+b) \left[\ddot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\theta} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right] \\ \Rightarrow \frac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt} &= m(a+b) \left(\ddot{\theta} \vec{e}_\theta - \dot{\theta}^2 \vec{e}_r \right)\end{aligned}$$

Aussi, le théorème de la résultante cinétique fournit, dans la base \mathcal{B} :

$$\frac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T}$$

où $\vec{P} = m\vec{g}$, $\vec{N} = N\vec{e}_r$ et $\vec{T} = T\vec{e}_\theta$ désignent respectivement le poids de la bille, la réaction normale du cylindre sur la bille et la force de frottement. C'est pourquoi :

$$\begin{aligned}m(a+b) \begin{pmatrix} -\dot{\theta}^2 \\ \ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} -mg \cos \theta \\ mg \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ T \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} N - mg \cos \theta = -m(a+b) \dot{\theta}^2 \\ T + mg \sin \theta = m(a+b) \ddot{\theta} \end{cases} &\quad (83)\end{aligned}$$

Quant au moment cinétique barycentrique de la bille :

$$\vec{L}^* = J_{Gz} \vec{\omega} = \frac{2}{5} ma^2 \omega \vec{e}_z \Rightarrow \frac{d\vec{L}^*}{dt} = \frac{2}{5} ma^2 \dot{\omega} \vec{e}_z$$

il conduit au théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}^*}{dt} &= \vec{\mathcal{M}}_{G\text{ext}} = \underbrace{\vec{GG} \wedge \vec{P} + \vec{GI} \wedge \vec{N}}_{=\vec{0}} + \vec{GI} \wedge \vec{T} \\ \Rightarrow \frac{2}{5} ma^2 \dot{\omega} \vec{e}_z &= (-a\vec{e}_r) \wedge (T\vec{e}_\theta) = -aT \vec{e}_z \\ \Rightarrow T &= -\frac{2}{5} ma\dot{\omega} \quad (84)\end{aligned}$$

Les quatre équations (82), (83) et (84) comportent quatre inconnues : ω , θ , N et T . Ce jeu d'équations est alors suffisant pour déterminer θ .

Les équations (84) et (82) fournissent :

$$\begin{cases} T = -\frac{2}{5} ma\dot{\omega} \\ a\dot{\omega} = (a+b)\ddot{\theta} \end{cases} \Rightarrow T = -\frac{2}{5} m(a+b) \ddot{\theta}$$

Ainsi, la deuxième équation du système (83) devient :

$$\begin{aligned} mg \sin \theta &= m(a+b)\ddot{\theta} - T = m(a+b)\ddot{\theta} + \frac{2}{5}m(a+b)\ddot{\theta} \\ &= \frac{7}{5}m(a+b)\ddot{\theta} \end{aligned}$$

d'où découle l'équation différentielle du mouvement en θ :

$$(a+b)\ddot{\theta} = \frac{5g}{7} \sin \theta \quad (85)$$

3. L'équation différentielle précédente s'écrit aussi :

$$(a+b)\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{5g}{7}\dot{\theta} \sin \theta \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}(a+b)\dot{\theta}^2 \right] = \frac{d}{dt} \left[-\frac{5g}{7} \cos \theta \right]$$

ce qui montre qu'il existe une constante K telle que :

$$\frac{1}{2}(a+b)\dot{\theta}^2 = -\frac{5g}{7} \cos \theta + K$$

et, notamment, puisqu'initialement $\dot{\theta} = 0$ et $\theta = 0$:

$$\begin{aligned} 0 = -\frac{5g}{7} + K &\Rightarrow \frac{1}{2}(a+b)\dot{\theta}^2 = \frac{5g}{7}(1 - \cos \theta) \\ &\Rightarrow (a+b)\dot{\theta}^2 = \frac{10g}{7}(1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (86)$$

Ainsi, la première équation du système (83) devient :

$$\begin{aligned} N &= mg \cos \theta - m(a+b)\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - \frac{10mg}{7}(1 - \cos \theta) \\ &\Rightarrow N = \frac{mg}{7}(17 \cos \theta - 10) \end{aligned} \quad (87)$$

