

Chapitre 3

Électromagnétisme

3.1 Électrostatique

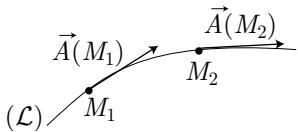
3.1.1 Outils mathématiques

- Une **ligne de champ** (\mathcal{L}) est une ligne continue en tout point de laquelle le champ vectoriel $\vec{A}(M)$ est tangent à (\mathcal{L}) sans changer de sens :

$$\forall M \in \mathcal{L} \quad \vec{A}(M) \parallel \mathcal{L} \text{ et } \vec{A}(M) \text{ ne change pas de sens.}$$

Dans la pratique, pour trouver l'équation d'une ligne de champ, il conviendra de chercher l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$d\overrightarrow{OM} \wedge \vec{A}(M) = \vec{0}$$



- Les **opérateurs vectoriels** rencontrés⁽¹⁾ en électromagnétisme sont :

- le **gradient d'un champ scalaire** ψ :

$$d\psi \hat{=} \overrightarrow{\text{grad}} \psi \cdot d\overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \vec{e}_z$$

- l'opérateur **Nabla** :

$$\vec{\nabla} \hat{=} \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

qui permet d'exprimer le gradient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \psi = \vec{\nabla} \psi$$

- la **divergence** d'un champ vectoriel $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$:

1. Les expressions de ces opérateurs doivent être connues en coordonnées cartésiennes x, y, z ; les expressions du gradient en coordonnées cylindriques et sphériques devront également être connues. Les autres expressions seront rappelées dans les énoncés, lorsqu'elles devront être utilisées.

$$\operatorname{div} \vec{A} \hat{=} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

– le **rotationnel** d'un champ vectoriel \vec{A} :

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

qui peut s'exprimer comme un produit vectoriel par l'opérateur nabla :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\operatorname{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

– le **Laplacien** d'un champ scalaire :

$$\Delta \psi \hat{=} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \vec{\nabla}^2 \psi$$

Le Laplacien d'un champ vectoriel s'exprime, en coordonnées cartésiennes, comme le Laplacien des trois composantes du vecteur $\vec{A} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$:

$$\Delta \vec{A} = \Delta A_x \vec{e}_x + \Delta A_y \vec{e}_y + \Delta A_z \vec{e}_z / \Delta A_\alpha \hat{=} \frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial z^2}$$

L'opérateur Nabla permet de retrouver rapidement certaines relations entre les opérateurs vectoriels :

– En notant $\nabla_x \psi$, $\nabla_y \psi$ et $\nabla_z \psi$ les composantes de $\vec{\operatorname{grad}} \psi$, il vient :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\vec{\operatorname{grad}} \psi) &= \frac{\partial \nabla_x \psi}{\partial x} + \frac{\partial \nabla_y \psi}{\partial y} + \frac{\partial \nabla_z \psi}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \\ \Rightarrow \Delta \psi &= \operatorname{div} (\vec{\operatorname{grad}} \psi) \end{aligned}$$

On obtient ce résultat plus directement, en utilisant l'opérateur Nabla :

$$\operatorname{div} (\vec{\operatorname{grad}} \psi) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \psi = \nabla^2 \psi = \Delta \psi \Rightarrow \Delta \psi = \operatorname{div} (\vec{\operatorname{grad}} \psi)$$

– On démontre, de même, que $\vec{\operatorname{rot}} (\vec{\operatorname{grad}} \psi) = \vec{0}$, quel que soit le champ scalaire ψ :

$$\begin{aligned} \vec{\operatorname{rot}} (\vec{\operatorname{grad}} \psi) &= \left(\frac{\partial \nabla_z \psi}{\partial y} - \frac{\partial \nabla_y \psi}{\partial z} \right) \vec{e}_x \\ &\quad + \left(\frac{\partial \nabla_x \psi}{\partial z} - \frac{\partial \nabla_z \psi}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial \nabla_y \psi}{\partial x} - \frac{\partial \nabla_x \psi}{\partial y} \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla_\alpha \psi}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \nabla_\beta \psi}{\partial x_\alpha} &= \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\beta} \right) = 0 \\ \Rightarrow \vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{grad}} \psi \right) &= \vec{0} \end{aligned}$$

soit encore :

$$\vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{grad}} \psi \right) = \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \psi \right) = \vec{0}$$

en considérant que $\vec{\nabla} \parallel \vec{\nabla} \psi$.

– Quel que soit le champ vectoriel \vec{A} :

$$\begin{aligned} \text{div} \left(\vec{\text{rot}} \vec{A} \right) &= \text{div} \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} = 0 \\ \Rightarrow \text{div} \left(\vec{\text{rot}} \vec{A} \right) &= \vec{0} \end{aligned}$$

En remarquant que $\vec{\nabla} \perp \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$, on obtient plus directement :

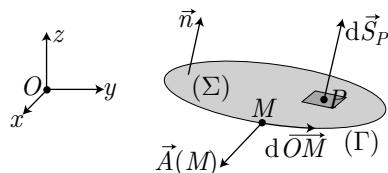
$$\text{div} \left(\vec{\text{rot}} \vec{A} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A} \right) = 0$$

– De même :

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{A} \right) &= \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A} \right) = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} \\ \Rightarrow \vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{A} \right) &= \vec{\text{grad}} \left(\text{div} \vec{A} \right) - \Delta \vec{A} \end{aligned} \quad (1)$$

Les opérateurs vectoriels sont indissociables des deux théorèmes qui suivent (et qui servent en fait de définition à la divergence et au rotationnel) :

– **Le théorème de Stokes-Ampère.**

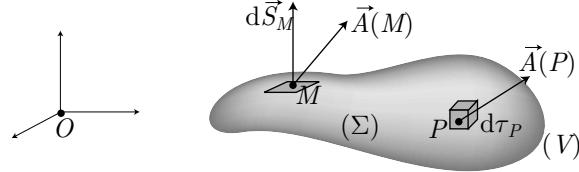


Sur toute surface (Σ) circonscrite dans un parcours fermé (Γ) , la **circulation** du champ vectoriel \vec{A} vérifie :

$$\mathcal{C}_A \doteq \oint_{(\Gamma)} \vec{A}(M) \cdot d\vec{OM} = \iint_{(\Sigma)} \vec{\text{rot}} \vec{A}(P) \cdot d\vec{S}_P$$

L'orientation de la surface est donnée par la main droite : les doigts de cette main tournant dans le sens de parcours de (Γ) , le pouce tendu donne l'orientation du vecteur \vec{n} .

– Le **théorème de Green-Ostrogradski**.



Le **flux** d'un champ vectoriel \vec{A} à travers une surface fermée (Σ) vérifie :

$$\phi_A \hat{=} \iint_{(\Sigma)} \vec{A}(M) \cdot d\vec{S}_M = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{A}(P) d\tau_P$$

– Le **théorème de Kelvin⁽²⁾**.

Ce théorème permet le calcul de la « circulation » d'un champ scalaire ψ le long d'un parcours fermé (Γ) :

$$\oint_{(\Gamma)} \psi(M) d\vec{OM} = - \iint_{(\Sigma)} \vec{\operatorname{grad}} \psi(P) \wedge d\vec{S}_P$$

Enfin, dans tous le cours, nous supposerons les fonctions suffisamment régulières pour vérifier le **théorème de Schwartz** :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x_\alpha} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\alpha \partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \equiv \vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial t}$$

3.1.2 Rappels d'électrostatique

Champ et potentiel électrostatiques

Soit un système (\mathcal{S}) de N points P_i , possédant les charges respectives q_i . Ce système produit en tout point M de l'espace un **champ électrique** $\vec{E}(M)$ et un **potentiel électrique** $V(M)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\vec{P}_i M}{\vec{P}_i M^3} \\ V(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{\vec{P}_i M} \end{array} \right.$$

où ϵ_0 est la **permittivité électrique du vide** ($\epsilon_0 \simeq 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$). Ces expressions admettent des équivalents lorsque les charges sont réparties continûment dans un volume (\mathcal{V}), sur une surface (\mathcal{S}) ou sur une courbe (\mathcal{L}) :

2. Contrairement aux deux théorèmes précédents, le théorème de Kelvin n'est pas supposé connu des étudiants.

$$\begin{array}{ll}
 \vec{E}(M) = \int_{(\mathcal{L})} \frac{\lambda(P) d\ell_P}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} & V(M) = \int_{(\mathcal{L})} \frac{\lambda(P) d\ell_P}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{PM} \\
 \vec{E}(M) = \iint_{(\mathcal{S})} \frac{\sigma(P) dS_P}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} & V(M) = \iint_{(\mathcal{S})} \frac{\sigma(P) dS_P}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{PM} \\
 \vec{E}(M) = \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{\rho(P) d\tau_P}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} & V(M) = \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{\rho(P) d\tau_P}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{PM}
 \end{array}$$

où $\lambda(P) \hat{=} \frac{\delta q}{d\ell}$, $\sigma(P) \hat{=} \frac{\delta q}{dS}$, $\rho(P) \hat{=} \frac{\delta q}{d\tau}$ sont respectivement la **densité linéique de charge**, la **densité surfacique de charge** et la **densité volumique de charge**, qui lient la charge δq à l'élément (de longueur $d\ell$, de surface dS ou de volume $d\tau$) qui contient cette charge.

Quelques propriétés

- Le champ électrostatique dérive d'un potentiel :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M)$$

- Une charge ponctuelle q placée en un point M où règne un potentiel électrostatique $V(M)$ a pour **énergie potentielle électrique** :

$$\mathcal{E}_p = q \times V(M)$$

- Un ensemble (\mathcal{S}) de N charges ponctuelles q_i situées en des points M_i de l'espace possède une énergie potentielle électrique :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(M_i)$$

- La symétrie de la distribution de charge \mathcal{D} (linéique, surfacique ou volumique) détermine souvent la direction du champ électrique :

- \mathcal{D} est **symétrique** par rapport à un plan (Π_s) si $\mathcal{D}(P) = \mathcal{D}(P')$ pour tout couple de points P et P' symétriques par rapport à (Π_s) ; dans ce cas, en tout point M de (Π_s) , $\vec{E}(M)$ est contenu dans (Π_s) :

$$\forall P' = \text{sym} \{P\}, \mathcal{D}(P') = \mathcal{D}(P) \Rightarrow \vec{E}(M) \in (\Pi_s) \forall M \in (\Pi_s)$$

Cette propriété s'étend à tout axe de symétrie (\mathcal{A}_s) pour la distribution de charge :

$$\forall P' = \text{sym} \{P\}, \mathcal{D}(P') = \mathcal{D}(P) \Rightarrow \vec{E}(M) \parallel (\mathcal{A}_s) \forall M \in (\mathcal{A}_s)$$

- \mathcal{D} est **antisymétrique** par rapport à un plan (Π_a) si $\mathcal{D}(P') = -\mathcal{D}(P)$ pour tout couple de points (P, P') symétriques par rapport à (Π_a) ; dans ce cas, en tout point M de (Π_a) , $\vec{E}(M)$ est perpendiculaire à (Π_a) :

$$\forall P' = \text{sym} \{P\}, \mathcal{D}(P') = -\mathcal{D}(P) \Rightarrow \vec{E}(M) \perp (\Pi_a) \forall M \in (\Pi_a)$$

- Le long d'une ligne de champ \mathcal{L} :
 - le champ $\vec{E}(M)$ est tangent à \mathcal{L} : $\vec{E}(M) \wedge d\overrightarrow{OM}$;
 - $\vec{E}(M)$ garde un sens constant.
 - $\vec{E}(M)$ est toujours dirigé vers les potentiels décroissants.
 - Les **surfaces équipotielles** sont perpendiculaires à \mathcal{L} en tout point de \mathcal{L} .
- Le potentiel est toujours continu à la traversée d'une distribution volumique ou surfacique de charge, mais pas nécessairement à la traversée d'une distribution linéique.

Théorème de Gauss

Le **flux** ϕ_E du champ électrique à travers toute surface fermée (Σ) est proportionnel à la charge q_{int} contenue à l'intérieur du volume V circonscrit dans (Σ) :

$$\phi_E \hat{=} \iint_{(\Sigma)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Ce théorème est non seulement à l'origine de nombreux calculs de champs électrostatiques, mais est également à l'origine des deux théorèmes suivants :

Théorème 1. *Le potentiel V n'admet pas d'extremum en dehors des charges électriques.*

Théorème 2. *Entre deux points de même potentiel ne peut passer la même ligne de champ.*

3.1.3 Continuité du champ électrique

Théorème 3. *Le potentiel est calculable à la traversée d'un volume chargé, d'une surface chargée, mais pas nécessairement d'une ligne chargée.*

Théorème 4. *Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est en général calculable à l'intérieur d'une distribution volumique de charge.*

Pour confirmer la possibilité de calculer le champ électrique à l'intérieur d'une distribution volumique de charge, rappelons que le théorème de Gauss donne l'expression du champ électrique en un point P d'une boule de rayon R et portant une charge Q répartie uniformément en volume :

$$\vec{E}(P) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \times r \vec{e}_r$$

Théorème 5. *Dans le cas général, le calcul du champ électrique sur une distribution surfacique ou linéique de charge n'est pas possible.*

Par exemple montrons qu'il n'est pas possible de calculer le champ électrique en un point M d'une sphère chargée uniformément en surface (avec une densité de charge σ). Soit (Σ) une sphère de centre O , de rayon r , en un point M de laquelle un élément de surface vaut $d\vec{S}_M = dS_M \vec{e}_r$, où \vec{e}_r est le vecteur radial. Pour des raisons de symétrie, le champ $\vec{E}(M)$ ne dépend que de $r = OM$ et est colinéaire à \vec{e}_r : $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$; son flux à travers (Σ) vaut ainsi :

$$\phi_E \stackrel{def}{=} \iint_{(\Sigma)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M = \iint_{(\Sigma)} E(r) dS_M = E(r) \times 4\pi r^2$$

- Si $r > R$, la charge à l'intérieur de (Σ) vaut Q , de sorte que le théorème de Gauss indique que :

$$\phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

- Si $r < R$, la charge q_{int} à l'intérieur de (Σ) est nulle, ce qui conduit à :

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \vec{E}(M) = \vec{0}$$

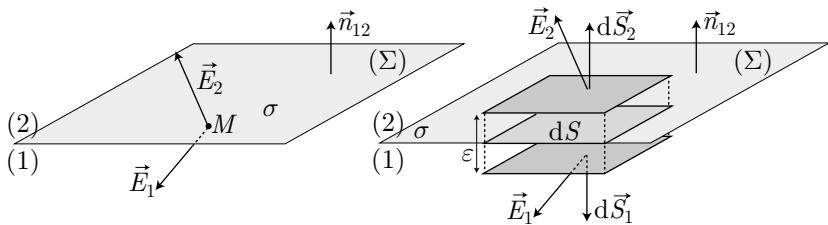
Par conséquent :

$$\lim_{r \rightarrow R^+} \vec{E} \neq \lim_{r \rightarrow R^-} \vec{E}$$

ce qui montre que le champ \vec{E} en un point M de (Σ) ne peut être connu par ce calcul.

Discontinuité du champ

Considérons une surface (Σ) localement plane et comportant une densité surfacique de charge σ . Soit un parallélépipède rectangle (\mathcal{P}) de section dS et de hauteur $\varepsilon \ll 1$, dont deux faces parallèles appartiennent aux milieux (1) et (2) situés de part et d'autre de (Σ) . Les champs électriques sur ces deux faces seront notés \vec{E}_1 et \vec{E}_2 , tandis que \vec{n}_{12} désigne un vecteur unitaire dirigé de (1) vers (2). Nous supposerons ε suffisamment petit pour négliger la surface latérale de \mathcal{P} .



Le flux du champ magnétique à travers la surface de \mathcal{P} vaut alors :

$$\phi_E = \iint_{\mathcal{P}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 = \left(-\vec{E}_1 \cdot \vec{n}_{12} + \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_{12} \right) dS$$

car $d\vec{S}_1 = -dS \vec{n}_{12}$ et $d\vec{S}_2 = dS \vec{n}_{12}$.

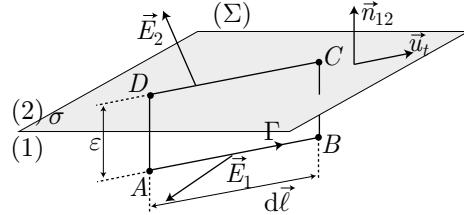
La charge contenue à l'intérieur de \mathcal{P} valant $q_{\text{int}} = \sigma dS$, le théorème de Gauss fournit :

$$\phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0} \Rightarrow -\vec{E}_1 \cdot \vec{n}_{12} + \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_{12} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Notamment, si \vec{E}_1 et \vec{E}_2 peuvent être décomposés sur les vecteurs unitaires $\vec{n}_{12} \perp \mathcal{P}$ et $\vec{u}_t \parallel \mathcal{P}$:

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = E_{1n} \vec{n}_{12} + E_{1t} \vec{u}_t \\ \vec{E}_2 = E_{2n} \vec{n}_{12} + E_{2t} \vec{u}_t \end{cases} \Rightarrow E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (2)$$

Considérons maintenant un parcours rectangulaire (Γ) = ($ABCD$) dont deux côtés parallèles AB et CD sont situés de part et d'autre d'une surface (Σ) chargée avec une densité surfacique σ . Ces deux côtés sont séparés d'une distance ε infiniment petite et ont une longueur $d\ell$ qui permet de poser $\overrightarrow{AB} = d\ell \vec{u}_t$ et $\overrightarrow{CD} = d\ell \vec{u}_t$.



Puisque $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, la circulation \mathcal{C} de \vec{E} le long de (Γ) est nulle :

$$\mathcal{C} \hat{=} \oint_{(\Gamma)} \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{OM} = - \oint_{(\Gamma)} \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\overrightarrow{OM} = - \oint_{(\Gamma)} dV = 0$$

C'est pourquoi :

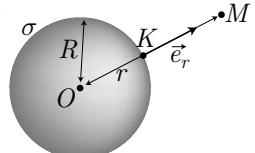
$$\mathcal{C} = \vec{E}_1 \cdot \overrightarrow{AB} + \vec{E}_2 \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow (\vec{E}_1 \cdot \vec{u}_t - \vec{E}_2 \cdot \vec{u}_t) d\ell = 0 \Rightarrow E_{1t} - E_{2t} = 0$$

Ce résultat, associé à la relation (2) conduit à :

$$\begin{cases} E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \\ E_{2t} - E_{1t} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{2n} \vec{n}_{12} - E_{1n} \vec{n}_{12} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{12} \\ E_{1t} \vec{u}_t - E_{2t} \vec{u}_t = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{12} \quad (3)$$

Par exemple, une sphère dont la charge Q est répartie en surface avec une densité σ uniforme produit dans l'espace un champ électrostatique :

$$\begin{cases} \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r \vec{e}_r \text{ pour } r > R \\ \vec{E}(r) = \vec{0} \text{ pour } r < R \end{cases}$$



En un point K de la surface de la sphère, tel que :

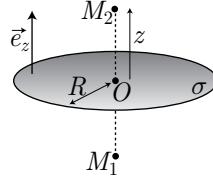
$$\vec{E}(K^+) \hat{=} \lim_{r \rightarrow R^+} \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \vec{e}_r = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_r$$

et $\vec{E}(K^-) \hat{=} \lim_{r \rightarrow R^-} \vec{E} = \vec{0}$, on vérifie aisément que :

$$\vec{E}(K^+) - \vec{E}(K^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_r$$

De même, rappelons l'expression du champ électrostatique créé par un disque chargé en surface, en un point M de son l'axe Oz :

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \vec{e}_z$$



soit encore :

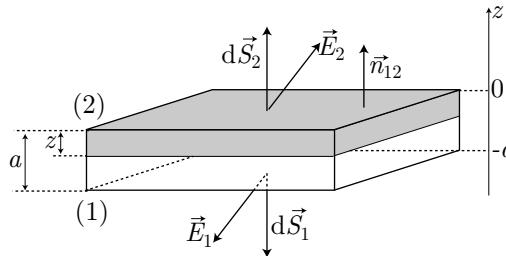
$$\begin{cases} \vec{E}_2 = \vec{E}(M_2) \hat{=} \vec{E}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \vec{e}_z \\ \vec{E}_1 = \vec{E}(M_1) \hat{=} \vec{E}(z < 0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(-1 + \frac{|z|}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \vec{e}_z \end{cases}$$

Il s'ensuit que :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(2 - \frac{2|z|}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \vec{e}_z \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_z$$

Modèle continu

La notion de répartition surfacique de charge est un modèle qui est responsable de la discontinuité apparente du champ électrique à la traversée d'une surface. En fait, les charges sont réparties dans un petit volume d'épaisseur a très faible, au voisinage de la surface.



Soit (Σ_0) la surface fermée d'un parallélépipède rectangle \mathcal{P}_0 de section dS et d'épaisseur a au voisinage d'une surface où semble se produire une discontinuité du champ électrique $\lim_{z \rightarrow 0} (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \neq \vec{0}$. Le flux de \vec{E} à travers la surface (Σ) d'un parallélépipède rectangle \mathcal{P}_0 de hauteur z vaut (lorsque z est assez petit pour négliger ce flux à travers la surface latérale) :

$$\phi_E \hat{=} \iint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E}_1(z) \cdot d\vec{S}_1 + \vec{E}_2(0) \cdot d\vec{S}_2 = \left[-\vec{E}_1(z) \cdot \vec{n}_{12} + \vec{E}_2(0) \cdot \vec{n}_{12} \right] dS$$

Soit ρ la densité de charge (supposée ici uniforme pour simplifier les calculs) à l'intérieur de \mathcal{P} . La charge δq contenue dans le volume $a dS$ de \mathcal{P}_0 vaut $\delta q = \rho a dS$; la

densité surfacique de charge est alors définie par : $\sigma \doteq \frac{\delta q}{dS} = \rho a$. C'est pourquoi la charge contenue dans \mathcal{P} vaut :

$$\delta q_{\text{int}} = \rho \times z dS = \frac{\sigma}{a} \times z dS$$

Le théorème de Gauss s'écrit donc :

$$\phi_E = \frac{\delta q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_1(z) = \vec{E}_2(0) - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \times \frac{z}{a}$$

de sorte que :

$$\lim_{z \rightarrow 0} \vec{E}_1(z) = \vec{E}_2(0)$$

ce qui lève la discontinuité de \vec{E} tout en interprétant le résultat :

$$\vec{E}_2(0) \cdot \vec{n}_{12} - \vec{E}_1(a) \cdot \vec{n}_{12} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

3.1.4 Lois locales

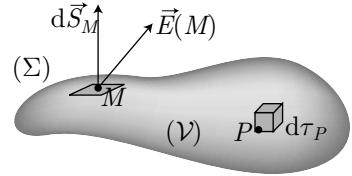
Champ électrostatique

L'existence d'un potentiel V dont dérive le champ électrostatique \vec{E} conduit à :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M) \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{grad}} V) \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$$

Soit (\mathcal{V}) le volume circonscrit dans une surface fermée (Σ) , contenant la charge q_{int} . Le théorème de Gauss impose :

$$\begin{aligned} \phi_E &= \iint_{(\Sigma)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{(\mathcal{V})} \rho(P) d\tau_P \end{aligned}$$



où le théorème de Green-Ostrogradski permet de poser :

$$\begin{aligned} \iint_{(\Sigma)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M &= \iiint_{(\mathcal{V})} \text{div} \vec{E}(P) d\tau_P \\ &\Rightarrow \iiint_{(\mathcal{V})} \left[\text{div} \vec{E}(P) - \frac{\rho(P)}{\varepsilon_0} \right] d\tau_P \end{aligned}$$

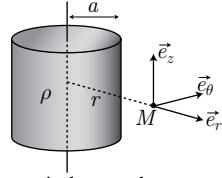
Puisque cette relation doit être vérifiée pour tout volume (\mathcal{V}) , il s'ensuit que :

$$\text{div} \vec{E}(P) = \frac{\rho(P)}{\varepsilon_0}$$

EXEMPLE

Considérons un cylindre de longueur « infinie », de rayon a , chargé uniformément en volume avec une densité ρ . Un point M de l'espace étant repéré par ses coordonnées cylindriques r, θ et z , on peut montrer, à l'aide du théorème de Gauss, que le champ électrique produit dans l'espace par cette distribution de charge s'écrit :

$$\begin{cases} E(r < a) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \\ E(r > a) = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r} \end{cases}$$



Appliquons alors l'expression locale du théorème de Gauss pour retrouver ce résultat, sachant que $\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r$, compte tenu des symétries de la distribution de charge. En outre, $\vec{E} = \vec{0}$ en $r = 0$ car sur l'axe du cylindre passent de nombreux plans de symétrie orthogonaux entre eux.

– Pour $r < a$, la divergence d'une fonction de r seulement s'écrit, en coordonnées cylindriques :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r E_r) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{d}{dr} (r E_r) = \frac{\rho r}{\epsilon_0} \Rightarrow r E_r = \frac{\rho r^2}{2\epsilon_0} + K_1$$

où K_1 est une constante que l'on trouve aisément en choisissant $r = 0 \Rightarrow K_1 = 0$. Il s'ensuit que :

$$E_r(r < a) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$$

– Pour $r > a$:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r E_r) = 0 \Rightarrow r E_r = K_2 \Rightarrow E_r = \frac{K_2}{r}$$

où K_2 est une constante que l'on peut trouver par application de la *relation de passage* (3) à travers la surface du cylindre, sur laquelle $\sigma = 0$ (les charges sont réparties dans le volume du cylindre) :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \vec{0} \text{ (car } \sigma = 0) &\Rightarrow \lim_{r \rightarrow a^+} E(r) = \lim_{r \rightarrow a^-} E(r) \\ &\Rightarrow \frac{K_2}{a} = \frac{\rho a}{2\epsilon_0} \Rightarrow K_2 = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \\ &\Rightarrow E(r > a) = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

ce qui confirme l'expression obtenue par le théorème intégral de Gauss.

Équation de Poisson

La loi locale de Gauss est à l'origine de l'équation de Poisson :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \operatorname{div} (-\overrightarrow{\operatorname{grad}} V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \Delta V(M) = -\frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

La loi qui permet le calcul du potentiel créé par une distribution apparaît ainsi comme une forme intégrale de l'équation de Poisson :

$$\Delta V(M) = -\frac{\rho(M)}{\epsilon_0} \Leftrightarrow V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{espace}} \frac{\rho(P) d\tau_P}{MP} \quad (4)$$

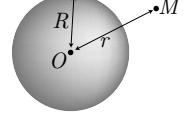
On peut également démontrer le *théorème d'unicité* :

Théorème 6. Si l'on trouve une solution à l'équation de Poisson : $\Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} = 0$ et si les valeurs limites de V sont imposées (par exemple : $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$), alors cette solution est unique.

EXEMPLE

Calculons le potentiel V produit en tout point M de l'espace par une sphère de centre O , de rayon R , portant une charge Q répartie uniformément en volume ; sa densité volumique de charge sera donnée, en tout M , par :

$$\begin{cases} \rho(r > R) = 0 \\ \rho(r < R) = \frac{3Q}{4\pi R^3} \end{cases}$$



– Pour $r > R$, le Laplacien de la fonction $V(r)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{1}{r} \frac{d^2(rV)}{dr^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \\ \Rightarrow \frac{d(rV)}{dr} &= a_1 \Rightarrow rV = a_1 r + b_1 \\ \Rightarrow V(r > R) &= a_1 + \frac{b_1}{r} \end{aligned}$$

où a_1 et b_1 sont des constantes. Puisque la distribution de charge est d'extension finie, nous pouvons supposer nul le potentiel à l'infini (valeur limite de V imposée) :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow V(r > R) = \frac{b_1}{r} \quad (5)$$

– Pour $r < R$ l'équation de Poisson fournit :

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{1}{r} \frac{d^2(rV)}{dr^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \\ \Rightarrow \frac{d^2(rV)}{dr^2} &= -\frac{3Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \Rightarrow \frac{d(rV)}{dr} = -\frac{3Qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3} + a_2 \\ \Rightarrow rV &= -\frac{Qr^3}{8\pi\varepsilon_0 R^3} + a_2 r + b_2 \Rightarrow V = -\frac{Qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3} + a_2 + \frac{b_2}{r} \end{aligned} \quad (6)$$

Le produit $r \times V$ peut être calculé en $r = 0$, auquel cas :

$$b_2 = 0 \Rightarrow V = -\frac{Qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3} + a_2$$

Puisque ΔV est fini, la fonction $\frac{d(rV)}{dr}$ est continue, ce qui se traduit par :

$$\lim_{r \rightarrow R^-} \frac{d(rV)}{dr} = \lim_{r \rightarrow R^+} \frac{d(rV)}{dr}$$

soit encore, compte tenu des expressions (5) et (6) :

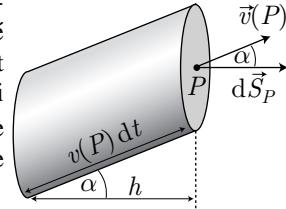
$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow R} \left[-\frac{3Qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3} + a_2 \right] &= \lim_{r \rightarrow R} \left(\frac{db_1}{dr} \right) = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R} \\ \Rightarrow V(r < R) &= -\frac{Qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3} + \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R} \end{aligned}$$

tandis que la continuité de la fonction $V(r)$ impose :

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow R^+} V(r) &= \lim_{r \rightarrow R^-} V(r) \Rightarrow \lim_{r \rightarrow R} \left(\frac{b_1}{r} \right) = \lim_{r \rightarrow R} \left(\frac{-Qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3} + \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R} \right) \\ \Rightarrow \frac{b_1}{R} &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow b_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \\ \Rightarrow V(r > R) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \end{aligned}$$

Vecteur densité de courant

Considérons un milieu conducteur de l'électricité, contenant un seul type de porteur mobile de charge, de densité volumique $\rho_m(P)$ en un point P et dont la vitesse en P vaut $\vec{v}(P)$. Pendant une durée dt , la quantité de charge δq qui traverse une surface $d\vec{S}_P$ (de vecteur $d\vec{S}_P$) est aussi celle contenue dans le volume $\delta V = h d\vec{S}_P$ d'un cylindre de hauteur $h = v(P) dt \times \cos \alpha$ et de section de base $d\vec{S}_P$:



$$\delta q = \rho_m(P) v(P) dt \cos \alpha d\vec{S}_P = \rho_m(P) dt \vec{v}(P) \cdot d\vec{S}_P$$

Le courant δi qui traverse $d\vec{S}_P$ est alors défini par :

$$\begin{aligned} \delta i &\cong \frac{\delta q}{dt} = \rho_m(P) \vec{v}(P) \cdot d\vec{S}_P \\ \Rightarrow \delta i &= \vec{j}(P) \cdot d\vec{S}_P \end{aligned}$$

où $\vec{j}(P) = \rho_m(P) \vec{v}(P)$ est le **vecteur densité de courant** au point P .

Si le milieu contient N sortes de porteurs de charges (électrons, ions, ...), la charge δq qui traverse $d\vec{S}_P$ dépend de la densité volumique $\rho_{mi}(P)$ et de la vitesse \vec{v}_i de chaque type de porteurs de charge mobiles :

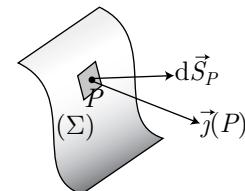
$$\begin{aligned} \delta q &= \sum_{i=1}^N \rho_{mi}(P) dt \vec{v}_i(P) \cdot d\vec{S}_P \Rightarrow \delta i = \sum_{i=1}^N \rho_{mi}(P) \vec{v}_i(P) \cdot d\vec{S}_P \\ \Rightarrow \delta i &= \vec{j}(P) \cdot d\vec{S}_P \text{ où } \vec{j}(P) = \sum_{i=1}^N \rho_{mi}(P) \vec{v}_i(P) \end{aligned}$$

Par conséquent, dans un milieu globalement neutre, il ne peut circuler un courant électrique que s'il existe plusieurs types de porteurs de charge mobiles. Par exemple :

- s'il n'existe qu'un seul type de porteur mobile de charge, $\vec{j} = \rho_m \vec{v} = \vec{0}$ car $\rho_m = 0$ dans un milieu globalement neutre.
- s'il existe deux types de porteurs mobiles de charge, le vecteur densité de courant : $\vec{j} = \rho_{1m} \vec{v}_1 + \rho_{2m} \vec{v}_2$ peut être non nul, même si le milieu est globalement neutre ($\rho_{1m} + \rho_{2m} = 0$).

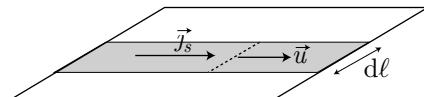
Le courant total qui traverse une surface (Σ) est donné par l'intégrale :

$$i = \iint_{(\Sigma)} \vec{j}(P) \cdot d\vec{S}_P$$



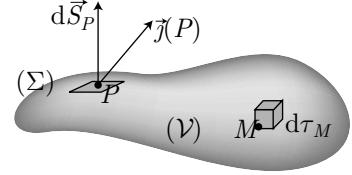
Lorsque les charges ne se déplacent qu'en surface, on définit un courant surfacique δi qui traverse une longueur $d\ell$ par sa **densité surfacique** \vec{j}_s :

$$\delta i = (\vec{j}_s \cdot \vec{u}) \times d\ell = j_s \times d\ell \text{ où } \vec{u} \perp d\ell$$



Conservation de la charge

Considérons un volume \mathcal{V} contenant une charge de densité volumique $\rho(M)$ en chaque point M , autour duquel est défini un volume élémentaire $d\tau_M$. Ce volume présente une surface (Σ) dont les vecteurs élémentaires $d\vec{S}_P$ sont dirigés vers l'extérieur de \mathcal{V} .



L'orientation des vecteurs $d\vec{S}_P$ indique que le courant i qui traverse (Σ) correspond à une sortie de charges δq_s pendant une durée dt :

$$i = \frac{\delta q_s}{dt} = \iint_{(\Sigma)} \vec{j}(P) \cdot d\vec{S}_P$$

Par conséquent la charge δq_e qui entre dans (\mathcal{V}) pendant dt vérifie :

$$\frac{\delta q_e}{dt} = - \iint_{(\Sigma)} \vec{j}(P) \cdot d\vec{S}_P$$

Le théorème de Green-Ostrogradski permet alors de poser :

$$\frac{\delta q_e}{dt} = - \iint_{(\mathcal{V})} \operatorname{div} \vec{j}(M) d\tau_M \quad (7)$$

La charge δq_e est responsable de l'accroissement de la charge contenue dans \mathcal{V} , qui passe ainsi de $q(t) \hat{=} \iiint_{(\mathcal{V})} \rho(M, t) d\tau_M$ à $q(t + dt) \hat{=} \iiint_{(\mathcal{V})} \rho(M, t + dt) d\tau_M$:

$$dq = q(t + dt) - q(t) = \iiint_{(\mathcal{V})} [\rho(M, t + dt) - \rho(M, t)] d\tau_M = \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_M d\tau_M dt$$

Or, la conservation de la charge impose :

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} = \frac{\delta q_e}{dt} &\Rightarrow \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{\partial \rho(M)}{\partial t} d\tau_M = - \iiint_{(\mathcal{V})} \operatorname{div} \vec{j}(M) d\tau_M \\ &\Rightarrow \iiint_{(\mathcal{V})} \left[\frac{\partial \rho(M)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}(M) \right] d\tau_M = 0 \end{aligned}$$

Puisque cette équation doit être vérifiée quel que soit le volume \mathcal{V} , il s'ensuit que :

$$\operatorname{div} \vec{j}(M) + \frac{\partial \rho(M)}{\partial t} = 0$$

3.2 Magnétostatique

3.2.1 Calculs de champs magnétiques

Loi de Biot et Savart

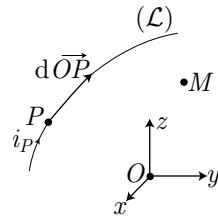
Considérons une portion de circuit électrique (\mathcal{L}) dont chaque point P est repéré par le vecteur \overrightarrow{OP} , où circule un courant d'intensité i_P . Un élément $d\overrightarrow{OP}$ crée en tout point M de l'espace un champ magnétique donné par la loi empirique de **Biot et Savart** :

$$\delta \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i_P}{4\pi} \times \frac{d\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

μ_0 est la **perméabilité du vide** ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$).

Le champ magnétique produit en M par la totalité de (\mathcal{L}) vaut alors :

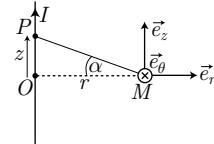
$$\vec{B}(M) = \int_{(\mathcal{L})} \frac{\mu_0 i_P}{4\pi} \frac{d\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$



EXEMPLE

Calculons, à l'aide de la loi de Biot et Savart, le champ magnétique produit en un point M de l'espace par un fil \mathcal{F} infiniment long. Soit P un point de \mathcal{F} repéré, en coordonnées cylindriques, par le vecteur $\overrightarrow{OP} = z \vec{e}_z$. En posant : $\overrightarrow{PM} = -z \vec{e}_z + r \vec{e}_r$, la loi de Biot et Savart donne l'expression du champ $\delta \vec{B}(M)$ produit en M par un élément $d\overrightarrow{OP} = dz \vec{e}_z$:

$$\begin{aligned} \delta \vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dz \vec{e}_z \wedge (-z \vec{e}_z + r \vec{e}_r)}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{r dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_\theta \\ \Rightarrow \quad \vec{B}(M) &= \frac{\mu_0 I r}{4\pi} \vec{e}_\theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$



où :

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{z}{r} \Rightarrow dz = \frac{r d\alpha}{\cos^2 \alpha} \\ z^2 + r^2 = r^2 (1 + \tan^2 \alpha) = \frac{r^2}{\cos^2 \alpha} \end{cases} \Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I r}{4\pi} \vec{e}_\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r d\alpha}{\cos^2 \alpha} \frac{\cos^3 \alpha}{r^3} \Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \vec{e}_\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha \Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

Remarque : Puisqu'un circuit parcouru par un courant électrique est toujours refermé sur lui-même :

$$\vec{B}(M) = \oint_{\mathcal{F}} \frac{\mu_0 i_P}{4\pi} \times \frac{d\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Remarque :

Si l'on tient compte de l'épaisseur du fil dans lequel circule le courant de densité $\vec{j}(P)$, à travers la surface $d\vec{S}_P$:

$$i_P = \vec{j}(P) \cdot d\vec{S}_P$$

où :

$$d\vec{S}_P = dS_P \vec{u}_P \quad \vec{j}(P) = j(P) \vec{u}_P \quad d\vec{OP} = dOP \vec{u}_P$$

en conséquence de quoi :

$$i_P d\vec{OP} = j(P) dS_P \times dOP \vec{u}_P = j(P) d\tau_P \vec{u}_P = \vec{j}(P) d\tau_P \quad (8)$$

en désignant par $d\tau_P = dS_P dOP$ le volume élémentaire de conducteur. Par suite :

$$\delta \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(P) \wedge \vec{PM}}{PM^3} d\tau_P \Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{F}} \frac{\vec{j}(P) \wedge \vec{PM}}{PM^3} d\tau_P$$

Définition 1. Un plan (Π_s) est un plan de symétrie pour le courant électrique si le vecteur densité de courant est symétrique par rapport à (Π_s) :

$$(\Pi_s) \text{ plan de symétrie} \Leftrightarrow \forall P' = \text{sym}\{P\}, \vec{j}(P') = \text{sym}\{\vec{j}(P)\}$$

Définition 2. Un plan (Π_a) est un plan d'antisymétrie pour le courant électrique si le vecteur densité de courant est antisymétrique par rapport à (Π_a) :

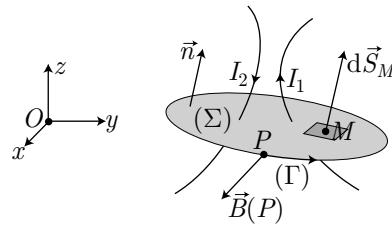
$$(\Pi_a) \text{ plan d'antisymétrie} \Leftrightarrow \forall P' = \text{sym}\{P\}, \vec{j}(P') = -\text{sym}\{\vec{j}(P)\}$$

Théorème 7. En tout point M d'un plan de symétrie (Π_s) , le champ magnétostatique est perpendiculaire à (Π_s) et en tout point M d'un plan d'antisymétrie (Π_a) , le champ magnétostatique appartient à (Π_a) :

$$\begin{cases} \forall M \in (\Pi_s), \vec{B}(M) \perp (\Pi_s) \\ \forall M \in (\Pi_a), \vec{B}(M) \in (\Pi_a) \end{cases}$$

Théorème d'Ampère

Soit un parcours fermé (Γ) décrit dans un sens qui impose une orientation \vec{n} à la surface (Σ) comprise à l'intérieur de (Γ) .