Quant à l'équation (85), elle donne à la dernière équation du système (83) la forme suivante :

$$\begin{aligned} T + mg \sin \theta &= m(a+b)\ddot{\theta} = \frac{5mg}{7} \sin \theta \\ &\Rightarrow T = -\frac{2mg}{7} \sin \theta \end{aligned} \quad (88)$$

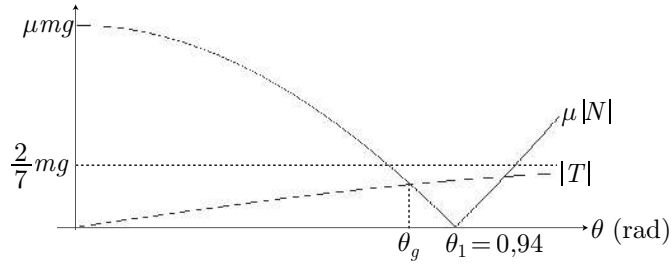
Examinons plusieurs cas :

- Initialement, $\theta = 0$, de sorte que :

$$|N| = mg \text{ et } |T| = 0$$

L'inégalité : $|T| < \mu |N|$ étant nécessairement respectée, il n'y a pas glissement en début de mouvement, ce qui justifie l'hypothèse du roulement sans glissement de la question 1.

- La représentation graphique de $\mu |N|$ et de $|T|$ en fonction de θ :

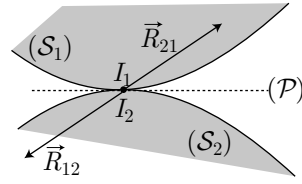


montre qu'il existe un angle θ_g tel que, tant que $\theta < \theta_g$, $|T| < \mu |N|$. Donc, jusqu'à ce que l'angle θ atteigne la valeur θ_g , le mouvement de la bille se fait sans glissement. On en déduit que le glissement commence pour la valeur $\theta = \theta_g$ telle que $|T| = \mu |N|$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{2mg}{7} \sin \theta_g &= \frac{\mu mg}{7} (17 \cos \theta_g - 10) \\ \Rightarrow 17 \mu \cos \theta_g - 2 \sin \theta_g &= 10\mu \end{aligned}$$

5.2.3 Aspects énergétiques

Pour simplifier les calculs, supposons le contact entre (S_1) et (S_2) quasi ponctuel : le point I_1 de (S_1) et le point I_2 de (S_2) sont, à une date donnée, confondus avec un point I , mais ils ne possèdent pas nécessairement les mêmes vecteurs vitesses ($\vec{v}_{I_1/\mathcal{R}}$ et $\vec{v}_{I_2/\mathcal{R}}$). Si l'on n'envisage que les interactions entre les deux solides, elles ont pour puissance :



$$\begin{cases} \mathcal{P}_{\text{int}}(2/1) = \vec{R}_{21} \cdot \vec{v}_{I_1/\mathcal{R}} + \vec{\mathcal{M}}_I(R_{21}) \cdot \vec{\Omega}_{S_1/\mathcal{R}} \\ \mathcal{P}_{\text{int}}(1/2) = \vec{R}_{12} \cdot \vec{v}_{I_2/\mathcal{R}} + \vec{\mathcal{M}}_I(R_{12}) \cdot \vec{\Omega}_{S_2/\mathcal{R}} \end{cases}$$

Aussi, en utilisant une généralisation de la loi des actions réciproques :

$$\begin{Bmatrix} \vec{R}_{12} \\ \vec{\mathcal{M}}_I(R_{12}) \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \vec{R}_{21} \\ \vec{\mathcal{M}}_I(R_{21}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\vec{R}_{21} \\ -\vec{\mathcal{M}}_I(R_{21}) \end{Bmatrix}$$

il apparaît que les interactions entre (S_1) et (S_2) exercent, à l'intérieur du système $\{S_1 \cup S_2\}$ une puissance :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{int}} &= \mathcal{P}_{\text{int}}(2/1) + \mathcal{P}_{\text{int}}(1/2) \\ &= \vec{R}_{21} \cdot (\vec{v}_{I_1/\mathcal{R}} - \vec{v}_{I_2/\mathcal{R}}) + \vec{\mathcal{M}}_I(R_{21}) \cdot (\vec{\Omega}_{S_1/\mathcal{R}} - \vec{\Omega}_{S_2/\mathcal{R}}) \end{aligned}$$

où l'on reconnaît les expressions de la vitesse de glissement et le vecteur rotation de (S_1) par rapport à (S_2) :

$$\vec{v}_g \hat{=} \vec{v}_{I_1/\mathcal{R}} - \vec{v}_{I_2/\mathcal{R}} \text{ et } \vec{\Omega}_{S_1/S_2} \hat{=} \vec{\Omega}_{S_1/\mathcal{R}} - \vec{\Omega}_{S_2/\mathcal{R}}$$

Il s'ensuit que :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \vec{R}_{21} \cdot \vec{v}_g + \vec{\mathcal{M}}_I(R_{21}) \cdot \vec{\Omega}_{S_1/S_2}$$

Remarque : Dans le cas d'un glisseur de centre I , qui exerce sur (S_1) une force de frottement \vec{F}_{fr} , la loi précédente se simplifie :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \vec{F}_{fr} \cdot \vec{v}_g$$

Dans le cadre du programme de MP, les liaisons entre solides seront généralement considérées comme parfaites, ce qui se traduira par $\vec{\mathcal{M}}_I(R_{21}) = \vec{0}$, c'est-à-dire l'absence de dissipation d'énergie par frottement de roulement ou de pivotement.

Formulaire

Cinétique des systèmes

GÉNÉRALITÉS

- Dérivation d'un vecteur unitaire : $\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}$
- Vecteur rotation : $\left(\frac{d\vec{e}'_{\alpha}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e}'_{\alpha}$
- Formule de Varignon : $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{A}$
- Composition des vecteurs rotation : $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_1} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}$
- Composition des vitesses : $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{v}_e(M)$
où est définie la *vitesse d'entraînement* :

$$\vec{v}_e(M) \hat{=} \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

- Composition des accélérations : $\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)$ où sont définies l'*accélération d'entraînement* et l'*accélération de Coriolis* :

$$\vec{a}_e(M) \hat{=} \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \left(\frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M})$$

et :

$$\vec{a}_c(M) \hat{=} 2 \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$$

- Rotation de $\mathcal{R}' = \{O, \vec{e}'_{\alpha}\}$ dans $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_{\alpha}\}$:

$$\vec{a}_e(M) = -\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}^2 \overrightarrow{OM}$$

TORSEURS

- Éléments de réduction d'un torseur (*résultante* \vec{R} et *moment* \vec{M}_A) :

$$[R]_A \hat{=} \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \\ \vec{M}_A = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{R}_i \end{array} \right\}$$

- Changement de point : $\vec{M}_A = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R} + \vec{M}_B$

– Torseur cinétique :

– Résultante cinétique : $\vec{P}_{/\mathcal{R}} \hat{=} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} = m \vec{v}_{G/\mathcal{R}}$

– Moment cinétique : $\vec{L}_{A/\mathcal{R}} \hat{=} \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}$

– Moment cinétique par rapport à un axe Δ ($\vec{u}_\Delta \perp \Delta$) :

$$\forall (A, B) \in \Delta, L_\Delta \hat{=} \vec{L}_{A/\mathcal{R}} \cdot \vec{u}_\Delta = \vec{L}_{B/\mathcal{R}} \cdot \vec{u}_\Delta$$

– Torseur dynamique :

– Résultante dynamique : $\vec{S}_{/\mathcal{R}} \hat{=} \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_{M_i/\mathcal{R}} = m \vec{a}_{G/\mathcal{R}}$

– Moment dynamique : $\vec{\Gamma}_{A/\mathcal{R}} \hat{=} \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{a}_{M_i/\mathcal{R}}$

– Moment dynamique par rapport à un axe Δ ($\vec{u}_\Delta \parallel \Delta$) :

$$\forall (A, B) \in \Delta, \Gamma_\Delta \hat{=} \vec{\Gamma}_{A/\mathcal{R}} \cdot \vec{u}_\Delta = \vec{\Gamma}_{B/\mathcal{R}} \cdot \vec{u}_\Delta$$