La circulation \mathcal{C}_B du champ magnétostatique le long de (Γ) est proportionnelle à l'intensité du courant algébrique qui traverse (Σ) :

$$\mathcal{C}_B \hat{=} \oint_{(\Gamma)} \vec{B}(P) \cdot d\vec{OP} = \mu_0 I_{\text{int}} = \mu_0 (I_1 - I_2)$$

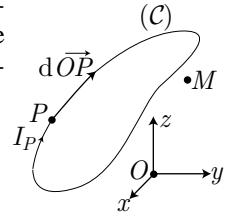
Attention : le théorème d'Ampère n'est valable qu'en magnétostatique ; on se gardera de l'appliquer sans précaution dans le cas des régimes variables dans le temps.

3.2.2 Structure du champ magnétostatique

Potentiel vecteur

Soit (\mathcal{C}) un circuit (fermé) dans lequel circule un courant d'intensité I_P en chacun de ses points P . Le champ magnétique que produit ce circuit en chaque point M de l'espace dérive d'un potentiel vecteur $\vec{A}(M)$:

$$\vec{B}(M) = \vec{\text{rot}}_M \vec{A}(M) \text{ avec } \vec{A}(M) = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\mu_0}{4\pi} I(P) \frac{d\vec{OP}}{PM}$$



DÉMONSTRATION

L'expression précédente du potentiel vecteur $\vec{A}(M)$ conduit à :

$$\vec{\text{rot}}_M \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} I_P \vec{\text{rot}}_M \left(\frac{1}{PM} d\vec{OP} \right)$$

où $\vec{\text{rot}}_M$ indique que les dérivées partielles impliquées dans l'opérateur rotationnel sont relatives aux coordonnées de M .

Or, pour tout produit d'un champ scalaire f et d'un champ vectoriel \vec{u} :

$$\vec{\text{rot}}(f \vec{u}) = f \vec{\text{rot}} \vec{u} + \vec{\text{grad}} f \wedge \vec{u}$$

d'où il s'ensuit que :

$$\vec{\text{rot}}_M \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \left[\frac{I_P}{PM} \underbrace{\vec{\text{rot}}_M(d\vec{OP})}_{=\vec{0}} + \vec{\text{grad}}_M \left(\frac{1}{PM} \right) \wedge d\vec{OP} \times I_P \right]$$

En remarquant que $\vec{\text{grad}}_M \left(\frac{1}{PM} \right) = -\frac{\vec{PM}}{PM^3}$, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}}_M \vec{A}(M) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} -\frac{\vec{PM}}{PM^3} \wedge d\vec{OP} \times I_P \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} I_P \frac{d\vec{OP} \wedge \vec{PM}}{PM^3} \end{aligned}$$

Or, conformément à la loi de Biot et Savart, ce dernier terme désigne le champ magnétique créé en M par (\mathcal{C}) , en conséquence de quoi :

$$\vec{\text{rot}}_M \vec{A}(M) = \vec{B}(M)$$

Compte tenu de la relation (8) : $I_P d\vec{OP} = \vec{j}(P) d\tau_P$, le potentiel vecteur peut également s'exprimer à partir de la densité de courant dans une distribution \mathcal{D} :

$$\vec{A}(M) = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}(P) \frac{d\tau_P}{PM} \quad (9)$$

Théorème 8. *Un champ magnétostatique uniforme \vec{B} peut dériver, en en chaque point M de l'espace, d'un potentiel vecteur :*

$$\vec{A}(M) = \frac{1}{2} \vec{B} \wedge \overrightarrow{OM}$$

DÉMONSTRATION

Soit $\vec{B} = \sum_{\alpha=1}^3 B_\alpha \vec{e}_\alpha$ l'expression d'un champ magnétostatique uniforme dans la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ servant à repérer la position de tout point M de l'espace euclidien : $\overrightarrow{OM} = \sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha \vec{e}_\alpha$. Le rotationnel du produit vectoriel $\vec{B} \wedge \overrightarrow{OM}$ s'écrit :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{B} \wedge \overrightarrow{OM}) = \vec{B} \cdot \text{div} \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM} \cdot \text{div} \vec{B} + (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \overrightarrow{OM}$$

où :

$$\begin{aligned} \text{div} \overrightarrow{OM} &= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \\ \text{div} \vec{B} &= \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (\vec{B} \text{ est uniforme}) \\ (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \overrightarrow{OM} &= \sum_{\alpha=1}^3 B_\alpha^3 \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^3 B_\alpha \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (x_\beta \vec{e}_\beta) = \sum_{\alpha=1}^3 B_\alpha \vec{e}_\alpha = \vec{B} \\ (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} &= \sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha \frac{\partial \vec{B}}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (\vec{B} \text{ est uniforme}) \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

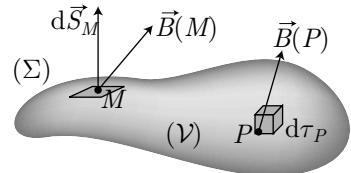
$$\vec{\text{rot}}(\vec{B} \wedge \overrightarrow{OM}) = 3 \vec{B} - \vec{B} = 2 \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \vec{\text{rot}}\left(\frac{1}{2} \vec{B} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$$

ce qui montre que $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \wedge \overrightarrow{OM}$ peut être un potentiel vecteur du champ \vec{B} .

Flux du champ magnétique

Le flux du champ magnétique à travers une surface fermée (Σ) qui circonscrit un volume \mathcal{V} est défini par :

$$\phi_B \hat{=} \iint_{(\Sigma)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_M$$



où le théorème de Green-Ostrogradski indique que :

$$\phi_B = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div}_P \vec{B}(P) d\tau_P$$

avec :

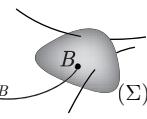
$$\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A} \Rightarrow \text{div} \vec{B} = \text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{A}) = 0 \Rightarrow \phi_B = 0$$

Cette relation montre que le champ magnétique est à **flux conservatif** : le flux du champ entrant dans \mathcal{V} est le même, en valeur absolue, que celui du champ sortant de \mathcal{V} .

Théorème 9. *Les lignes de champ magnétiques se referment sur elles-mêmes.*

DÉMONSTRATION

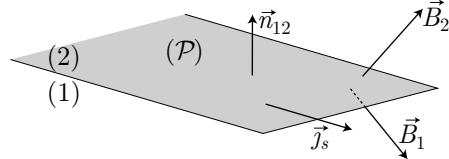
Considérons une ligne de champ \mathcal{L}_B qui s'interrompt en un point B de l'espace. Il existe alors une surface fermée (Σ) qui entoure B (surface aussi petite que souhaité) traversée par un nombre de lignes de champ entrant différent de celui des lignes de champ sortant. Le flux de \vec{B} à travers (Σ) ne peut donc pas être nul, ce qui est impossible ; il ne peut y avoir une ligne de champ qui s'interrompt à l'intérieur de (Σ) .



Relation de passage du champ magnétique

Théorème 10. *Soit un plan (\mathcal{P}) qui sépare deux milieux (1) et (2) dans lesquels règnent les champs magnétostatiques \vec{B}_1 et \vec{B}_2 au voisinage immédiat de (\mathcal{P}) . Si n_{12} désigne un vecteur unitaire normal localement à (\mathcal{P}) et dirigé du milieu (1) vers le milieu (2), la discontinuité du champ magnétique à la traversée de (\mathcal{P}) dépend du vecteur densité surfacique de courant \vec{j}_s sur (\mathcal{P}) :*

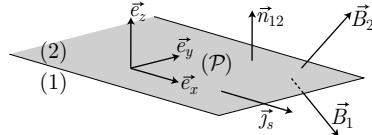
$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$$



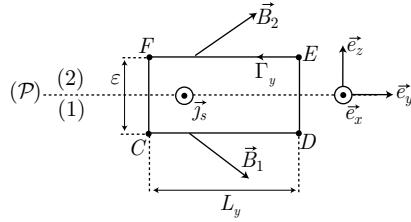
DÉMONSTRATION

Considérons un plan (\mathcal{P}) sur lequel circule un courant de densité surfacique \vec{j}_s . Il est possible d'orienter des vecteurs unitaires \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z de manière à ce que $\vec{j}_s = j_s \vec{e}_x$, le triplet $\mathcal{B} \{ \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z \}$ constituant une base directe.

Le plan (\mathcal{P}) sépare l'espace en deux demi-espaces notée (1) et (2) dans lesquels le champ magnétique vaut respectivement $\vec{B}_1 = \begin{pmatrix} B_{1x} \\ B_{1y} \\ B_{1z} \end{pmatrix}$ et $\vec{B}_2 = \begin{pmatrix} B_{2x} \\ B_{2y} \\ B_{2z} \end{pmatrix}$ au voisinage de (\mathcal{P}) . Enfin, on notera $n_{12} = \vec{e}_z$ le vecteur unitaire localement normal à (\mathcal{P}) dirigé de (1) vers (2).



- Soit Γ_y un parcours rectangulaire $(CDEF)$ tel que $\vec{CD} = L_y \vec{e}_y$, $\vec{EF} = -L_y \vec{e}_y$, $DE = FC = \varepsilon \ll 1$, les côtés CD et EF étant situés de part et d'autre de (\mathcal{P}) .



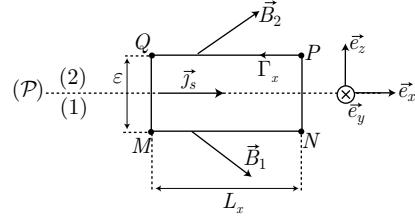
La circulation du champ magnétique le long de Γ_y vaut :

$$\mathcal{C}_y \hat{=} \oint_{\Gamma_y} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \vec{B}_1 \cdot \overrightarrow{CD} + \vec{B}_2 \cdot \overrightarrow{EF} = (B_{1y} - B_{2y}) L_y$$

Or, si $I_{\text{int}} = j_s \times L_y$ désigne le courant qui traverse la surface circonscrite par Γ_y , le théorème d'Ampère impose :

$$\mathcal{C}_y = \mu_0 I_{\text{int}} \Rightarrow B_{1y} - B_{2y} = \mu_0 j_s \quad (10)$$

- Considérons, de même, le parcours rectangulaire $\Gamma_x = (MNOP)$ tel que $\overrightarrow{MN} = L_x \vec{e}_x$, $\overrightarrow{PQ} = -L_x \vec{e}_x$, $PN = QM = \varepsilon \ll 1$, dont les côtés MN et PQ sont situés de part et d'autre de (\mathcal{P}) .



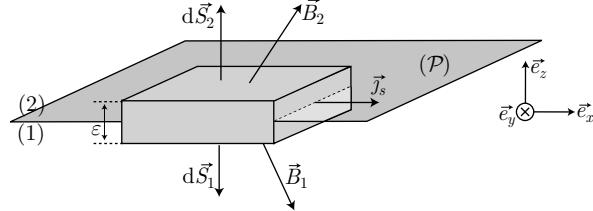
La circulation du champ magnétique le long de Γ_x vaut :

$$\mathcal{C}_x \hat{=} \oint_{\Gamma_x} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \vec{B}_1 \cdot \overrightarrow{MN} + \vec{B}_2 \cdot \overrightarrow{PQ} = (B_{1x} - B_{2x}) L_x$$

Or, la surface circonscrite dans Γ_x étant traversée par un courant nul ($j_s \perp \vec{e}_y$), le théorème d'Ampère s'écrit :

$$\mathcal{C}_x = 0 \Rightarrow B_{1x} - B_{2x} = 0 \quad (11)$$

- Soit (Σ) la surface d'un parallélépipède rectangle d'épaisseur ε infinitiment petite, dont deux faces parallèles se trouvent de part et d'autre de (\mathcal{P}) .



Le flux du champ magnétique à travers (Σ) vaut alors :

$$\phi_B = \iint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_2$$

En notant dS la surface de base du parallélépipède rectangle, il vient :

$$\begin{cases} d\vec{S}_1 = -dS \vec{e}_z \\ d\vec{S}_2 = dS \vec{e}_z \end{cases} \Rightarrow \phi_B = dS \times (\vec{B}_2 \cdot \vec{e}_z - \vec{B}_1 \cdot \vec{e}_z) = dS \times (B_{2z} - B_{1z})$$

mais puisque \vec{B} est à flux conservatif :

$$\phi_B = 0 \Rightarrow B_{2z} - B_{1z} = 0 \quad (12)$$

En conclusion, le champ magnétique subit une discontinuité à la traversée de (\mathcal{P}) , telle que :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{B} \hat{=} \vec{B}_2 - \vec{B}_1 &= \underbrace{(B_{2x} - B_{1x})}_{=0} \vec{e}_x + (B_{2y} - B_{1y}) \vec{e}_y + \underbrace{(B_{2z} - B_{1z})}_{=0} \vec{e}_z \\ &= -\mu_0 j_s \vec{e}_y = -\mu_0 j_s \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x = -\mu_0 \vec{e}_z \wedge (j_s \vec{e}_x) \\ &= -\mu_0 \vec{n}_{12} \wedge \vec{j}_s \Rightarrow \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12} \end{aligned}$$

3.3 Conducteurs en équilibre électrostatique

3.3.1 Les conducteurs

Condition d'équilibre

Dans un conducteur, les charges se répartissent en deux groupes : les **charges mobiles**, libres de se déplacer et les **charges liées** qui ne peuvent se déplacer parce qu'elles sont liées à la structure du conducteur. La densité volumique de charge en chaque point M vaut ainsi :

$$\rho(M) = \rho_m(M) + \rho_{liées}(M)$$

La neutralité électrique d'un conducteur n'implique pas nécessairement l'absence de charge mobile :

$$\rho(M) = 0 \not\Rightarrow \rho_m(M) = 0$$

Par exemple, la densité de courant dans un conducteur vaut :

$$\vec{j}(M) = \rho_m \vec{v}_m + \rho_{liées} \vec{v}_{liées} = \rho_m \vec{v}_m \text{ car } \vec{v}_{liées} = \vec{0}$$

ce qui justifie qu'un courant électrique peut circuler dans un conducteur ($\vec{j} = \rho_m \vec{v}_m \neq \vec{0}$) en dépit de sa neutralité électrique ($\rho(M) = 0$).

L'équilibre du conducteur impose cependant l'immobilité de toutes les charges, ce qui n'est possible qu'à condition que le champ électrique soit nul dans le conducteur (sans quoi les charges mobiles seraient accélérées) : $\vec{E}_{int} = \vec{0}$. Il s'ensuit que :

$$\text{div } \vec{E}_{int} = 0 \Rightarrow \rho(M) = 0$$

ce qui confirme la neutralité électrique globale d'un conducteur en équilibre électrique.

En outre, l'absence de charge dans le volume du conducteur rejette les éventuelles charges à la surface du conducteur. Quant au potentiel V_{int} à l'intérieur du conducteur, il vérifie :

$$\vec{E}_{int} = -\overrightarrow{\text{grad}} V_{int} = \vec{0} \Rightarrow V_{int} = \text{cte}$$

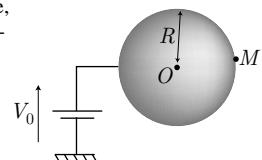
La continuité du potentiel à la surface d'un conducteur impose alors : $V_{surface} = \text{cte}$, ce qui signifie encore que le conducteur en équilibre constitue un volume équipotentiel. Enfin, puisque les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles, le champ électrique à l'extérieur d'un conducteur est perpendiculaire à la surface du conducteur en son voisinage.

APPLICATION

Déterminons la charge Q portée par un conducteur sphérique plein, de rayon R , placé au potentiel V_0 .

Pour cela, il suffit de se rappeler que les charges se répartissent en surface, avec une densité σ que nous supposerons uniforme. C'est pourquoi le potentiel créé en O par cette distribution vaut :

$$V_0 = V(O) = \iint_{(\Sigma)} \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \iint_{(\Sigma)} \sigma dS$$



La charge Q vérifie donc :

$$V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow Q = 4\pi\epsilon_0 R V_0$$

Ce résultat peut être confirmé par le théorème de Gauss qui permet d'exprimer le champ électrique \vec{E}_{ext} à l'extérieur de la boule : $\vec{E}_{\text{ext}}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$. En supposant nul le potentiel à l'infini, l'expression de \vec{E}_{ext} fournit :

$$\vec{E}_{\text{ext}} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r \Rightarrow V(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Notamment, en $r = R$, la continuité du potentiel impose :

$$V_0 = \lim_{r \rightarrow R} V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow Q = 4\pi\epsilon_0 R V_0$$

Théorème de Coulomb

Théorème 11. Soit un point M situé à la surface d'un conducteur en équilibre électrique, où se trouvent des charges de densité surfacique $\sigma(M)$ et soit \vec{n}_{12} un vecteur unitaire normal à la surface et dirigé vers l'extérieur du conducteur. Le champ électrique en situé au voisinage de M à l'extérieur du conducteur vaut :

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$$

DÉMONSTRATION

À l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrique, le champ électrique \vec{E}_{int} est nul ainsi que la densité volumique de charge (les charges sont donc réparties exclusivement à la surface du conducteur). Au voisinage du point M , la relation de passage (3) suggère que :

$$\vec{E}_{\text{ext}} - \underbrace{\vec{E}_{\text{int}}}_{=0} = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \Rightarrow \vec{E}_{\text{ext}}(M) = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$$

Cavité dans un conducteur

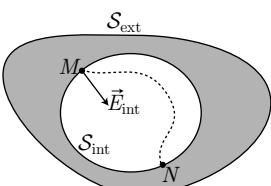
Théorème 12. Le champ électrique à l'intérieur d'une cavité vide située dans un conducteur est nul.

DÉMONSTRATION

Soient M et N deux points quelconques situés sur la surface intérieure \mathcal{S}_{int} de la cavité. L'absence de charge dans la cavité interdit l'existence d'un extremum pour le potentiel V , quel que soit le déplacement choisi entre M et N . Or, M et N étant au même potentiel, cela signifie aussi que tous les points de la cavité sont au même potentiel ; le champ :

$$\vec{E}_{\text{int}} = -\overrightarrow{\text{grad}} V_{\text{int}}$$

est donc nul dans la cavité.



Théorème 13. Les charges se répartissent sur la surface externe \mathcal{S}_{ext} du conducteur.

DÉMONSTRATION

Si des charges devaient exister à l'intérieur du conducteur, elles se répartiraient nécessairement sur la surface S_{int} de la cavité (elles ne peuvent se trouver dans la partie conductrice et, par hypothèse, la cavité est vide de charge). Mais dans ce cas, le théorème de Coulomb prévoit l'existence d'un champ de norme $\|\vec{E}_{\text{int}}\| = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0}$ à l'intérieur de la cavité, laquelle est nulle conformément au théorème précédent. Par conséquent, $|\sigma| = 0$ montre que même la surface S_{int} ne peut contenir de charge.

Capacité d'un conducteur

Définition 3. Soit un conducteur portant une charge Q et placé au potentiel V . La capacité C de ce conducteur est définie par le rapport :

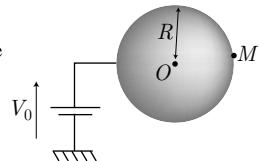
$$C \hat{=} \frac{Q}{V}$$

La capacité d'un conducteur ne dépend que de sa géométrie.