– Si A est immobile dans \mathcal{R} :

$$[S/\mathcal{R}]_A = \frac{d[P/\mathcal{R}]_A}{dt}$$

– Si $\vec{v}_{A/\mathcal{R}} \neq \vec{0}$, $\frac{d\vec{P}_{/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{S}_{/\mathcal{R}}$ mais :

$$\frac{d\vec{L}_{A/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{\Gamma}_{A/\mathcal{R}} - \vec{v}_{A/\mathcal{R}} \wedge \vec{P}_{/\mathcal{R}} \Rightarrow \frac{d[P/\mathcal{R}]_A}{dt} \neq [S/\mathcal{R}]_A$$

RÉFÉRENTIEL BARYCENTRIQUE

– Définition du centre d'inertie : $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GM_i} \hat{=} \vec{0}$

– Localisation du centre d'inertie :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OM_i} \text{ ou } \overrightarrow{OM} = \frac{1}{m} \iiint_{(S)} \mu(M) \overrightarrow{OM} d\tau_M$$

– Définition du référentiel barycentrique : $\vec{v}_G^* = \vec{0}$ et $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}_g} = \vec{0}$

– Loi de composition des vitesses : $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_M^* + \vec{v}_{G/\mathcal{R}}$

– Loi de composition des accélérations :

$$\begin{cases} \vec{a}_c(M) = \vec{0} \\ \vec{a}_e(M) = \vec{a}_{G/\mathcal{R}} \end{cases} \Rightarrow \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_M^* + \vec{a}_{G/\mathcal{R}}$$

- Torseurs cinétique et dynamique :

$$[P/\mathcal{R}^*] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{P}^* = \vec{0} \\ \vec{L}^* = \vec{L}_G^* \end{array} \right\} \text{ et } [S/\mathcal{R}^*] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{S}^* = \vec{0} \\ \vec{\Gamma}^* = \vec{\Gamma}_G^* \end{array} \right\}$$

- Théorèmes de Koenig :

$$\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OG} \wedge m \vec{v}_{G/\mathcal{R}} + \vec{L}^* \text{ et } \mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_c^* + \frac{1}{2} m v_{G/\mathcal{R}}^2$$

- Réduction canonique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\mu} \hat{=} \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \\ \vec{r}^* \hat{=} \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1 M_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{L}^* = \vec{r}^* \wedge \mu \vec{v}_M^* \\ \mathcal{E}_c^* = \frac{1}{2} \mu v_M^{*2} \end{array} \right.$$

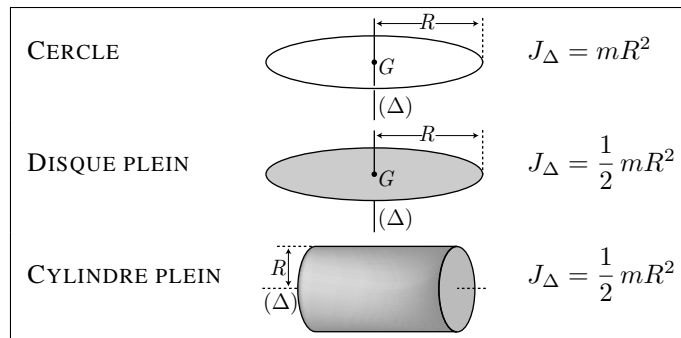
Cinétique du solide

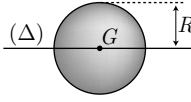
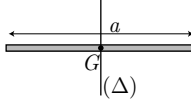
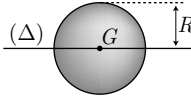
PROPRIÉTÉS DU SOLIDE