EXEMPLE

Une boule métallique de rayon R portée au potentiel V_0 contient la charge $Q = 4\pi\varepsilon_0 R V_0$. Sa capacité vaut donc :

$$C = \frac{Q}{V_0} = 4\pi\varepsilon_0 R$$



Effet de pointe

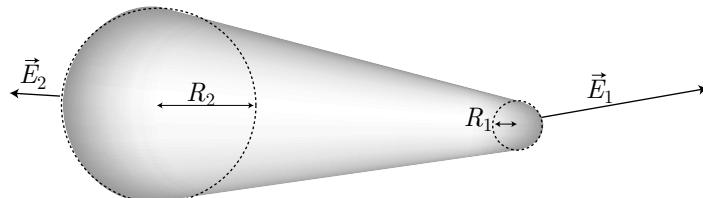
La charge d'une boule métallique de rayon R portée au potentiel V valant $Q = 4\pi\varepsilon_0 R V$, sa densité surfacique de charge s'écrit :

$$\sigma = \frac{4\pi\varepsilon_0 R V}{4\pi R^2} = \varepsilon_0 \frac{V}{R}$$

Le théorème de Coulomb prévoit donc qu'au voisinage immédiat de la surface de la boule règne un champ électrique de norme :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{V}{R}$$

Considérons maintenant une pointe métallique dont les extrémités sont assimilées à deux boules de rayon R_2 et $R_1 \ll R_2$:



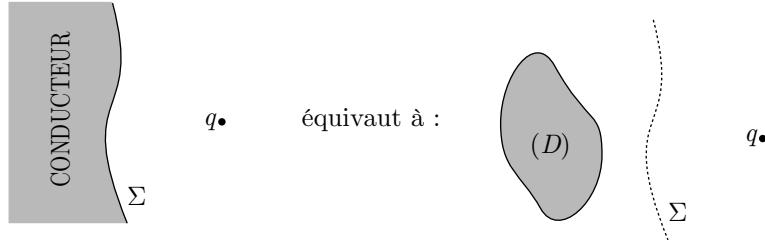
Les deux extrémités sphériques de la pointe métallique étant au même potentiel, il s'ensuit que :

$$V = E \times R = \text{cte} \Rightarrow E_1 R_1 = E_2 R_2 \Rightarrow E_1 = E_2 \times \frac{R_2}{R_1} \gg E_2$$

Cet inégalité interprète la formation préférentielle des éclairs aux voisins d'objets pointus.

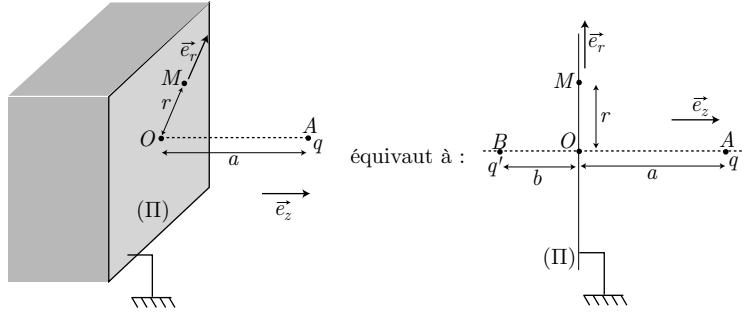
Images électriques

Théorème 14. Soit un conducteur parfait en équilibre électrique avec une charge q dans l'espace, la surface Σ du conducteur se trouvant au potentiel V . Du point de vue du champ électrique et du potentiel en dehors du conducteur, cette configuration équivaut à celle que produirait une distribution de charge (D) avec q , à condition que Σ soit la même surface équipotentielle de valeur V .



EXEMPLE

Déterminons comment les charges se répartissent à la surface (Π) d'un conducteur de potentiel nul, à l'approche d'une charge ponctuelle q à la distance a du conducteur plan infini. Pour cela, nous supposerons que l'ensemble {conducteur + charge q } équivaut à deux charges q et q' qui produisent, sur le plan Π , un potentiel nul.



1. Recherche des caractéristiques de q' :

Quel que soit le point M de Π , le potentiel $V(M)$ doit être nul, avec :

$$4\pi\epsilon_0 V(M) = \frac{q}{AM} + \frac{q'}{BM} = 0 \Rightarrow q' = -q \times \frac{BM}{AM} \quad (13)$$

Quant au champ électrique produit par q et q' en tout point M de Π :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q \vec{AM}}{AM^3} + \frac{q' \vec{BM}}{BM^3} \right)$$

il doit être perpendiculaire à Π en tout point M conformément au théorème de Coulomb :

$$\vec{E}(M) \cdot \vec{e}_r = 0 \Rightarrow q \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{e}_r}{AM^3} + q' \frac{\overrightarrow{BM} \cdot \vec{e}_r}{BM^3} = 0$$

c'est-à-dire, en tenant compte de l'équation (13) :

$$\begin{aligned} \frac{qr}{AM^3} + \frac{q'r}{BM^3} = 0 &\Rightarrow \frac{q}{AM^3} - q \times \frac{BM}{AM} \times \frac{1}{BM^3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{AM^3} = \frac{1}{AM} \times \frac{1}{BM^2} \\ &\Rightarrow AM^2 = BM^2 \Rightarrow AM = BM \Rightarrow \begin{cases} q' = -q \\ b = a \end{cases} \end{aligned}$$

2. Calcul de $\vec{E}(M)$:

Compte tenu de ce qui précède :

$$\begin{aligned} \vec{E}(M) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{AM}}{AM^3} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{BM}}{BM^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 AM^3} \underbrace{\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} \right)}_{\overrightarrow{AB} = -2a \vec{e}_z} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}} \times (-2a \vec{e}_z) \\ &\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{-qa}{2\pi\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z \end{aligned}$$

3. Le théorème de Coulomb conduit alors à :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma(M) \vec{e}_z}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma(M) = -\frac{qa}{2\pi (a^2 + z^2)^{3/2}}$$

On peut en déduire la charge totale portée par la surface du conducteur :

$$\begin{aligned} q_{\text{cond}} &= \iint_{(\Pi)} \sigma(M) dS = \iint_{(\Pi)} \frac{-qa}{2\pi (a^2 + z^2)^{3/2}} \times r dr d\theta \\ &= -qa \times \left[-\frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right]_{r=0}^{\infty} \Rightarrow q_{\text{cond}} = -q \end{aligned}$$

3.3.2 Condensateurs

Définition 4. Deux surfaces conductrices sont en influence totale si toutes les lignes de champ qui partent de l'une arrivent à l'autre.

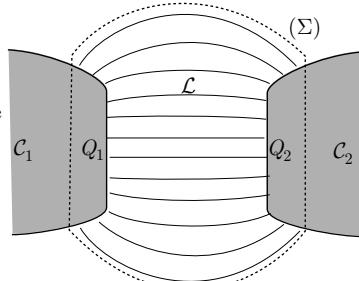
Théorème 15. *Deux surfaces conductrices en influence totale portent les mêmes charges, mais de signe opposé.*

DÉMONSTRATION

Considérons une surface (Σ) entourant complètement toutes les lignes de champ entre les conducteurs C_1 et C_2 en influence totale et passant à l'intérieur de C_1 et C_2 .

On note Q_1 et Q_2 les charges portées par C_1 et C_2 (en surface). Le flux ϕ_E du champ électrique à travers (Σ) vérifie le théorème de Gauss :

$$\begin{aligned} \phi_E &\equiv \iint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0 \\ &\Rightarrow Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow Q_2 = -Q_1 \end{aligned}$$

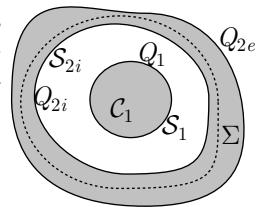


Par conséquent, pour être en influence totale, il suffit d'une des surfaces entourent complètement l'autre. Dans ce cas, les charges Q_1 et Q_{2i} portées par les deux surfaces S_1 et S_{2i} en influence totale vérifient :

$$Q_{2i} + Q_1 = 0$$

Ce résultat est une conséquence directe du théorème de Gauss : si l'on calcule le flux du champ électrique à travers une surface Σ entièrement comprise à l'intérieur du conducteur externe, le résultat doit être nul puisque le champ électrique est nul dans un conducteur parfait :

$$\phi_E \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \text{ car } \vec{E} = \vec{0}$$



Ainsi, la charge q_{int} comprise à l'intérieur de Σ (nécessairement limitée aux charges Q_1 et Q_{2i} des deux surfaces en influence) est nulle :

$$q_{\text{int}} = 0 \Rightarrow Q_1 + Q_{2i} = 0$$

Définition 5. Un condensateur est un ensemble de deux conducteurs en influence totale.

Les charges Q_1 et Q_{2i} des surfaces en influence totale, portées aux potentiels respectifs V_1 et V_2 , sont proportionnelles à la différence de potentiel entre les deux armatures en influence :

$$Q_1 = C \times (V_1 - V_2) \text{ ou } Q_{2i} = C \times (V_2 - V_1)$$

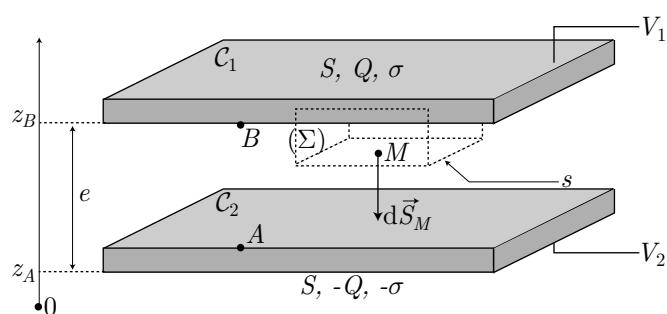
où C est la **capacité** du condensateur.

Attention : les seules charges qui interviennent dans la définition de C sont celles portées par l'une des deux surfaces en influence totale (ce qui exclut Q_{2e} par exemple).

Calcul d'une capacité

Pour déterminer la capacité C d'un condensateur, une première méthode consiste à opérer en trois temps : détermination du champ électrique $\vec{E}(M)$ entre les armatures à l'aide du théorème de Gauss, calcul de la différence de potentiel entre les deux armatures : $V_1 - V_2 = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{OM}$, puis utilisation de la définition :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}.$$



1. Soit Σ une surface parallélépipédique dont une des faces est contenue dans l'armature métallique plane \mathcal{C}_1 portée au potentiel V_1 . En supposant les armatures métalliques suffisamment grandes, le champ électrique ne dépend que de la coordonnée z et est colinéaire au vecteur unitaire \vec{e}_z : $\vec{E}(M) = E(z) \vec{e}_z$. En chaque point M de la base de Σ peut être définie une surface élémentaire $d\vec{S}_M = -dS \vec{e}_z$, de sorte que :

$$\phi_{\Sigma} \hat{=} \iint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M = \iint_s [E(z) \vec{e}_z] \cdot [-dS \vec{e}_z] = -E(z) \times s$$

La charge q_{int} contenue à l'intérieur de Σ s'exprime aisément à l'aide de la densité surfacique de charge portée par l'armature \mathcal{C}_1 , de surface S et de charge Q :

$$q_{\text{int}} = \sigma s = \frac{Q}{S} \times s$$

Le théorème de Gauss impose alors :

$$\begin{aligned} \phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} &\Rightarrow -E(z) \times s = \frac{Qs}{\varepsilon_0 S} \Rightarrow E(z) = -\frac{Q}{\varepsilon_0 S} \\ &\Rightarrow \vec{E}(M) = -\frac{Q}{\varepsilon_0 S} \vec{e}_z \end{aligned} \quad (14)$$

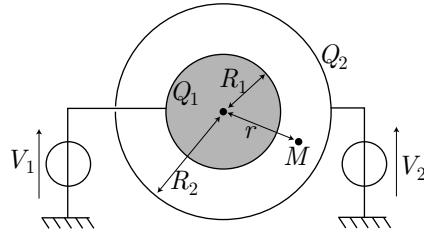
2. L'expression de $\vec{E}(M)$ conduit au calcul de la différence de potentiel $V_1 - V_2$ entre les armatures ; soient A et B deux points situés sur les armatures, portés par conséquent aux potentiels respectifs $V_B = B_1$ et $V_A = V_2$:

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= V_B - V_A = \int_{V_A}^{V_B} dV = \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\overrightarrow{OM} = - \int_A^B \vec{E}(M) \cdot d\overrightarrow{OM} \\ &\Rightarrow V_1 - V_2 = \int_A^B \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \vec{e}_z \cdot d\overrightarrow{OM} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \int_{z_A}^{z_B} dz = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} (z_B - z_A) \\ &\Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{Qe}{\varepsilon_0 S} \end{aligned}$$

3. La définition de la capacité C du condensateur conduit à :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \Rightarrow C = \varepsilon_0 \frac{S}{e}$$

Une deuxième méthode consiste à résoudre, dans un premier temps, l'équation de Poisson afin de trouver la différence de potentiel ΔV entre les armatures du condensateur puis à utiliser la définition de la capacité : $C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2}$. Illustrons cette méthode sur l'exemple d'un condensateur composé de deux sphères concentriques en influence totale, de rayons R_1 et R_2 , contenant les charges respectives Q_1 et Q_2 , portées aux potentiels respectifs V_1 et V_2 .



En coordonnées sphériques, le Laplacien de la fonction V s'écrit :

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

Or, puisque V ne dépend que de r et puisque $\rho = 0$ en dehors des armatures du condensateur ($r > R_1$ et $r \neq R_2$), l'équation de Laplace devient :

$$\begin{aligned} \Delta V = 0 &\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0 \Rightarrow r^2 \frac{dV}{dr} = \alpha \\ &\Rightarrow \frac{dV}{dr} = \frac{\alpha}{r^2} \Rightarrow V = -\frac{\alpha}{r} + \beta \end{aligned}$$

où α et β sont des constantes accessibles à partir des conditions aux limites qu'il faut alors expliciter (attention : on ne pourra pas utiliser le calcul de $r \times V$ en $r = 0$, car l'équation de Laplace est utilisée en dehors des armatures). La continuité de la fonction V à la traversée des surfaces des armatures permet de poser :

$$\begin{cases} V(R_1) = V_1 = -\frac{\alpha}{R_1} + \beta \\ V(R_2) = V_2 = -\frac{\alpha}{R_2} + \beta \end{cases} \Rightarrow V_1 - V_2 = \alpha \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

La constante α s'obtient à l'aide du champ électrique :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{d}{dr} \left(-\frac{\alpha}{r} + \beta \right) \vec{e}_r = -\frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r \Rightarrow \lim_{r \rightarrow R_1^+} \vec{E} = -\frac{\alpha}{R_1^2} \vec{e}_r$$

tandis que le théorème de Coulomb fournit :

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow R_1^+} \vec{E} &= \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \vec{e}_r = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} \vec{e}_r \\ &\Rightarrow -\frac{\alpha}{R_1^2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} \Rightarrow \alpha = -\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \\ &\Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \end{aligned}$$

Ainsi, la capacité de ce condensateur vaut :

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Énergie emmagasinée

Un ensemble de N charges q_i réparties en des points M_i possède une énergie potentielle électrostatique $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(M_i)$. Cette relation peut être étendue au cas où les charges se répartissent de manière continue à l'intérieur d'un condensateur \mathcal{C} , dont l'énergie potentielle vaut alors :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{C}} \rho(M) V(M) d\tau_M$$

où la densité volumique de charge $\rho(M)$ vérifie la loi locale de Gauss :

$$\rho(M) = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} \Rightarrow \mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{C}} \varepsilon_0 V(M) \operatorname{div} \vec{E}(M) d\tau_M$$

Cette intégrale peut être étendue à tout l'espace \mathcal{E} , à condition de poser $\rho(0) = 0$ en tout point M extérieur au condensateur :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \iiint_{(\mathcal{E})} \varepsilon_0 V(M) \operatorname{div} \vec{E}(M) d\tau_M$$

Étant donné que :

$$\operatorname{div}(V \vec{E}) = V \operatorname{div} \vec{E} + \overrightarrow{\operatorname{grad}} V \cdot \vec{E} = V \operatorname{div} \vec{E} - E^2 \Rightarrow V \operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div}(V \vec{E}) + E^2$$

il s'ensuit que :

$$\mathcal{E}_p = \frac{\varepsilon_0}{2} \left\{ \iiint_{\mathcal{E}} \operatorname{div}(V \vec{E}) d\tau_M + \iiint_{\mathcal{E}} E^2 d\tau_M \right\}$$

Or, le théorème de Green-Ostrogradski indique que :

$$\iiint_{\mathcal{E}} \operatorname{div}(V \vec{E}) d\tau_M = \iint_{\Sigma_{\infty}} V \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

où Σ_{∞} désigne une surface suffisamment grande pour englober tout l'espace \mathcal{E} , c'est-à-dire telle que V y soit partout nul. C'est pourquoi :

$$\mathcal{E}_p = \iiint_{\mathcal{E}} \frac{\varepsilon_0}{2} E^2(M) d\tau_M$$

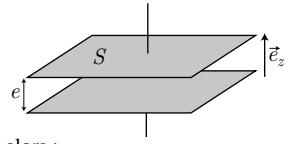
ce qui montre que l'on peut définir une densité volumique d'énergie électrostatique par :

$$u_E(M) \hat{=} \frac{\varepsilon_0 E^2(M)}{2} \Rightarrow \mathcal{E}_p = \iiint_{\text{espace}} u_E(M) d\tau_M$$

EXEMPLE

Considérons un condensateur plan, d'épaisseur e , de surface S et portant la charge Q . Le champ électrique créé par cette distribution de charge est donné par l'expression (14) à l'intérieur du condensateur \mathcal{C} et est nul à l'extérieur :

$$\begin{cases} \vec{E}(M) = \vec{E}_{\text{int}} = -\frac{Q}{\varepsilon_0 S} \vec{e}_z \text{ pour } M \in \mathcal{C} \\ \vec{E}(M) = \vec{E}_{\text{ext}} = \vec{0} \text{ pour } M \notin \mathcal{C} \end{cases}$$



L'énergie électrostatique des charges contenues dans le condensateur vaut alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \iiint_{\text{espace}} \frac{\varepsilon_0}{2} E^2(M) d\tau_M \\ &= \iiint_{M \in \mathcal{C}} \frac{\varepsilon_0}{2} E_{\text{int}}^2 d\tau_M + \iiint_{M \notin \mathcal{C}} \frac{\varepsilon_0}{2} E_{\text{ext}}^2 d\tau_M \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} E_{\text{int}}^2 \iiint_{M \in \mathcal{C}} d\tau_M = \frac{\varepsilon_0}{2} E_{\text{int}}^2 \times V \end{aligned}$$

où $V = eS$ désigne le volume du condensateur. C'est pourquoi :

$$\mathcal{E} = \frac{\varepsilon_0}{2} \times \frac{Q^2}{\varepsilon_0^2 S^2} \times eS = \frac{1}{2} Q^2 \times \frac{e}{\varepsilon_0 S}$$

soit encore, en reconnaissant l'expression de la capacité $C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$ du condensateur :

$$\mathcal{E} = \frac{Q^2}{2C}$$

3.4 Équations de Maxwell

3.4.1 Équation de propagation

Propagation unidimensionnelle

On cherche les solutions de l'**équation de propagation** (ou **équation de d'Alembert**) :

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } c > 0 \text{ et } \psi = \psi(x, t) \quad (15)$$

La fonction $\psi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$, où f et g sont des fonctions régulières et dérivables au moins deux fois, est une solution de l'équation.

DÉMONSTRATION

Soit $f(x - ct) = f(u)$ avec $u = u(x, t) = x - ct$, telle que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{du^2} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d^2 f}{du^2}$$

et :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{df}{du} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -c \frac{d^2 f}{du^2} \frac{\partial f}{\partial t} = c^2 \frac{d^2 f}{du^2}$$

On remarque immédiatement que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

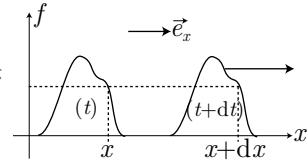
On montre, de même, que $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0$ de sorte que $\psi = f + g$ est solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

c'est-à-dire l'équation de propagation.

La fonction $f(x - ct)$ représente la propagation de l'élargissement f avec une vitesse $\vec{v} = c \vec{e}_x$. En effet, cette propagation est assurée lorsque $f(x, t) = f(x + dx, t + dt)$, avec $v = \frac{dx}{dt}$:

$$\begin{aligned} f(x + dx, t + dt) &= f(x, t) \\ \Rightarrow x + dx - c(t + dt) &= x - ct \\ \Rightarrow dx = c dt &\Rightarrow v = c \end{aligned}$$



De même, la fonction $g(x + ct)$ désigne la propagation de l'élargissement g dans le sens de $-\vec{e}_x$, à la vitesse c :

$$\begin{aligned} g(x, t) &= g(x + dx, t + dt) \text{ lorsque } dx = v dt \\ \Rightarrow x + ct &= x + dx + ct + c dt \Rightarrow dx = -c dt \Rightarrow v = -c \\ \Rightarrow \vec{v} &= -c \vec{e}_x \end{aligned}$$

La fonction $f(x - ct)$ est caractéristique d'une **onde progressive** tandis qu'une **onde régressive** est caractérisée par la **fonction d'onde** $\psi(x, t) = g(x + ct)$.

Onde sinusoïdale

Une **onde sinusoïdale** est une onde dont la fonction $f(u)$ est sinusoïdale :

$$f(u) = \psi_0 \cos(ku + \phi_0)$$

où k et ϕ_0 sont des constantes. Cette onde est de surcroît progressive lorsque $u(x, t) = x - ct$. Dans ce cas :

$$\psi(x, t) = f(x - ct) = \psi_0 \cos(kx - kct + \phi_0)$$

On peut également définir la **phase** $\phi(x, t)$ de l'onde par :

$$\psi(x, t) = \psi_0 \cos \phi \text{ où } \phi = \phi(x, t) = kx - kct + \phi_0$$

L'onde est périodique dans le temps, de **période** T , ce qui signifie aussi que :

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = \psi(x, t + T) &\Rightarrow \phi(x, t) = \phi(x, t + T) + 2\pi \\ &\Rightarrow kx - kct + \phi_0 = kx - kct - kcT + 2\pi + \phi_0 \\ &\Rightarrow kcT = 2\pi \Rightarrow kc = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \end{aligned}$$

où $f = \frac{1}{T}$ désigne la **fréquence** de l'onde. On définit alors la **pulsation** ω de l'onde sinusoïdale par :

$$\omega = kc = 2\pi f \Rightarrow \phi(x, t) = kx - \omega t + \phi_0 \Rightarrow \psi(x, t) = \psi_0 \cos \phi$$

Quant à la **longueur d'onde** λ du signal, elle rend compte de la périodicité spatiale de la fonction d'onde $\psi(x, t)$:

$$\begin{aligned}\psi(x + \lambda, t) &= \psi(x, t) \Rightarrow \phi(x + \lambda, t) = \phi(x, t) + 2\pi \\ &\Rightarrow kx + k\lambda - \omega t + \phi_0 = kx - \omega t + \phi_0 + 2\pi \\ &\Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}\end{aligned}$$

Remarque : L'onde peut également être régressive, auquel cas sa fonction d'onde s'écrit :

$$\psi(x, t) = \psi_0 \cos \varphi \text{ où } \varphi = \varphi(x, t) = kx + \omega t + \phi_0$$

Définition 6. On appelle **vitesse de phase** la vitesse v_ϕ à laquelle se propage la phase ϕ de l'onde.

De ce qui précède il ressort que la vitesse de phase est donnée par la relation :

$$v_\phi \hat{=} \frac{\omega}{k}$$

Onde plane

Considérons maintenant une onde progressive à trois dimensions, dont la phase en un point $M(x, y, z)$ à l'instant t , se met sous la forme :

$$\phi(M, t) = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t$$

Il existe alors un vecteur $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$, appelé **vecteur d'onde**, permettant de définir la phase d'une onde plane progressive :

$$\phi(M, t) = \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \omega t \Rightarrow \psi(M, t) = \psi(\phi)$$

La fonction d'onde ψ vérifie l'équation de Lagrange :

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

ce qui montre que sa vitesse de phase vaut :

$$v_\phi \hat{=} \frac{\omega}{k} \tag{16}$$

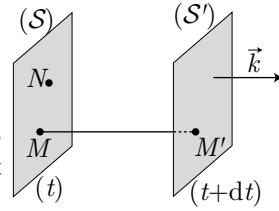
Définition 7. Une surface d'onde est un ensemble continu de points M qui ont la même phase $\phi(M, t)$ à toute date t .

D'après cette définition, deux points M et N appartiennent à la même surface d'onde si :

$$\begin{aligned}\phi(M, t) = \phi(N, t) &\Rightarrow \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \omega t = \vec{k} \cdot \overrightarrow{ON} - \omega t \\ &\Rightarrow \vec{k} \cdot \overrightarrow{NM} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{NM} \perp \vec{k}\end{aligned}$$

ce qui signifie aussi que les surfaces d'onde sont des plans perpendiculaires à \vec{k} (puisque \vec{k} est un vecteur uniforme et constant, ces ondes sont appelées *ondes planes*).

Soit $\vec{v}_\phi = v_\phi \vec{u}$, avec $\|\vec{u}\| = 1$, le vecteur vitesse de propagation d'une surface d'onde (c'est aussi la vitesse de propagation de la phase) qui occupe la position (\mathcal{S}) à la date t et la position (\mathcal{S}') à la date $t + dt$. Les points $M \in (\mathcal{S})$ et $M' \in (\mathcal{S}')$ se trouvent alors aux phases :



$$\phi(M, t) = \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \omega t \text{ et } \phi(M', t + dt) = \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM'} - \omega(t + dt)$$

Puisque la même phase s'est propagée de M à M' pendant dt , c'est-à-dire avec la vitesse $\vec{v}_\phi = \frac{\overrightarrow{MM'}}{dt}$, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\phi(M', t + dt) = \phi(M, t) &\Rightarrow \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM'} - \omega(t + dt) = \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \omega t \\ &\Rightarrow \vec{k} \cdot \overrightarrow{MM'} = \omega dt \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{v}_\phi dt = \omega dt \\ &\Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{v}_\phi = \omega \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{u} \times v_\phi = \omega\end{aligned}$$

soit encore, en tenant compte de la relation (16) :

$$\vec{k} \cdot \vec{u} = k \Rightarrow k \times \cos(\vec{k}, \vec{u}) = k \Rightarrow \cos(\vec{k}, \vec{u}) = 0 \Rightarrow \vec{k} \parallel \vec{u}$$

Il faut donc retenir que :

- une **onde plane progressive** est décrite par la une **fonction d'onde** :

$$\psi(M, t) = \psi(\phi) \text{ où } \phi(M, t) = \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \omega t$$

- le **vecteur d'onde** \vec{k} (de norme $k = \frac{2\pi}{\lambda}$) est dirigé dans le sens de propagation \vec{u} de l'onde (ou de propagation de la phase $\phi(M, t)$, ce qui revient au même) ;
- la vitesse de propagation v_ϕ de la phase, encore appelée **vitesse de phase**, est définie par : $v_\phi \hat{=} \frac{\omega}{k}$;
- les **surfaces d'onde** sont perpendiculaires au vecteur d'onde \vec{k} ;
- une **onde plane régressive** est décrite par une fonction d'onde :

$$\psi(M, t) = \phi(\varphi) \text{ où } \varphi(M, t) = \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + \omega t$$

- une **onde plane progressive harmonique** (O.P.P.H.) (ou onde plane progressive monochromatique : O.P.P.M.) est une onde plane progressive sinusoïdale, de fonction d'onde :

$$\psi(M, t) = \psi_0 \cos(\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \omega t)$$

- lorsque l'onde plane se déplace dans la direction d'un vecteur de base \vec{e}_α associé à la coordonnée x_α , l'O.P.P.H. a pour équation simplifiée :

$$\psi(M, t) = \psi_0 \cos(k x_\alpha - \omega t)$$

Ondes sphériques

En coordonnées sphériques, l'équation de propagation $\Delta\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$ devient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

Notamment, si l'on cherche les solutions $\psi = \psi(r, t)$ qui ne dépendent que de r et t , cette équation se simplifie :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \text{ où } F(r, t) = r \times \psi(r, t)$$

Cette équation de d'Alembert ressemblant à l'équation de propagation unidimensionnelle, les solutions ont également la même forme mathématique :

$$F(r, t) = f(r - ct) + g(r + ct) \Rightarrow \psi(r, t) = \frac{1}{r} f(r - ct) + \frac{1}{r} g(r + ct)$$

et la vitesse de phase vérifie aussi : $v_\phi = c$.

3.4.2 Équations de Maxwell

Les équations de l'électrostatique et de la magnétostatique sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{théorème de Gauss : } \operatorname{div}_M \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0} \\ \vec{E}(M) = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}_M V(M) \Rightarrow \overrightarrow{\operatorname{rot}}_M \vec{E}(M) = \vec{0} \\ \text{théorème d'Ampère : } \overrightarrow{\operatorname{rot}}_M \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{j}(M) \\ \vec{B}(M) = \overrightarrow{\operatorname{rot}}_M \vec{A}(M) \Rightarrow \operatorname{div}_M \vec{B}(M) = 0 \\ \text{Jauge de Coulomb : } \operatorname{div}_M \vec{A}(M) = 0 \\ \text{conservation de la charge : } \operatorname{div}_M \vec{j}(M) + \frac{\partial \rho(M)}{\partial t} = 0 \end{array} \right.$$

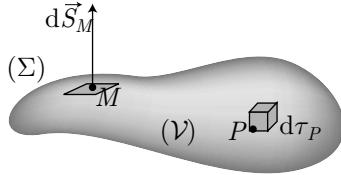
En régime variable certaines de ces équations sont remplacées les **équations de Maxwell** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{équation de } \mathbf{\textbf{Maxwell-Gauss}} : \operatorname{div}_M \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0} \\ \text{équation de } \mathbf{\textbf{Maxwell-Ampère}} : \overrightarrow{\operatorname{rot}}_M \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{j}_M + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M)}{\partial t} \\ \text{équation de } \mathbf{\textbf{Maxwell-Faraday}} : \overrightarrow{\operatorname{rot}}_M \vec{E}(M) = -\frac{\partial \vec{B}(M)}{\partial t} \\ \text{flux de } \vec{B} : \operatorname{div}_M \vec{B}(M) = 0 \end{array} \right.$$

On remarque que les équations de Maxwell permettent de retrouver les équations des champs électrostatiques et magnétostatiques en régime stationnaire.

Certaines équations de Maxwell ont des expressions intégrales :

- Le théorème de Green-Ostrogradski donne à l'équation de Maxwell-Gauss son expression intégrale :



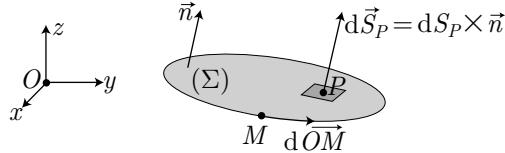
$$\begin{aligned}\phi_E &\stackrel{\cong}{=} \iint_{(\Sigma)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{E}_P d\tau_P \\ &= \iiint_{(V)} \frac{\rho(P)}{\varepsilon_0} d\tau_P \Rightarrow \phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

- et justifie que le champ magnétique est à flux conservatif :

$$\phi_B \stackrel{\cong}{=} \iint_{(\Sigma)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_M = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{B}(P) d\tau_P = 0 \Rightarrow \phi_B = 0$$

- De même, le théorème de Stokes-Ampère montre qu'en électromagnétisme, la circulation du champ électrique le long d'un parcours fermé n'est pas nécessairement nulle :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_E &\stackrel{\cong}{=} \oint_{(\Gamma)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{OM} = \iint_{(\Sigma)} \operatorname{rot} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P \\ &= \iint_{(\Sigma)} -\frac{\partial \vec{B}(P)}{\partial t} \cdot d\vec{S}_P \neq 0 \Rightarrow \mathcal{C}_E \neq 0\end{aligned}$$



- Quant au théorème d'Ampère sous sa forme intégrale :

$$\mathcal{C}_B \stackrel{\cong}{=} \oint_{(\Gamma)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{OM} = \mu_0 I_{\text{int}}$$

il n'est valable qu'en magnétostatique mais pas lorsque les champs varient dans le temps car, d'une manière générale :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_B &\stackrel{\cong}{=} \oint_{(\Gamma)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_M = \iint_{(\Sigma)} \operatorname{rot} \vec{B}(P) \cdot d\vec{S}_P \\ &= \iint_{(\Sigma)} \left[\mu_0 \vec{J}(P) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(P)}{\partial t} \right] \cdot d\vec{S}_P \\ &= \mu_0 I_{\text{int}} + \mu_0 \varepsilon_0 \iint_{(\Sigma)} \frac{\partial \vec{E}(P)}{\partial t} \cdot d\vec{S}_P\end{aligned}$$

De l'équation de Maxwell-Ampère se déduit l'équation de conservation de charge :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \text{div} (\vec{\text{rot}} \vec{B}) = 0 = \mu_0 \left[\text{div} \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{E}) \right]$$

avec :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon_0 \text{div} \vec{E} = \rho \Rightarrow \text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

3.4.3 Les potentiels

Régimes stationnaires et variables

- De l'équation de Maxwell : $\text{div} \vec{B}(M) = 0$ on déduit qu'il existe un potentiel vecteur $\vec{A}(M, t)$ dont dérive le champ magnétique :

$$\exists \vec{A}(M, t) / \vec{B}(M, t) = \vec{\text{rot}} \vec{A}(M, t)$$

- Quant à l'équation de Maxwell-Faraday, elle indique que :

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{E}(M, t) &= -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t} \Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{E}(M, t) = -\vec{\text{rot}} \left[\frac{\partial \vec{A}(M, t)}{\partial t} \right] \\ &\Rightarrow \vec{\text{rot}} \left[\vec{E}(M, t) + \frac{\partial \vec{A}(M, t)}{\partial t} \right] = \vec{0} \end{aligned}$$

ce qui montre l'existence d'un potentiel scalaire $V(M, t)$:

$$\exists V / \vec{E}(M, t) = -\vec{\text{grad}} V(M, t) - \frac{\partial \vec{A}(M, t)}{\partial t}$$

En régime stationnaire, on retrouve les définitions du potentiel vecteur $\vec{A}(M)$ et du potentiel scalaire $V(M)$:

$$\vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}} V(M) \text{ et } \vec{B}(M) = \vec{\text{rot}} \vec{A}(M)$$

Condition de Jauge

- En régime stationnaire, les potentiels vérifiant les deux équations précédentes ne sont pas uniques. Pour que des couples (V_1, \vec{A}_1) et (V_2, \vec{A}_2) vérifient les mêmes équations $\vec{B}(M) = \vec{\text{rot}} \vec{A}(M)$ et $\vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}} V(M)$, il suffit qu'il existe une constante K et un champ scalaire $\varphi(M)$ tels que :

$$V_2(M) = V_1(M) + K \text{ et } \vec{A}_2(M) = \vec{A}_1(M) + \vec{\text{grad}} \varphi(M)$$

La condition de Jauge de Lorentz consiste à poser :

$$\Delta \varphi = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{A}_1(M) = 0 \text{ et } \text{div} \vec{A}_2(M) = 0$$

- En régime variable, les champs électriques et magnétiques peuvent dériver de couples de potentiels (\vec{A}_1, V_1) et (\vec{A}_2, V_2) différents assurant pourtant les relations :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \text{ et } \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$$

Notamment, les potentiels vecteurs \vec{A}_1 et \vec{A}_2 à l'origine du champ magnétique vérifient :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}_2 = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}_1 \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{A}_2 - \vec{A}_1) = \vec{0}$$

ce qui montre qu'il existe au moins un champ scalaire φ tel que :

$$\vec{A}_2 = \vec{A}_1 + \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$$

Quant au champ électrique, il peut dériver des potentiels scalaires V_1 et V_2 à condition que :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\overrightarrow{\text{grad}} V_1 - \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} V_2 - \frac{\partial \vec{A}_2}{\partial t} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} (V_2 - V_1) + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A}_2 - \vec{A}_1) = \vec{0} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} \left(V_2 - V_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow V_2 = V_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$

Une infinité de fonctions scalaires fournissent donc les mêmes champs (\vec{E}, \vec{B}) . Pour limiter ce nombre, on impose la **condition de jauge de Lorentz** au champ scalaire φ :

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

D'une part cette condition de jauge est compatible avec la condition de jauge de la magnétostatique : $\Delta \varphi = 0$ et d'autre part elle fournit :

$$\begin{cases} \vec{A}_2 = \vec{A}_1 + \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \\ V_2 = V_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{div } \vec{A}_2 = \text{div } \vec{A}_1 + \Delta \varphi \\ \frac{\partial V_2}{\partial t} = \frac{\partial V_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \end{cases} \Rightarrow \text{div } \vec{A}_2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V_2}{\partial t} = \text{div } \vec{A}_1 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V_1}{\partial t} + \left(\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) \Rightarrow \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = \text{cte}$$

Plus précisément, cette condition sera compatible avec la magnétostatique ($\text{div } \vec{A} = 0$) si l'on pose :

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Équation de Poisson

Les champs et potentiels étant liés par les relations :

$$\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A} \text{ et } \vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

l'équation de Maxwell-Ampère : $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ devient :

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{A}) &= \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \left(-\frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{grad}} V - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) \\ \Rightarrow \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} &= \mu_0 \vec{j} - \vec{\text{grad}} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \\ \Rightarrow \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j} + \vec{\text{grad}} \left(\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Quant à l'équation de Maxwell-Gauss, elle conduit à :

$$\begin{cases} \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} -\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{A}) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow \Delta V + \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{A}) &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Ce faisant, la condition de jauge de Lorentz simplifie ces équations :

$$\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} \\ \Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases} \quad (17)$$

d'où découle l'équation de Poisson en régime permanent :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

Potentiels retardés

En régime stationnaire l'expression du potentiel découle de la résolution de l'équation de Poisson :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow V(M) = \iiint_{(V)} \frac{\rho(P) d\tau_P}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (18)$$

De même, en régime stationnaire, le potentiel vecteur est solution de l'équation :

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^3 \Delta A_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} = -\mu_0 \sum_{\alpha=1}^3 j_{\alpha} \vec{e}_{\alpha}$$

ce qui signifie aussi que les composantes A_α et j_α des vecteurs \vec{A} et \vec{j} sont liés par l'équation :

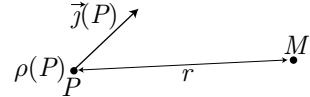
$$\Delta A_\alpha = -\mu_0 j_\alpha$$

Par analogie avec l'équation (18), on peut alors poser :

$$\begin{aligned} \Delta A_\alpha = -\mu_0 j_\alpha &\Rightarrow A_\alpha(M) = \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{\mu_0 j_\alpha(P) d\tau_P}{4\pi r} \\ &\Rightarrow \vec{A}(M) = \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(P) d\tau_P}{r} \end{aligned}$$

Dans le vide, les équation (17) :

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0} \text{ et } \Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$



montrent que les potentiels V et \vec{A} se propagent avec une célérité c . Le signal reçu en un point M de l'espace à la date t a donc été émis de P à une date $t - \tau$, où $\tau = \frac{r}{c}$ désigne le temps de propagation du signal de M à P . Les potentiels qui arrivent en M apparaissent alors retardés par rapport à leur émission en P :

$$V(M, t) = \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 r} \times \rho \left(P, t - \frac{r}{c} \right) d\tau_P \text{ où } r = MP \quad (19)$$

et :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(\mathcal{V})} \vec{j} \left(P, t - \frac{MP}{c} \right) \frac{d\tau_P}{MP} \quad (20)$$

Approximation des régimes quasi stationnaires (A.R.Q.S.)