- Définition du solide indéformable (\mathcal{S}) : $\forall (M_i, M_j) \in (\mathcal{S}), M_i M_j = \text{cte}$
- Champ de vitesse : $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{A/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AM}$
- Axe de rotation instantanée : $\forall M_i \in \Delta_i, \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \parallel \Delta_i$
- Vitesse de glissement : $\vec{v}_g \hat{=} \vec{v}_{I_1/\mathcal{R}} - \vec{v}_{I_2/\mathcal{R}}$
- Condition de non glissement : $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{I_2/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{I_2 M}$
- Définitions du moment d'inertie :

$$J_\Delta \hat{=} \sum_{i=1}^n m_i H_i M_i^2 \text{ ou } J_\Delta \hat{=} \iiint_{(\mathcal{S})} H M^2 \mu(M) d\tau_M$$

- Quelques moments d'inertie :



SPHÈRE CREUSE		$J_{\Delta} = \frac{2}{3} mR^2$
TIGE PLEINE		$J_{\Delta} = \frac{1}{12} ma^2$
BOULE PLEINE		$J_{\Delta} = \frac{2}{5} mR^2$

- Théorème de Huygens : $J_{\Delta} = J_{\Delta G} + md^2$

ROTATION D'UN SOLIDE (S) AUTOUR D'UN AXE

- Moment cinétique en un point A d'un axe Δ fixe :

$$\vec{L}_A = J_{\Delta} \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} - \vec{L}_{\perp} / A \in \Delta$$

où $\vec{L}_{\perp} = \vec{0}$ si (S) est symétrique par rapport à Δ ou est contenu dans un plan perpendiculaire à Δ

- Moment cinétique par rapport à un axe fixe : $L_{\Delta} = J_{\Delta} \Omega_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}$
- Moment cinétique barycentrique : $L_{\Delta G}^* = J_{\Delta G} \Omega_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}$

Lois de la dynamique

TORSEUR DES CONTRAINTES EXTÉRIEURES

- Éléments de réduction (résultante des forces extérieures et moment en un point A) :

$$[F_{\text{ext}}]_A \hat{=} \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i \text{ ext}} \\ \vec{\mathcal{M}}_{A \text{ ext}} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F}_{i \text{ ext}} \end{array} \right\}$$

- Relation générale :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \alpha_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j > i}^n (\alpha_{ij} + \alpha_{ji})$$

- Définition d'un glisseur :

$$[F]_K \text{ glisseur} \Leftrightarrow \exists K / [F]_K \hat{=} \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} \neq \vec{0} \\ \vec{M}_K(F) = \vec{0} \end{array} \right\}$$

- Le poids est un glisseur : $\vec{P} = m \vec{g} \neq \vec{0}$ et $\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{P}) = \vec{0}$
- Propriété : $[F]_K$ glisseur $\Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_A(F) = \vec{AK} \wedge \vec{F}$
- Définition d'un couple :

$$[F]_K \text{ couple} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}_K = \vec{\Gamma} \neq \vec{0} \end{array} \right\}$$

- Moment d'un couple de frottement : $\vec{\Gamma} = -\lambda \times \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}$
- Moment d'un couple de rappel : $\vec{\Gamma} = -C \times (\theta - \theta_0) \vec{u}_z$
- Loi des actions réciproques : $[F_{1 \rightarrow 2}]_O = -[F_{2 \rightarrow 1}]_O$

THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE LA DYNAMIQUE

- Loi fondamentale de la dynamique : $m_i \vec{a}_{M_i/\mathcal{R}_g} \hat{=} \vec{F}(M_i)$
- Théorème de la résultante dynamique : $\frac{d\vec{P}/\mathcal{R}_g}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}$
- Si m est constante : $m \frac{d\vec{v}_{G/\mathcal{R}_g}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}$
- En référentiel non galiléen :

$$\vec{S}/\mathcal{R}_{ng} = \frac{d\vec{P}/\mathcal{R}_{ng}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{F}_{\text{ent}} + \vec{F}_c$$

avec les forces d'entraînement et de Coriolis :

$$\vec{F}_{\text{ent}} = - \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_e(M_i) \text{ et } \vec{F}_c = - \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_c(M_i)$$

- Théorème du moment cinétique en référentiel galiléen :

$$\vec{\Gamma}_{A/\mathcal{R}_g} = \vec{\mathcal{M}}_{A/\mathcal{R}_g} \Rightarrow \left(\frac{d\vec{L}_{A/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g} = \vec{\mathcal{M}}_{A \text{ ext}} \text{ si } \vec{v}_{A/\mathcal{R}_g} = \vec{0}$$