Lorsque la fréquence des phénomènes électromagnétiques est suffisamment basse (typiquement pour $f \leq 10$ MHz), la **densité de courant de déplacement** $\vec{j}_d \hat{=} \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ peut être négligée devant \vec{j} . Dans ce cas, les équations de Maxwell se simplifient :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{div} \vec{B} = 0$$

Cherchons alors les conséquences d'une telle approximation :

– Existence d'un potentiel vecteur dont dérive le champ magnétique :

$$\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \exists \vec{A} / \vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$$

– Intervention de \vec{A} dans l'expression du champ électrique :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\text{rot}} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0} \Rightarrow \exists V / \vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Nous verrons ultérieurement comment cette équation interprète le phénomène d'induction électromagnétique dans les circuits électriques.

- Absence de propagation des potentiels :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

c'est-à-dire, en tenant compte de la jauge de Coulomb :

$$\text{div} \vec{A} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

tandis que :

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} &\Rightarrow -\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{A}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ &\Rightarrow \Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Ces équations montrent que \vec{A} et V ne sont plus solutions de l'équation de d'Alembert : dans le cadre de l'A.R.Q.S., on ne tient plus compte de la propagation des ondes électromagnétiques ; cette approximation est en général bien adaptée à l'étude des circuits électriques.

Remarque : De l'équation : $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, il découle que :

$$\mu_0 \text{div} \vec{j} = \text{div} (\vec{\text{rot}} \vec{B}) = 0 \Rightarrow \iint_{(\Sigma)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

ce qui signifie encore que \vec{j} est à flux conservatif : le courant qui entre dans toute surface fermée vaut celui qui en sort ; la loi des noeuds est respectée dans le cadre de l'A.R.Q.S.

Lorsque l'A.R.Q.S. est vérifiée, les potentiels s'écrivent :

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{(\mathcal{V})} \rho(P, t) \frac{d\tau_P}{MP} \text{ et } \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(\mathcal{V})} \vec{j}(M, t) \frac{d\tau_P}{MP}$$

puisque on ne tient pas compte de la propagation des signaux. Cette approximation signifie donc aussi que $\frac{r}{c} \ll t$, c'est-à-dire, pour des signaux périodiques de période T et de longueur d'onde λ :

$$\frac{r}{c} \ll T = \frac{\lambda}{c} \Rightarrow \lambda \gg r \text{ avec } \lambda = \frac{c}{\nu}$$

Par exemple, les signaux manipulés au laboratoire du lycée peuvent avoir des fréquences maximales $\nu \simeq 10 \text{ MHz} = 10^7 \text{ Hz}$, ce qui correspondrait à des ondes de longueur d'onde $\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{10^7} = 30 \text{ m}$. L'A.R.Q.S. demeure donc valable jusqu'à une distance $r = 30 \text{ m}$ du générateur ! cette approximation est donc bien adaptée aux montages d'électronique réalisés au laboratoire. En revanche, lorsque les signaux atteignent des fréquences beaucoup plus élevées (par exemple $\nu \simeq 1 \text{ GHz} = 10^9 \text{ Hz}$ pour les signaux hertziens), $\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{10^9} = 30 \text{ cm}$ montre que l'approximation n'est plus valable.

3.4.4 Relations de passage

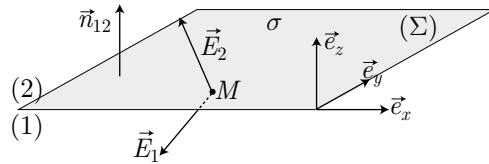
Discontinuité des champs

Rappelons qu'en régime stationnaire, la discontinuité des champs électriques et magnétiques à la traversée d'une surface est décrite par :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \text{ et } \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12} \quad (21)$$

Pour trouver les nouvelles relations de passage en régime non stationnaire, il suffit de reformuler les calculs qui ont conduits aux lois (21), à partir des nouvelles équations de Maxwell.

- Soient $\vec{E}_1 \begin{pmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \\ E_{1z} \end{pmatrix}$ et $\vec{E}_2 \begin{pmatrix} E_{2x} \\ E_{2y} \\ E_{2z} \end{pmatrix}$ les champs électriques dans les milieux respectifs (1) et (2) situés de part et d'autre d'une surface (Σ) portant une densité surfacique de charge σ .

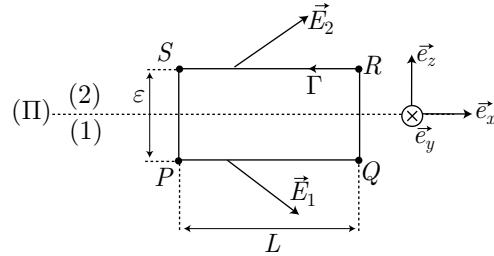


Le théorème de Gauss : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ appliqué à une surface plane située de part et d'autre de (Σ) conduit à :

$$E_{2z} - E_{1z} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

En revanche, calculons maintenant la circulation \mathcal{C}_E de \vec{E} le long d'un parcours $(\Gamma) = (PQRS)$, en tenant compte de l'équation de Maxwell-Faraday $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$:

$$\mathcal{C}_E \hat{=} \oint_{(\Gamma)} \vec{E}(M) \cdot d\overrightarrow{OM} = \iint_{(\Sigma)} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}_M = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{S}_M$$



$\Sigma = L \times \epsilon$ étant la surface circonscrite à l'intérieur de (Γ). Notamment :

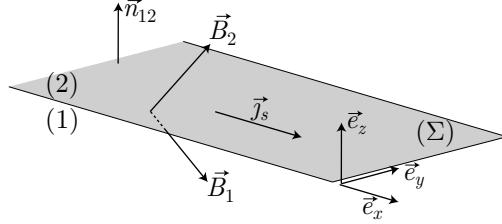
$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{S}_M = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_E = 0$$

C'est pourquoi $E_{2x} - E_{1x} = 0$ et $E_{2y} - E_{1y} = 0$, ce qui permet de poser, même en régime non stationnaire :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{12}$$

- Soient $\vec{B}_1 \begin{pmatrix} B_{1x} \\ B_{1y} \\ B_{1z} \end{pmatrix}$ et $\vec{B}_2 \begin{pmatrix} B_{2x} \\ B_{2y} \\ B_{2z} \end{pmatrix}$ les champs magnétiques dans les milieux (1)

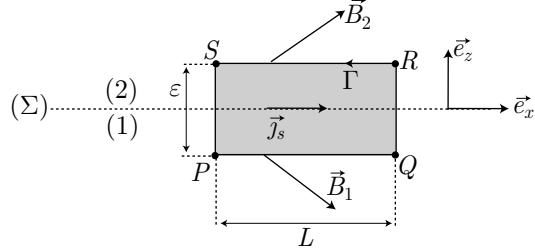
et (2) situés de part et d'autre d'une surface (Σ) portant un courant surfacique de densité \vec{j}_s . Le repère d'étude ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) sera orienté de manière à ce que la normale \vec{n}_{12} de (Σ) soit confondue avec \vec{e}_z et que $\vec{j}_s = j_s \vec{e}_x$:



L'équation de Maxwell : $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ montre que \vec{B} est un champ à flux conservatif ; appliquée à une surface fermée située de part et d'autre de (Σ), cette loi conduit à :

$$B_{2z} - B_{1z} = 0 \quad (22)$$

Considérons maintenant un parcours rectangulaire (Γ) dont les côtés PQ et RS se trouvent de part et d'autre de (Σ), parallèlement à \vec{j}_s .



L'équation de Maxwell-Ampère :

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

permet alors de reformuler le théorème d'Ampère dans le cas des régimes non stationnaires :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_B &\stackrel{\cong}{=} \oint_{(\Gamma)} \vec{B}(M) \cdot d\overrightarrow{OM} = \iint_{(s)} \operatorname{rot} \vec{B}(P) \cdot d\vec{S}_P \\ &= \mu_0 \iint_{(s)} \vec{j}(P) \cdot d\vec{S}_P + \mu_0 \varepsilon_0 \iint_{(s)} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Big|_P \cdot d\vec{S}_P \\ &= \mu_0 I_{\text{int}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(s)} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P \end{aligned}$$

où I_{int} désigne le courant qui traverse la surface (grisée) $s = \varepsilon L$. Notamment, lorsque ε tend vers zéro, le flux de \vec{E} à travers (s) s'annule :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{(s)} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_B = \mu_0 I_{\text{int}}$$

Le théorème d'Ampère reprend ainsi la forme qu'il possède en régime stationnaire et qui a permis de calculer :

$$B_{2x} - B_{1x} = 0 \text{ et } B_{1y} - B_{2y} = \mu_0 j_s$$

Associées au résultat (22), ces équations confirment finalement la relation de passage :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 j_s \wedge \vec{n}_{12}$$

également vérifiée en régime non stationnaire.

3.4.5 Conducteur ohmique

Loi d'Ohm

Soit un conducteur de l'électricité, comportant n particules mobiles chargées par unité de volume, possédant chacune la charge q (la densité volumique de charges mobiles vaut alors $\rho_m = nq$) et la masse m . Une de ces particules, de vitesse \vec{v} , est soumise au champ électrique \vec{E}_{int} qui règne dans le conducteur et à une force de frottement, dont la norme est proportionnelle à la vitesse : $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$ ($\lambda = \text{cte}$). Le mouvement de cette particule est décrit par la loi :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{E}_{\text{int}} - \lambda \vec{v} \Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} + \lambda \vec{v} = q \vec{E}_{\text{int}}$$

Assez rapidement, la vitesse de la particule atteindra une limite \vec{v}_ℓ telle que :

$$\frac{d\vec{v}_\ell}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_\ell = \frac{q}{\lambda} \vec{E}_{\text{int}}$$

Si l'on considère que toutes les charges mobiles suivent la même loi, la densité moyenne de courant vaut :

$$\vec{j} = \rho_m \vec{v}_\ell \Rightarrow \vec{j} = \frac{nq^2}{\lambda} \vec{E}_{\text{int}}$$

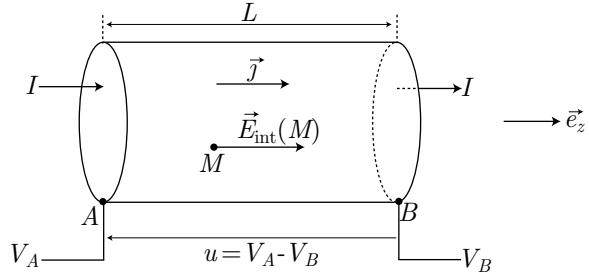
Il existe donc un coefficient σ , appelé **conductivité** (en $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$) caractéristique du conducteur, tel que :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}_{\text{int}} \tag{23}$$

Cette loi est l'expression locale de la **loi d'Ohm**.

Calcul d'une résistance

Soit un conducteur cylindrique infiniment petit, homogène, de section droite S constante, de longueur L et soumis à une différence de potentiel $u = V_A - V_B$ entre deux points A et B de ses extrémités.



La longueur L est supposée assez petite pour que le champ électrique $\vec{E}_{\text{int}}(M)$ soit uniforme en tout point M : $\vec{E}_{\text{int}}(M) = \vec{E}_{\text{int}} = E_{\text{int}} \vec{e}_z$. Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} u &= V_A - V_B = \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \overrightarrow{BA} = -\vec{E}_{\text{int}} \cdot \overrightarrow{BA} = \vec{E}_{\text{int}} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= E_{\text{int}} \times L \Rightarrow E_{\text{int}} = \frac{u}{L} \end{aligned}$$

Quant au vecteur densité de courant : $\vec{j} = j \vec{e}_z$, il définit le courant I qui traverse les sections S (supposées infiniment petites) du conducteur :

$$I = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = j \times S \Rightarrow j = \frac{I}{S}$$

Ainsi, la loi d'Ohm (23) établit que :

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \sigma \vec{E}_{\text{int}} \Rightarrow j = \sigma E_{\text{int}} \Rightarrow \frac{I}{S} = \sigma \times \frac{u}{L} \\ &\Rightarrow u = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{S} \times I \end{aligned}$$

Il existe donc un coefficient δR , appelé **résistance** (en ohm : Ω), traduisant la proportionnalité entre u et I :

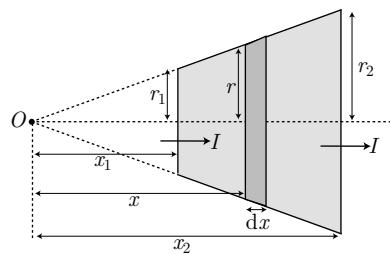
$$u = \delta R \times I \Rightarrow \delta R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{S}$$

Définition 8. La **résistivité** ρ (en $\Omega \cdot \text{m}$) d'un conducteur représente l'inverse de sa conductivité :

$$\rho \hat{=} \frac{1}{\sigma} \Rightarrow \delta R = \rho \frac{L}{S} \quad (24)$$

EXEMPLE

Considérons un conducteur \mathcal{C} tronconique homogène, de rayons r_1 et r_2 ($r_2 > r_1$), de résistivité ρ , compris entre les abscisses x_1 et x_2 , dont les sections droites sont traversées par un courant I dirigé selon (Ox) :



Un élément cylindrique de \mathcal{C} , situé à l'abscisse x , d'épaisseur dx , présente un rayon $r(x)$ qui dépend linéairement de x :

$$r(x) = ax + b$$

avec :

$$\begin{cases} r(x_1) = r_1 \\ r(x_2) = r_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = ax_1 + b \\ r_2 = ax_2 + b \end{cases} \Rightarrow r_2 - r_1 = a(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow r = \frac{r_2 - r_1}{x_2 - x_1} \times x + b$$

$$\Rightarrow dr = \frac{r_2 - r_1}{x_2 - x_1} dx \quad (25)$$

Conformément à la loi (24), cet élément de conducteur présente une résistance :

$$\delta R = \rho \frac{dx}{S} \text{ avec } S = \pi r^2 \Rightarrow \delta R = \rho \frac{dx}{\pi r^2}$$

où l'équation (25) conduit à :

$$dx = \frac{x_2 - x_1}{r_2 - r_1} dr \Rightarrow \delta R = \frac{\rho}{\pi} \frac{x_2 - x_1}{r_2 - r_1} \frac{dr}{r^2}$$

de sorte que la résistance totale R de \mathcal{C} vaut :

$$\begin{aligned} R &= \frac{\rho}{\pi} \frac{x_2 - x_1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{\pi} \frac{x_2 - x_1}{r_2 - r_1} \times \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ &\Rightarrow R = \frac{\rho (x_2 - x_1)}{\pi r_1 r_2} \end{aligned}$$

Le conducteur parfait

Un bon conducteur de l'électricité (tel que le cuivre) présente une conductivité de l'ordre de $10^7 \Omega \cdot \text{m}$.

Un conducteur parfait est un conducteur à l'intérieur duquel les forces de frottement $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$ peuvent être négligées (λ tend alors vers zéro). C'est pourquoi on retient comme définition :

Définition 9. On appelle **conducteur parfait** (ou **idéal**) un conducteur dont la conductivité $\sigma = \frac{nq^2}{\lambda}$ est infiniment grande.

La loi d'Ohm indique que, pour un conducteur parfait :

$$\vec{E}_{\text{int}} = \frac{1}{\sigma} \vec{j} \Rightarrow \vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}$$

Soit ρ_{int} la densité volumique de charge vérifiant le théorème de Gauss :

$$\text{div } \vec{E}_{\text{int}} = \frac{\rho_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho_{\text{int}} = 0$$

Quant à l'équation de Maxwell-Faraday, elle permet le calcul du champ magnétique \vec{B}_{int} à l'intérieur du conducteur :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E}_{\text{int}} = -\frac{\partial \vec{B}_{\text{int}}}{\partial t} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B}_{\text{int}} = \vec{0}$$

car les champs stationnaires sont considérés comme nuls en électromagnétisme.

Enfin, l'équation de Maxwell-Ampère indique que :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 \vec{j}_{\text{int}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_{\text{int}}}{\partial t} \Rightarrow \vec{j}_{\text{int}} = \vec{0}$$

De fait, si un conducteur parfait conduit un courant électrique, celui-ci ne peut que se propager à la surface du conducteur.

Remarque : *On pourra retenir que l'intérieur d'un conducteur parfait se comporte comme un conducteur en équilibre électrostatique.*

3.5 Énergie électromagnétique

3.5.1 Effet Joule

Considérons un volume élémentaire $d\tau$ contenant une charge mobile δq , soumis aux champs électrique et magnétique \vec{E} et \vec{B} , c'est-à-dire à la force :

$$\delta \vec{F} = \delta q \vec{E} + \delta q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

où \vec{v} désigne la vitesse de $d\tau$.

À cette force est associée une puissance reçue par $d\tau$:

$$\delta \mathcal{P} = \delta \vec{F} \cdot \vec{v} = \delta q \vec{v} \cdot \vec{E} + \delta q \underbrace{\vec{v} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{B})}_{=0}$$

dont la densité volumique est définie par :

$$\mathcal{P}_v \triangleq \frac{\delta P}{d\tau} = \frac{\delta q}{d\tau} \vec{v} \cdot \vec{E}$$

La densité volumique de charge mobile : $\rho_m = \frac{\delta q}{d\tau}$ fait alors apparaître la densité de courant : $\vec{j} = \rho_m \vec{v} = \frac{\delta q}{d\tau} \vec{v}$:

$$\mathcal{P}_v = \frac{\delta \mathcal{P}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

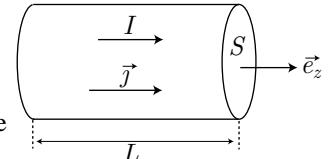
Isolons un cylindre élémentaire de section perpendiculaire à \vec{j} et de longueur L , orienté dans la direction \vec{e}_z de \vec{j} et de conductivité σ .

La loi d'Ohm locale suggère que :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\sigma} \vec{j} \Rightarrow \mathcal{P}_v = \frac{1}{\sigma} j^2$$

Aussi, la puissance électrique reçue par ce élément de volume $d\tau = LS$ vaut :

$$\delta P_{\text{reçue}} = \mathcal{P}_v d\tau = \frac{1}{\sigma} j^2 LS$$



c'est-à-dire, en tenant compte du courant $I = jS$ qui traverse ce conducteur :

$$\delta\mathcal{P}_{\text{reçue}} = \frac{1}{\sigma} \times \frac{I^2}{S^2} \times LS = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{S} \times I^2$$

On reconnaît alors la résistance $\delta R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{S}$, telle que :

$$\delta\mathcal{P}_{\text{reçue}} = \delta R \times I^2$$

Pendant le temps dt , l'énergie interne U de l'élément conducteur \mathcal{C} varie d'une quantité dU qui vérifie le premier principe de la thermodynamique :

$$dU + d\mathcal{E}_c = \delta W_{\text{reçue}} + \delta Q_{\text{reçue}}$$

où $\delta W_{\text{reçue}} = \delta\mathcal{P}_{\text{reçue}} \times dt$, $dU = 0$ si la température de \mathcal{C} demeure constante, tandis que $d\mathcal{E}_c = 0$ désigne la variation d'énergie cinétique macroscopique de \mathcal{C} . Il s'ensuit que, pendant dt , le conducteur reçoit la quantité de chaleur :

$$\delta Q_{\text{reçue}} = -\delta W_{\text{reçue}} = -\mathcal{P}_{\text{reçue}} dt = -\delta R I^2 dt$$

c'est-à-dire que le conducteur dissipe la quantité de chaleur :

$$\delta Q_{\text{dissipée}} = \delta R I^2 dt$$

Cette relation traduit **l'effet Joule** : un conducteur en équilibre thermique, parcouru par un courant électrique, dissipe de la chaleur proportionnelle au carré de l'intensité du courant.

3.5.2 Bilans d'énergie

Densité d'énergie électromagnétique

Considérons un point M de l'espace où règnent les champs électriques $\vec{E}(M)$ et magnétiques $\vec{B}(M)$. La densité d'énergie électromagnétique provoquée par l'existence de ces champs vaut :

$$u_{em}(M) = \frac{\varepsilon_0 E^2(M)}{2} + \frac{B^2(M)}{2\mu_0}$$

Par conséquent, un volume élémentaire $d\tau_M$, centré sur M , contient une énergie électromagnétique :

$$\delta\mathfrak{E}_{em} = u_{em}(M) d\tau_M$$

ce qui permet de prévoir que l'énergie électromagnétique accumulée dans un volume (\mathcal{V}) vaut :

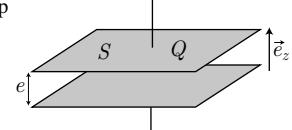
$$\mathfrak{E}_{em} = \iiint_{(\mathcal{V})} u_{em}(M) d\tau_M$$

EXEMPLE 1

Soit \mathcal{C} un condensateur plan dont les armatures, de surface S , sont distantes de e et portent les charges $\pm Q$. On supposera S assez grand pour qu'il soit légitime de négliger les effets de bord.

En notant $\sigma = \frac{Q}{S}$ la densité surfacique d'une des armatures, le champ $\vec{E}(M)$ dépend de la position de M :

$$\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_z \text{ pour } M \in \mathcal{C} \text{ et } \vec{E}(M) = \vec{0} \text{ pour } M \notin \mathcal{C}$$



En régime stationnaire, le champ magnétique \vec{B} est nul car :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \text{ et } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$$

ce qui confère à l'énergie électromagnétique une densité :

$$u_{em}(M) = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2(M) = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2}$$

Par conséquent, l'énergie électromagnétique emmagasinée dans le volume $V = eS$ du condensateur vaut :

$$\mathfrak{E}_{em} = \iint_{(V)} u_{em}(M) d\tau_M = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2} \times V = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2} \times eS = \frac{Q^2}{2} \times \frac{e}{\varepsilon_0 S}$$

où l'on reconnaît l'expression de la capacité $C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$ du condensateur plan :

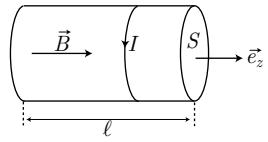
$$\mathfrak{E}_{em} = \frac{Q^2}{2C}$$

Cette relation montre que toute l'énergie accumulée par la charge du condensateur l'est sous forme d'énergie électromagnétique.

EXEMPLE 2

Soit (S) un solénoïde de longueur ℓ (suffisamment grande pour être considérée comme infinie), de section S , parcouru par un courant d'intensité I constante et comportant N spires (c'est-à-dire $n = \frac{N}{\ell}$ spires par unité de longueur).

À l'intérieur du solénoïde règne un champ magnétique $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z$ uniforme, dont le flux à travers une spire vaut : $\phi_0 = \mu_0 n I S$. Or, sur la longueur ℓ du solénoïde sont enroulées $\nu = n\ell$ spires ; le flux total du champ magnétique à travers le solénoïde vaut donc :



$$\Phi = \nu \phi_0 = \mu_0 n^2 \ell I S = L I$$

où $L = \mu_0 n^2 \ell S$ est l'inductance propre du solénoïde.

En outre, le champ électrique \vec{E} créé dans le solénoïde vérifie l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \text{ en régime stationnaire}$$

ainsi que l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

Il s'ensuit que $\vec{E} = \vec{0}$ à l'intérieur du solénoïde de volume $V = \ell S$, où l'énergie électromagnétique :

$$\mathfrak{E}_{em} = \iint_{(V)} u_{em}(M) d\tau_M$$

présente une densité uniforme :

$$\begin{aligned}
 u_{em} &= \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \text{ avec } E = 0 \text{ et } B = \mu_0 n I \\
 &= \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 \\
 \Rightarrow \mathfrak{E}_{em} &= \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 \iiint_{(V)} d\tau_M = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 \times V \\
 \Rightarrow \mathfrak{E}_{em} &= \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \ell S I^2
 \end{aligned}$$

ce qui signifie que l'énergie dans le solénoïde est totalement accumulée sous forme électromagnétique :

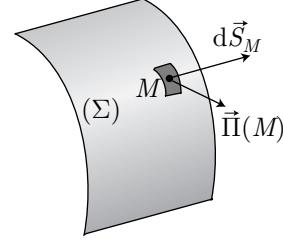
$$\mathfrak{E}_{em} = \frac{1}{2} L I^2$$

Équation locale de Poynting

Définition 10. La puissance électromagnétique par unité de surface, en un point M de l'espace, est donnée par le **vecteur de Poynting** en ce point :

$$\vec{\Pi}(M) \hat{=} \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(M) \wedge \vec{B}(M)$$

Cette définition signifie que, pendant dt , une surface (Σ) est traversée par une énergie $\delta \mathcal{E}_{em}$ telle que :

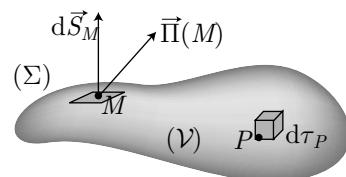


$$\frac{\delta \mathcal{E}_{em}}{dt} \hat{=} \iint_{(\Sigma)} \vec{\Pi}(M) \cdot d\vec{S}_M \quad (26)$$

À l'aide des équations de Maxwell, on peut montrer que le vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \vec{\Pi}(M, t)$ est lié à la densité volumique d'énergie électromagnétique $u_{em} = u_{em}(M, t)$, au vecteur densité de courant $\vec{j} = \vec{j}(M, t)$ et au champ électrique $\vec{E} = \vec{E}(M, t)$ par l'**équation locale de Poynting** :

$$\operatorname{div} \vec{\Pi} + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

Cette équation est une formulation locale des transferts d'énergie qui s'effectuent dans un volume (\mathcal{V}) pendant un temps dt



– L'énergie électromagnétique (due à la seule présence des champs électrique et magnétique) contenue dans (\mathcal{V}) vaut, à la date t :

$$\mathfrak{E}(t) = \iiint_{(\mathcal{V})} u_{em}(P, t) d\tau_P$$

et à la date $t + dt$:

$$\mathfrak{E}(t + dt) = \iiint_{(\mathcal{V})} u_{em}(P, t + dt) d\tau_P$$

sa variation, pendant dt , vaut alors :

$$d\mathfrak{E} \hat{=} \mathfrak{E}(t + dt) - \mathfrak{E}(t) = \iiint_{(\mathcal{V})} [u_{em}(P, t + dt) - u_{em}(P, t)] d\tau_P$$

où :

$$\begin{aligned} u_{em}(P, t + dt) &= u_{em}(P, t) + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} \bigg|_{(P, t)} dt \\ \Rightarrow d\mathfrak{E} &= \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{\partial u_{em}}{\partial t} \bigg|_{(P, t)} dt d\tau_P \\ \Rightarrow \frac{d\mathfrak{E}}{dt} &= \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{\partial u_{em}}{\partial t} \bigg|_{(P, t)} d\tau_P \end{aligned} \quad (27)$$

- La puissance volumique que le champ électrique cède aux charges en mouvement vaut $\mathcal{P}_{v, \text{charges}} = \vec{j} \cdot \vec{E}$, ce qui justifie que, pendant dt , les charges mobiles contenues dans un volume $d\tau_P$ reçoivent un travail $\delta W_{\text{charges}}$ tel que :

$$\delta \mathcal{P}_{\text{charges}} = \frac{\delta W_{\text{charges}}}{dt} = \mathcal{P}_{v, \text{charges}} d\tau_P = \vec{j}(P) \cdot \vec{E}(P) d\tau_P$$

Par conséquent, dans le volume (\mathcal{V}) , les charges mobiles reçoivent, pendant dt , le travail $\delta W_{\text{charges}}$ tel que :

$$\frac{\delta W_{\text{charges}}}{dt} = \iiint_{(\mathcal{V})} \vec{j}(P) \cdot \vec{E}(P) d\tau_P \quad (28)$$

- L'énergie électromagnétique $\delta \mathcal{E}_s$ sortant du volume (\mathcal{V}) pendant dt est donnée par la loi (26) :

$$\frac{\delta \mathcal{E}_s}{dt} = \oint_{(\Sigma)} \vec{\Pi}(M) \cdot d\vec{S}_M$$

ce qui signifie aussi que, pendant dt , une énergie $\delta \mathcal{E}_{\text{entrant}}$ pénètre dans (\mathcal{V}) à travers (Σ) :

$$\frac{\delta \mathcal{E}_{\text{entrant}}}{dt} = \oint_{(\Sigma)} \vec{\Pi}(M) \cdot (-d\vec{S}_M) = - \iiint_{(\mathcal{V})} \text{div} \vec{\Pi}(P) d\tau_P \quad (29)$$

La conservation de l'énergie impose que l'énergie qui pénètre dans (\mathcal{V}) est d'une part accumulée sous forme d'énergie électromagnétique (champs \vec{E} et \vec{B}) et est d'autre part transformée en travail pour les charges mobiles :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}_{\text{entrant}} &= d\mathfrak{E} + \delta W_{\text{charges}} \\ \Rightarrow \frac{\delta \mathcal{E}_{\text{entrant}}}{dt} &= \frac{d\mathfrak{E}}{dt} + \frac{\delta W_{\text{charges}}}{dt} \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en tenant compte des relations (27), (28) et (29) :

$$\begin{aligned} - \iiint_{(\mathcal{V})} \text{div} \vec{\Pi}(P) d\tau_P &= \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{\partial u_{em}}{\partial t} \bigg|_{(P, t)} d\tau_P + \iiint_{(\mathcal{V})} \vec{j}(P) \cdot \vec{E}(P) d\tau_P \\ \Rightarrow \iiint_{(\mathcal{V})} \left[\text{div} \vec{\Pi}(P) + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} \bigg|_{(P, t)} + \vec{j}(P) \cdot \vec{E}(P) \right] d\tau_P &= 0 \end{aligned}$$

Cette équation devant être vérifiée pour tout volume (\mathcal{V}), elle confirme l'équation locale de Poynting.

Remarque : *L'équation locale de Poynting devient, en l'absence de charge mobile :*

$$\operatorname{div} \vec{\Pi} + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = 0$$

avec :

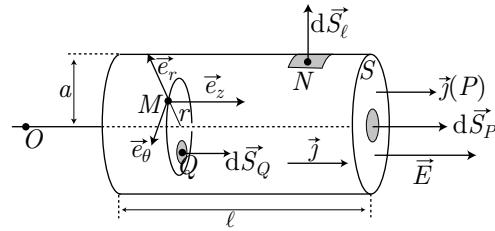
$$\frac{\delta \mathcal{E}_{\text{entrant}}}{dt} = - \oint_{(\Sigma)} \vec{\Pi}(M) \cdot d\vec{S}_M = \frac{d\mathfrak{E}}{dt} \not \propto \mathfrak{E}(t) = \iiint_{(\mathcal{V})} u_{em}(P, t) d\tau_P$$

Cette équation, qui traduit un bilan d'énergie, est formellement comparable à l'équation de conservation de la charge :

$$\begin{aligned} \frac{\delta q_e}{dt} &= - \oint_{(\Sigma)} \vec{j}(M) \cdot d\vec{S}_M = \frac{dQ}{dt} \not \propto Q(t) = \iiint_{(\mathcal{V})} \rho(P, t) d\tau_P \\ &\Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

Énergie reçue par un conducteur ohmique

Soit (\mathcal{C}) un conducteur ohmique élémentaire cylindrique, de longueur ℓ , de section S , de rayon a et de conductivité σ finie.



(\mathcal{C}) est parcouru par un courant de densité uniforme $\vec{j} = j \vec{e}_z$ et donc d'intensité :

$$I = \iint_{(S)} \vec{j}(P) d\vec{S}_P = j \iint_{(S)} dS_P = j \times S \Rightarrow j = \frac{I}{S}$$

Considérons un parcours (Γ) circulaire, de rayon r , le long duquel le champ magnétique a pour circulation :

$$\mathcal{C}_B \doteq \oint_{(\Gamma)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{OM} = \int_{\theta=0}^{2\pi} [B(r) \vec{e}_\theta] \cdot [r d\theta \vec{e}_\theta] = 2\pi r B(r)$$

Or, dans le cadre de l'A.R.Q.S. : $\vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ valide le théorème d'Ampère sous sa forme intégrale :

$$\mathcal{C}_B = \mu_0 I_{\text{int}} = \mu_0 \iint_{(s)} \vec{j}(Q) \cdot d\vec{S}_Q = \mu_0 j s$$

où s représente la surface circonscrite dans (Γ) . Notamment, lorsque $r = a$:

$$\begin{cases} \mathcal{C}_B = 2\pi a \times B(a) \\ \mathcal{C}_B = \mu_0 j S = \mu_0 I \end{cases} \Rightarrow 2\pi a \times B(a) = \mu_0 I \Rightarrow B(a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{e}_\theta \quad (30)$$

En vertu de la loi locale d'Ohm, le champ électrique est uniforme dans le conducteur et vaut :

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma} \vec{j} = \frac{1}{\sigma} j \vec{e}_z = \frac{I}{\sigma S} \vec{e}_z$$

Par conséquent, en un point N de la surface latérale du conducteur, le vecteur de Poynting vaut :

$$\vec{\Pi}(N) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}(a) = \frac{I^2}{2\pi a \sigma S} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta = -\frac{I^2}{2\pi a \sigma S} \vec{e}_r$$

Donc, pendant dt , la surface latérale $S_\ell = 2\pi a \ell$ est traversée, vers l'extérieur, par une énergie $\delta \mathcal{E}_s$ telle que :

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{E}_s}{dt} &= \iint_{(S_\ell)} \vec{\Pi}(N) \cdot d\vec{S}_\ell = \iint_{(S_\ell)} \left(-\frac{I^2}{2\pi a \sigma S} \vec{e}_r \right) \cdot (dS_\ell \vec{e}_r) \\ &= -\frac{I^2}{2\pi a \sigma S} \times S_\ell = -I^2 \times \frac{\ell}{\sigma S} \end{aligned}$$

ce qui signifie que, pendant dt , la surface latérale S_ℓ de (\mathcal{C}) est traversée par une énergie $\delta \mathcal{E}_e$ qui pénètre dans (\mathcal{C}) , telle que :

$$\frac{\delta \mathcal{E}_e}{dt} = -\frac{\delta \mathcal{E}_s}{dt} = RI^2 \text{ où } R = \frac{\ell}{\sigma S}$$

Il apparaît ainsi que la puissance perdue par effet Joule provient d'un flux d'énergie électromagnétique à travers la surface latérale du conducteur ohmique.

3.6 Propagation et rayonnement

3.6.1 Ondes planes progressives

Équation de propagation dans le vide

Dans le vide, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{B}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \vec{E}) \\ &\Rightarrow \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \vec{E}) \end{aligned}$$

où $\text{div} \vec{B} = 0$, tandis que l'équation de Maxwell-Faraday indique que :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -\Delta \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \Rightarrow \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (31)$$

et que :

$$\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \vec{B}) \Rightarrow \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \vec{B})$$

Les équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Ampère deviennent en outre, dans le vide :

$$\begin{cases} \text{div} \vec{E} = 0 \\ \vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow -\Delta \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (32)$$

Structure de l'onde plane

Les équations (31) et (32) montrent que \vec{E} et \vec{B} sont solutions de l'équation de d'Alembert : $\Delta \vec{\psi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} = \vec{0}$, où $\vec{\psi} = \sum_{\alpha=1}^3 \psi_\alpha \vec{e}_\alpha$ désigne indifféremment \vec{E} ou \vec{B} . Cette équation, qui s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta \psi_\alpha - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial t^2} = 0$$

admet, entre autres, comme solutions les ondes planes progressives :

$$\psi_\alpha(M, t) = \psi_\alpha(\phi) \not\propto \phi = \phi(M, t) = \vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega t \quad (33)$$

ainsi que les ondes planes régressives (qui ne seront pas étudiées ici).

Puisque $\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{\partial \phi}{\partial x_\beta} \frac{d\psi_\alpha}{d\phi} = k_\beta \frac{d\psi_\alpha}{d\phi}$, les opérateurs $\vec{\text{rot}} \vec{\psi}$ et $\text{div} \vec{\psi}$ adoptent les formes :

$$\vec{\text{rot}} \vec{\psi} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\psi} \Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{\psi} = \vec{k} \wedge \frac{d\vec{\psi}}{d\phi} = \frac{d}{d\phi} (\vec{k} \wedge \vec{\psi})$$

et :

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{\psi} &= \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^3 k_\alpha \frac{d\psi_\alpha}{d\phi} = \vec{k} \cdot \frac{d\vec{\psi}}{d\phi} \\ &\Rightarrow \text{div} \vec{\psi} = \frac{d}{d\phi} (\vec{k} \cdot \vec{\psi}) \end{aligned}$$

De même, l'expression (33) fournit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t} &= \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{d\psi_\alpha}{d\phi} = -\omega \frac{d\psi_\alpha}{d\phi} \\ &\Rightarrow \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} = -\omega \sum_{\alpha=1}^3 \frac{d\psi_\alpha}{d\phi} \vec{e}_\alpha \Rightarrow \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} = \frac{d}{d\phi} (-\omega \vec{\psi}) \end{aligned}$$

L'équation de Maxwell-Faraday devient ainsi :

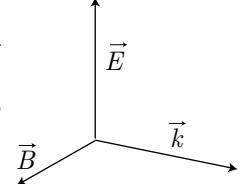
$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{d}{d\phi} (\vec{k} \wedge \vec{E}) = \frac{d}{d\phi} (\omega \vec{B}) \Rightarrow \vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B} \quad (34)$$

et l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit, dans le vide :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \frac{d}{d\phi} (\vec{k} \wedge \vec{B}) = \frac{d}{d\phi} \left(-\frac{\omega}{c^2} \vec{E} \right) \Rightarrow \vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E} \quad (35)$$

Ces équations montrent que les vecteurs \vec{k} , \vec{E} et \vec{B} sont orthogonaux et donnent leurs orientations relatives.

Ces orientations sont d'ailleurs confirmées par les deux autres équations de Maxwell, dans le vide :



$$\text{div } \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\phi} (\vec{k} \cdot \vec{E}) = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E} \quad (36)$$

et :

$$\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\phi} (\vec{k} \cdot \vec{B}) = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{B}$$

Les relations (35) et (34) conduisent à :

$$\begin{aligned} \vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{B}) &= -\frac{\omega}{c^2} \vec{k} \wedge \vec{E} \Rightarrow \vec{k} \times (\vec{k} \cdot \vec{B}) - k^2 \vec{B} = -\frac{\omega}{c^2} (\omega \vec{B}) \\ &\Rightarrow -k^2 \vec{B} = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{B} \Rightarrow \omega = kc \end{aligned}$$

ce qui confirme la relation entre ω , k et c .

Remarque : *Les règles de remplacement :*

$$\vec{\text{rot}} \vec{\psi} \equiv \frac{d}{d\phi} (\vec{k} \wedge \vec{\psi}) \text{ et } \text{div } \vec{\psi} \equiv \frac{d}{d\phi} (\vec{k} \cdot \vec{\psi})$$

sont spécifiques aux ondes planes. Tout autre type d'ondes, par exemple dont la fonction d'onde s'écrit :

$$\vec{\psi}(M, t) = F(OM) \times \vec{G}(\phi) \text{ avec } \phi \hat{=} \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \omega t$$

sont exclues de ces règles.