- Identité des torseurs en dynamique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{S}/\mathcal{R}_g \\ \vec{\Gamma}_{A/\mathcal{R}_g} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{\text{ext}} \\ \vec{\mathcal{M}}_{A \text{ ext}} \end{array} \right\} \Leftrightarrow [S/\mathcal{R}_g]_A = [F_{\text{ext}}]_A$$

- Généralisation de la loi fondamentale de la dynamique :

$$\frac{d[P/\mathcal{R}_g]_A}{dt} = [F_{\text{ext}}]_A \text{ si } \vec{v}_{A/\mathcal{R}_g} = \vec{0}$$

- En référentiel non galiléen :

$$\frac{d [P/\mathcal{R}_{ng}]_A}{dt} = [F_{\text{ext}}]_A + [F_{\text{ent}}]_A + [F_{\text{Coriolis}}]_A$$

- Théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique :

$$\left(\frac{d\vec{L}^*}{dt} \right)_{\mathcal{R}^*} = \left(\frac{d\vec{L}_G^*}{dt} \right)_{\mathcal{R}^*} = \vec{\mathcal{M}}_{G \text{ ext}}$$

Énergie d'un système

PUISSANCE ET TRAVAIL D'UNE FORCE

- Définitions :

$$\delta W \triangleq \sum_{i=1}^n \vec{F}(M_i) \cdot d\vec{OM}_i \text{ et } \mathcal{P} \triangleq \frac{\delta W}{dt}$$

- Actions extérieures et intérieures : $\delta W = \delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}}$, avec :

$$\delta W_{\text{ext}} \triangleq \sum_{i=1}^n \vec{F}_{\text{ext}}(M_i) \cdot d\vec{OM}_i$$

et :

$$\delta W_{\text{int}} \triangleq \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \vec{F}_j(M_i) \cdot d\vec{OM}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \vec{F}_i(M_j) \cdot d\vec{M}_i \vec{M}_j$$

- Puissance des actions extérieures :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}} \triangleq \frac{\delta W_{\text{ext}}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{\text{ext}}(M_i) \cdot \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}$$

- Système soumis à plusieurs types de forces :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \sum_{\alpha=1}^Q \mathcal{P}_{\text{ext}}^{(\alpha)} \triangleq \sum_{i=1}^n \vec{F}_{\text{ext}}^{(\alpha)}(M_i) \cdot \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}$$

- Cas du solide (\mathcal{S}) indéformable :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = 0 \Rightarrow \mathcal{P} = \mathcal{P}_{\text{ext}} = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{A/\mathcal{R}} + \vec{\mathcal{M}}_{A \text{ ext}} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \forall A \in (\mathcal{S})$$

- Puissances d'un glisseur et d'un couple :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{\text{ext}}(\text{glisseur}) = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{A/\mathcal{R}} \Rightarrow \mathcal{P}_{\text{poids}} = m \vec{g} \cdot \vec{v}_{G/\mathcal{R}} \\ \mathcal{P}_{\text{ext}}(\text{couple}) = \vec{\Gamma}_{\text{ext}} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \end{cases}$$

- Référentiel non galiléen :

$$\mathcal{P}_{\text{Coriolis}/\mathcal{R}_{ng}} = 0 \text{ et } \mathcal{P}_{\text{ent}/\mathcal{R}_{ng}} \hat{=} - \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_e(M_i) \cdot \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}_{ng}}$$

- Référentiel barycentrique :

$$\mathcal{P}_{\text{Coriolis}}^* = 0 \text{ et } \mathcal{P}_{\text{entraînement}}^* = 0$$

ÉNERGIE CINÉTIQUE

- Solide en rotation autour d'un axe fixe Δ : $\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} J_{\Delta} \Omega_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}^2$
- Dans le référentiel barycentrique : $\mathcal{E}_c^* = \frac{1}{2} J_{\Delta G} \Omega_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}^2$
- Conséquence du théorème de Koenig :

$$\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m v_{G/\mathcal{R}}^2 + \frac{1}{2} J_{\Delta G} \Omega_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}^2$$

- Théorème de l'énergie cinétique :
 - dans le référentiel galiléen : $\frac{d\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}_g}}{dt} = \mathcal{P}_{/\mathcal{R}_g}$
 - dans le référentiel barycentrique : $\frac{d\mathcal{E}_c^*}{dt} = \mathcal{P}^*$

ÉNERGIE POTENTIELLE

- Définition d'un gradient : $d\psi = \left(\overrightarrow{\text{grad}} \psi \right)_{M_i} \cdot d\overrightarrow{OM_i}$ avec :

$$\left(\overrightarrow{\text{grad}} \psi \right)_{M_i} \hat{=} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{M_i} \vec{e}_x + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{M_i} \vec{e}_y + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{M_i} \vec{e}_z$$

- Énergie potentielle des actions extérieures :

$$d\mathcal{E}_{p \text{ ext}} \hat{=} -\delta W_{\text{ext}} = - \sum_{i=1}^n \vec{F}_{\text{ext}}(M_i) \cdot \overrightarrow{OM_i}$$

- Force extérieure conservative :

$$\vec{F}_{\text{ext}}(M_i) \text{ conservative} \Leftrightarrow \exists \mathcal{E}_{p \text{ ext}} / \vec{F}_{\text{ext}}(M_i) = - \left(\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_{p \text{ ext}} \right)_{M_i}$$

- Pour calculer une énergie potentielle des actions extérieures à un solide :

$$-\frac{d\mathcal{E}_{p \text{ ext}}}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}} = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}} + \vec{\mathcal{M}}_M(\vec{F}_{\text{ext}}) \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}}$$

- Énergie potentielle de pesanteur : $\mathcal{E}_{pp} = gmz + \text{cte}$

- Énergie potentielle de rappel : $\mathcal{E}_{p \text{ rappel}} = \frac{1}{2} k (r - r_0)^2 + \text{cte}$
- Énergie potentielle de torsion : $\mathcal{E}_{p \text{ torsion}} = \frac{1}{2} C (\theta - \theta_0)^2 + \text{cte}$
- S'il existe plusieurs types de forces conservatives :

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \sum_{\alpha=1}^Q \vec{F}_{\text{ext}}^{(\alpha)} \Rightarrow \mathcal{E}_{p \text{ ext}} = \sum_{\alpha=1}^Q \mathcal{E}_{p \text{ ext}}^{(\alpha)}$$

- Actions conservatives intérieures à un système : $d\mathcal{E}_{p \text{ int}} \hat{=} -\delta W_{\text{int}}$
- Énergie potentielle d'interaction entre deux points :

$$\mathcal{E}_{p \text{ ij}} = \mathcal{E}_{p \text{ ji}} / d\mathcal{E}_{p \text{ ij}} \hat{=} -\vec{F}_i(M_j) \cdot d\vec{M}_i \vec{M}_j$$

- Énergie potentielle interne à un système :

$$d\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n d\mathcal{E}_{p \text{ ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n d\mathcal{E}_{p \text{ ij}}$$

- Énergie potentielle d'un système de charges électriques :

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \frac{1}{2} \iiint_{(S)} \rho(M) V(M) d\tau_M / V(M_i) = \sum_{j \neq i}^n \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 M_i M_j}$$

- Systèmes en interactions :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{1 \text{ ext}} + \mathcal{P}_{2 \text{ ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}(1/1) + \mathcal{P}_{\text{int}}(2/2) + \mathcal{P}_{\text{int}}(1/2) + \mathcal{P}_{\text{int}}(2/1)$$

- Solides indéformables en interaction :

$$-\frac{d\mathcal{E}_p}{dt} = \mathcal{P} = \mathcal{P}_{1 \text{ ext}} + \mathcal{P}_{2 \text{ ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}(1/2) + \mathcal{P}_{\text{int}}(2/1)$$

avec :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{\text{int}}(2/1) = \vec{F}_{2/1} \cdot \vec{v}_{K_1/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{S_1/\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_{K_1}(F_{2/1}) \\ \mathcal{P}_{\text{int}}(1/2) = \vec{F}_{1/2} \cdot \vec{v}_{K_2/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{S_2/\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_{K_2}(F_{1/2}) \end{cases}$$

- Liaison par un ressort \mathcal{S}_3 :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p &= \mathcal{E}_{p \text{ ext}}(\mathcal{S}_1) + \mathcal{E}_{p \text{ ext}}(\mathcal{S}_2) + \mathcal{E}_{p \text{ ext}}(\text{ressort}) + \mathcal{E}_{p \text{ int}}(\text{ressort}) \\ \text{avec } \mathcal{E}_{p \text{ int}}(\text{ressort}) &= \frac{1}{2} k (r - r_0)^2 + \text{cte} \end{aligned}$$

ÉNERGIE MÉCANIQUE

- Définition : $\mathcal{E}_{m/\mathcal{R}} \hat{=} \mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} + \mathcal{E}_{p/\mathcal{R}} \Rightarrow d\mathcal{E}_{m/\mathcal{R}} = \delta W^{(d)}$
- Équilibre en $\xi = \xi_e$:

- stable si $\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}(\xi_e)$ minimum : $\left(\frac{d\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}}{d\xi}\right)_{\xi_e} = 0$ et $\left(\frac{d^2\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}}{d\xi^2}\right)_{\xi_e} > 0$
- instable si $\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}(\xi_e)$ maximum : $\left(\frac{d\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}}{d\xi}\right)_{\xi_e} = 0$ et $\left(\frac{d^2\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}}{d\xi^2}\right)_{\xi_e} < 0$
- Oscillations au voisinage d'une position d'équilibre stable :

$$\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}(\xi) = \psi(\xi) \times \xi^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{2\psi(\xi_e)} \times \left(\frac{d^2\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}}{d\xi^2}\right)_{\xi_e}}$$

- Application au premier principe de la thermodynamique :

$$d\mathcal{E}_{c\text{ macro}} + dU = \delta W_{\text{ext}} + \delta Q \text{ avec } \begin{cases} U \triangleq \mathcal{E}_c^* + \mathcal{E}_{p\text{ int}} \\ d\mathcal{E}_m = \delta W^{(d)} + \delta Q \\ \delta W_{\text{int}}^{(d)} = 0 \end{cases}$$

Contact entre deux solides

- Champ de vitesse d'un solide :

$$\begin{cases} \text{Cas général : } \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_g + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{IM} \\ \text{Sans glissement : } \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{I/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{IM} \end{cases}$$

- Pivotement et roulement :

$$\begin{cases} \text{Pivotement de } \mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2 : \vec{\Omega}_{12t} = \vec{0} \text{ et } \vec{\Omega}_{12n} \neq \vec{0} \\ \text{Roulement de } \mathcal{S}_1 \text{ sur } \mathcal{S}_2 : \vec{\Omega}_{12t} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{\Omega}_{12n} = \vec{0} \end{cases}$$

- Contact entre deux solides $\Leftrightarrow \|\vec{N}_{12}\| > 0$

- Frottement entre deux solides $\Leftrightarrow \|\vec{T}_{12}\| > 0$

- Lois de Coulomb :

Glissement	Pas de glissement
$\vec{v}_g \neq \vec{0}$	$\vec{v}_g = \vec{0}$
$\vec{T}_{21} \cdot \vec{v}_g < 0$	$\ \vec{T}_{21}\ \neq 0$ (frottements)
$\ \vec{T}_{21}\ = f_d \times \ \vec{N}_{21}\ $	$\ \vec{T}_{21}\ < f_s \times \ \vec{N}_{21}\ $

- Cône de glissement :

$$\text{Pas de glissement} \Leftrightarrow \alpha < \alpha_0 = \arctan f_s / \tan \alpha \hat{=} \frac{\|\vec{T}_{21}\|}{\|\vec{N}_{21}\|}$$

- Puissance des actions de contact :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \vec{R}_{21} \cdot \vec{v}_g + \vec{\mathcal{M}}_I(R_{21}) \cdot \vec{\Omega}_{S_1/S_2}$$