Propagation de l'énergie

Considérons une région de l'espace, vide de matière, dans laquelle se propage une onde électromagnétique plane, dont les champs électrique et magnétique vérifient la relation (34) :

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E}$$

Le vecteur de Poynting vaut ainsi :

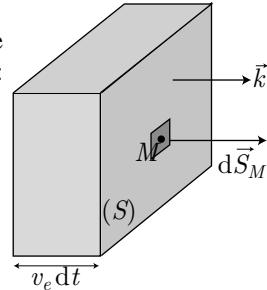
$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0 \omega} \vec{E} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) = \frac{1}{\mu_0 \omega} [\vec{k} \times E^2 - \vec{E} \times (\vec{k} \cdot \vec{E})]$$

où la relation (36) indique que :

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{\Pi} = \frac{E^2}{\mu_0 \omega} \vec{k} \quad (37)$$

Si (S) désigne une surface perpendiculaire à \vec{k} , l'énergie électromagnétique $\delta\mathcal{E}_{em}$ qui traverse (S) pendant dt vérifie :

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{E}_{em}}{dt} &= \iint_{(S)} \vec{\Pi}(M) \cdot d\vec{S}_M = \frac{E^2}{\mu_0\omega} \iint_{(S)} \vec{k} \cdot d\vec{S}_M \\ \Rightarrow \delta\mathcal{E}_{em} &= \frac{E^2}{\mu_0} \frac{k}{\omega} S dt = \frac{E^2}{\mu_0 c} S dt \text{ car } \omega = kc\end{aligned}$$



Notons v_e la vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique dans le vide et $v_e dt$ la hauteur d'un parallélépipède rectangle (\mathcal{C}) , de section droite S et donc de volume $V = v_e S dt$. L'énergie $\delta\mathfrak{E}_{em}$ qui se trouve à l'intérieur de (\mathcal{C}) traverse alors (S) pendant dt , avec :

$$\delta\mathfrak{E}_{em} = u_{em} \times V = u_{em} \times v_e S dt$$

et :

$$\begin{aligned}u_{em} &= \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \text{ où } \vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} \text{ et } \vec{k} \perp \vec{E} \\ &= \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{1}{2\mu_0} \times \frac{k^2}{\omega^2} E^2 \\ &= \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} \text{ car } \omega = kc\end{aligned}$$

Ce faisant :

$$\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1 \Rightarrow u_{em} = \frac{E^2}{\mu_0 c^2} \Rightarrow \delta\mathfrak{E}_{em} = \frac{E^2}{\mu_0 c^2} v_e S dt$$

de sorte que l'identité :

$$\delta\mathcal{E}_{em} = \delta\mathfrak{E}_{em} \Rightarrow \frac{E^2}{\mu_0 c} S dt = \frac{E^2 v_e}{\mu_0 c^2} S dt \Rightarrow v_e = c$$

montre que, dans le vide, une onde plane propage de l'énergie électromagnétique à la vitesse c de la lumière.

Onde plane progressive harmonique (O.P.P.H.)

Considérons une O.P.P.H. (ou O.P.P.M.), de vecteur d'onde $\vec{k} = \sum_{\alpha=1}^3 k_\alpha \vec{e}_\alpha$, de pulsation ω et dont les composantes du champ électrique :

$$\vec{E}(M, t) = \sum_{\alpha=1}^3 E_\alpha(M, t) \vec{e}_\alpha$$

sont sinusoïdales :

$$\begin{aligned}E_\alpha(M, t) &= E_{\alpha 0} \cos(\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \omega t + \phi_{0\alpha}) \\ &= E_{0\alpha} \cos(\phi + \phi_{0\alpha})\end{aligned}$$

où $\phi = \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \omega t$ et où $\phi_{0\alpha}$ est une constante. On peut adopter la notation complexe :

$$E_\alpha(M, t) = \operatorname{Re} \{ \underline{E}_\alpha \} \diagup \underline{E}_\alpha \hat{=} E_{0\alpha} e^{j(\phi + \phi_{0\alpha})} = \underline{E}_{0\alpha} e^{j\phi} \diagup \underline{E}_{0\alpha} = E_{0\alpha} e^{j\phi_{0\alpha}}$$

de sorte que :

$$\vec{E}(M, t) = \operatorname{Re} \{ \underline{E} \} \diagup \underline{E} \hat{=} \sum_{\alpha=1}^3 \underline{E}_\alpha \vec{e}_\alpha$$

En remarquant que :

$$\frac{\partial \underline{E}_\alpha}{\partial x_\beta} = j \frac{\partial \phi}{\partial x_\beta} E_{0\alpha} e^{j(\phi + \phi_{0\alpha})} = j k_\beta \underline{E}_\alpha$$

on pourra linéariser les opérateurs vectoriels rotationnel et divergence :

$$\vec{\operatorname{rot}} \underline{E} = j \vec{k} \wedge \underline{E} \text{ et } \operatorname{div} \underline{E} = j \vec{k} \cdot \underline{E} \quad (38)$$

Remarque : La linéarisation précédente n'est justifiée que dans le cas des ondes planes, dont les images complexes des composantes s'écrivent :

$$\underline{E}_\alpha = \underline{E}_{0\alpha} e^{j\phi} \text{ avec } \underline{E}_{0\alpha} = \text{cte}$$

Dans le cas contraire (par exemple si $\underline{E}_{0\alpha}$ dépend de M ou de t), l'onde n'est pas plane, ce qui invalide les identités (38).

De même :

$$\underline{E} = \sum_{\alpha=1}^3 \underline{E}_\alpha \vec{e}_\alpha \Rightarrow \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \underline{E}_\alpha}{\partial t} \vec{e}_\alpha$$

avec :

$$\frac{\partial \underline{E}_\alpha}{\partial t} = j \frac{\partial \phi}{\partial t} E_{0\alpha} e^{j(\phi + \phi_{0\alpha})} \Rightarrow \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = -j\omega \underline{E} \quad (39)$$

Le champ magnétique d'une O.P.P.M. vérifie des relations similaires :

$$\vec{\operatorname{rot}} \underline{B} = j \vec{k} \wedge \underline{B} \quad \operatorname{div} \underline{B} = j \vec{k} \cdot \underline{B} \quad \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = -j\omega \underline{B}$$

De fait, en notation complexe, les équations de Maxwell dans le vide :

$$\vec{\operatorname{rot}} \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad \vec{\operatorname{rot}} \underline{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \quad \operatorname{div} \underline{E} = 0 \quad \operatorname{div} \underline{B} = 0$$

deviennent :

$$\vec{k} \wedge \underline{E} = \omega \underline{B} \quad \vec{k} \wedge \underline{B} = -\frac{\omega}{c^2} \underline{E} \quad \vec{k} \cdot \underline{E} = 0 \quad \vec{k} \cdot \underline{B} = 0$$

ce qui est compatible avec les relations (34) et (35).

Remarque : La relation : $\omega \underline{\vec{B}} = \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}$ est souvent utilisée pour déterminer le champ magnétique $\vec{B} = \text{Re} \{ \underline{\vec{B}} \}$ d'une O.P.P.M. dont on connaît le champ électrique.

Attention : ne pas utiliser les notations complexes pour déterminer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$.

Les notations complexes $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{B}}$ peuvent néanmoins être utilisées pour déterminer les expressions de $\vec{E} = \text{Re} \{ \underline{\vec{E}} \}$ et $\vec{B} = \text{Re} \{ \underline{\vec{B}} \}$, à partir desquels on accédera à $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$.

EXEMPLE

Déterminons le vecteur de Poynting d'une O.P.P.M. dont le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y \text{ avec } \begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(kz - \omega t) \\ E_y = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \phi_0) \end{cases} \quad (40)$$

les grandeurs E_{0x} , E_{0y} , k_1 , ω et ϕ_0 étant constantes.

Pour cela, utilisons les notations complexes afin de présenter le champ électrique sous la forme :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_x \vec{e}_x + \underline{E}_y \vec{e}_y \text{ avec } \begin{cases} \underline{E}_x = E_{0x} e^{j\phi} \\ \underline{E}_y = E_{0y} e^{j(\phi + \phi_0)} \end{cases} \text{ où } \phi \equiv kz - \omega t$$

L'équation de Maxwell-Faraday : $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ équivaut alors à :

$$\omega \underline{\vec{B}} = \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}$$

où $\vec{k} = k \vec{e}_z$ est colinéaire à la direction de propagation \vec{e}_z de l'onde. Ainsi :

$$\begin{aligned} \omega \underline{\vec{B}} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \underline{E}_x \\ \underline{E}_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \underline{E}_y \\ k \underline{E}_x \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \underline{B}_x = -\frac{\underline{E}_y}{c} \\ \underline{B}_y = \frac{\underline{E}_x}{c} \\ \underline{B}_z = 0 \end{cases} \text{ car } \omega = k \times c \\ &\Rightarrow \begin{cases} \underline{B}_x = -\frac{E_{0y}}{c} e^{j(\phi + \phi_0)} \\ \underline{B}_y = \frac{E_{0x}}{c} e^{j\phi} \\ \underline{B}_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_x = -\frac{E_{0y}}{c} \cos(\phi + \phi_0) \\ B_y = \frac{E_{0x}}{c} \cos \phi \\ B_z = 0 \end{cases} \quad (41) \end{aligned}$$

L'expression du vecteur de Poynting s'obtient alors directement à partir des expressions (40) du champ électrique et (41) du champ magnétique :

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &\equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_0} (E_x B_y - E_y B_x) \vec{e}_z \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} [E_{0x}^2 \cos^2 \phi + E_{0y}^2 \cos^2(\phi + \phi_0)] \vec{e}_z \end{aligned}$$

Sa valeur moyenne, au cours d'une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, vaut donc :

$$\begin{aligned} \langle \vec{\Pi} \rangle &= \frac{1}{\mu_0 c} [E_{0x}^2 \langle \cos^2 \phi \rangle + E_{0y}^2 \langle \cos^2(\phi + \phi_0) \rangle] \vec{e}_z \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} \times \frac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2} \text{ où } \frac{1}{\mu_0 c} = \varepsilon_0 c \text{ et } E_{0x}^2 + E_{0y}^2 = E^2 = \|\vec{E}\|^2 \\ &\Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\varepsilon_0 c E^2}{2} \end{aligned}$$

Polarisation

Considérons une onde plane progressive sinusoïdale, qui se propage dans la direction du vecteur unitaire \vec{e}_z d'un repère $\{O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$. Le champ électrique $\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y$, perpendiculaire à \vec{e}_z , a donc des composantes qui peuvent s'écrire :

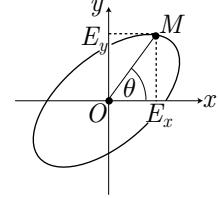
$$\begin{cases} E_x(z, t) = E_{0x} \cos \phi \\ E_y(z, t) = E_{0y} \cos(\phi + \phi_0) \end{cases} \quad \text{avec } \phi = \phi(z, t) = kz - \omega t \quad (42)$$

où E_{0x}, E_{0y} sont des constantes positives et ϕ_0 une constante décrivant le déphasage entre E_x et E_y . Par convention, c'est le champ électrique qui décrit la polarisation d'une onde électromagnétique (le champ magnétique peut être toutefois préféré dans certains cas). On convient alors d'étudier la courbe décrite par l'extrémité de \vec{E} dans son **plan de polarisation** (ici $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$), c'est-à-dire par le point $M(E_x, E_y)$.

- Pour ϕ_0 quelconque, les expressions (42) de E_x et E_y montrent que M décrit une ellipse, dans un sens qui dépend du signe de ϕ_0 :

Soit θ l'angle entre \overrightarrow{OM} et \vec{e}_x , tel que :

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{E_y}{E_x} = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} \times \frac{\cos \phi \cos \phi_0 - \sin \phi_0 \sin \phi}{\cos \phi} \\ &= \frac{E_{0y}}{E_{0x}} \times (\cos \phi_0 - \sin \phi_0 \tan \phi) \\ \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} \times \frac{1}{\cos^2 \theta} &= -\frac{E_{0y}}{E_{0x}} \times \sin \phi_0 \times \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{d\phi}{dt} \end{aligned}$$

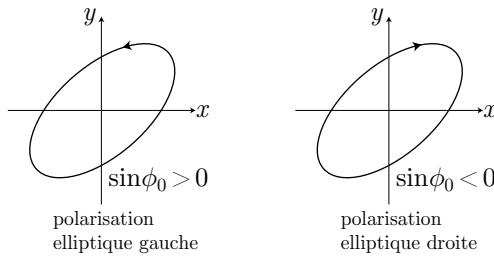


où $\phi = kz - \omega t$ indique que :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\omega E_{0y} \cos^2 \theta}{E_{0y} \cos^2 \phi} \times \sin \phi_0 \quad (43)$$

a le même signe que $\sin \phi_0$. Ainsi :

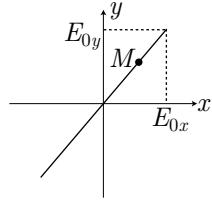
- lorsque $\sin \phi_0 > 0$, $\frac{d\theta}{dt} > 0$ indique que M décrit l'ellipse dans le sens positif trigonométrique ; la polarisation est **elliptique gauche**.
- lorsque $\sin \phi_0 < 0$, $\frac{d\theta}{dt} < 0$ révèle que M décrit l'ellipse dans le sens négatif trigonométrique ; la polarisation est **elliptique droite**.



- Lorsque $\phi_0 = 0$, les composantes $E_x = E_x(z, t)$ et $E_y = E_y(z, t)$ vérifient :

$$\begin{cases} E_x = E_{0x} \cos \phi \\ E_y = E_{0y} \cos \phi \end{cases} \Rightarrow E_y = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} \times E_x \Rightarrow E_y = a E_x$$

où $a = \frac{E_{0y}}{E_{0x}}$ est un coefficient constant.



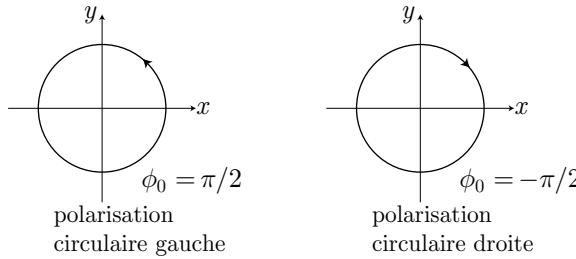
Le point $M(E_x, E_y)$ décrit donc un segment de droite ; la polarisation est **rectiligne**.

- Lorsque $\phi_0 = \pm \frac{\pi}{2}$, les expressions (42) deviennent :

$$\begin{cases} E_x = E_{0x} \cos \phi \\ E_y = \mp E_{0y} \sin \phi \end{cases} \Rightarrow \frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} = 1$$

ce qui montre que le point $M(E_x, E_y)$ décrit une ellipse orientée selon les axes Ox et Oy ; le sens de parcours de cette ellipse est déterminé par le signe de ϕ_0 , conformément à la relation (43).

Le cas particulier pour lequel $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ correspond à une **polarisation circulaire** : $E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$, dont le sens est imposé par le signe de $\phi_0 = \pm \frac{\pi}{2}$:



Théorème 16. *Toute onde polarisée elliptiquement peut être considérée comme la superposition de deux ondes polarisées rectilignement dans les directions orthogonales.*

DÉMONSTRATION

L'onde polarisée elliptiquement présente des composantes $E_x(z, t)$ et $E_y(z, t)$ telles que :

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= E_x(z, t) \vec{e}_x + E_y(z, t) \vec{e}_y \text{ où } \begin{cases} E_x(z, t) = E_{0x} \cos \phi \\ E_y(z, t) = E_{0y} \cos(\phi + \phi_0) \end{cases} \\ &= \vec{E}_x(z, t) + \vec{E}_y(z, t) \end{aligned}$$

Le champ $\vec{E}(z, t)$ est donc la composition des champs $\vec{E}_x = E_x \vec{e}_x$ et $\vec{E}_y = E_y \vec{e}_y$ caractéristiques d'ondes polarisées rectilignement dans les directions \vec{e}_x et \vec{e}_y orthogonales.

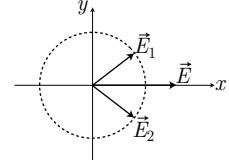
Théorème 17. *Toute onde polarisée rectilignement peut être assimilée à une superposition de deux ondes polarisées circulairement, de même amplitude mais de sens contraires.*

DÉMONSTRATION

Soit $\vec{E}(z, t) = E(z, t) \vec{e}_x$ une onde polarisée rectilignement dans la direction \vec{e}_x .

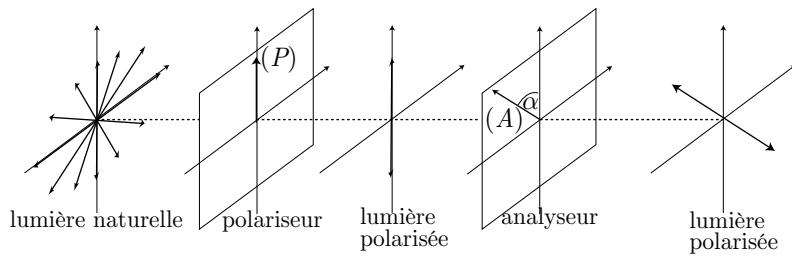
La superposition des ondes polarisées circulairement, de champs électriques :

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} E_0 \cos \phi \\ E_0 \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{E}_Z = \begin{pmatrix} E_0 \cos \phi \\ -E_0 \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \phi = \phi(z, t)$$



conduit au champ $\vec{E}(z, t)$ de l'onde polarisée rectilignement.

La lumière naturelle n'est pas polarisée rectilignement. Pour obtenir une telle polarisation, il est possible d'utiliser un filtre polarisant (appelé **polariseur**) qui ne garde de la lumière naturelle que les champs dirigés selon une direction (P) :



Ce faisant, la lumière, d'intensité I_0 , qui émerge d'un tel filtre est polarisée dans la direction de (P).

Si cette lumière est interceptée par un autre filtre polarisant (appelé **analyseur**), dont la direction de polarisation (A) fait un angle α avec le champ incident, la lumière qui en émerge est polarisée selon (A), avec une intensité I qui suit la **loi de Malus** :

$$I = I_0 \cos^2 \alpha$$

Paquet d'ondes

Définition 11. On appelle **paquet d'ondes** la superposition de plusieurs ondes sinusoïdales de pulsations voisines, dans le même état de polarisation.

Considérons deux ondes planes progressives sinusoïdales, dans le même état de polarisation (par exemple \vec{e}_x), dont les champs électriques :

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = E_1 \vec{e}_x \\ \vec{E}_2 = E_2 \vec{e}_x \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} E_1 = E_0 \cos(k_1 z - \omega_1 t) \\ E_2 = E_0 \cos(k_2 z - \omega_2 t) \end{cases}$$

présentent des pulsations ω_1 et ω_2 voisines :

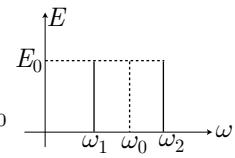
$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_0 - d\omega \\ \omega_2 = \omega_0 + d\omega \end{cases} \text{ et } \begin{cases} k_1 = k_0 - dk \\ k_2 = k_0 + dk \end{cases} \text{ où } \begin{cases} d\omega \ll \omega_0 \\ dk \ll k_0 \end{cases}$$

Le champ électrique résultant :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E \vec{e}_x \text{ avec } E = E_1 + E_2$$

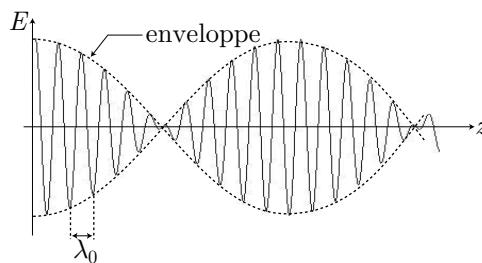
a donc un spectre qui présente deux pics de même amplitude E_0 aux pulsations ω_1 et ω_2 ; il a pour valeur :

$$\begin{aligned} E &= 2E_0 \cos\left(\frac{k_2 - k_1}{2}z - \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \times \cos\left(\frac{k_2 + k_1}{2}z - \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right) \\ &= 2E_0 \cos(\mathrm{d}k z - \mathrm{d}\omega t) \times \cos(k_0 z - \omega_0 t) \end{aligned}$$



Cette expression correspond à une onde, de longueur d'onde $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}$, contenue dans une enveloppe d'équation :

$$\mathcal{E}(z, t) = \cos(\mathrm{d}k z - \mathrm{d}\omega t)$$



C'est cette enveloppe qui contient le paquet d'ondes ; elle se déplace avec une vitesse $v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$.

Définition 12. On appelle **vitesse de groupe** la grandeur :

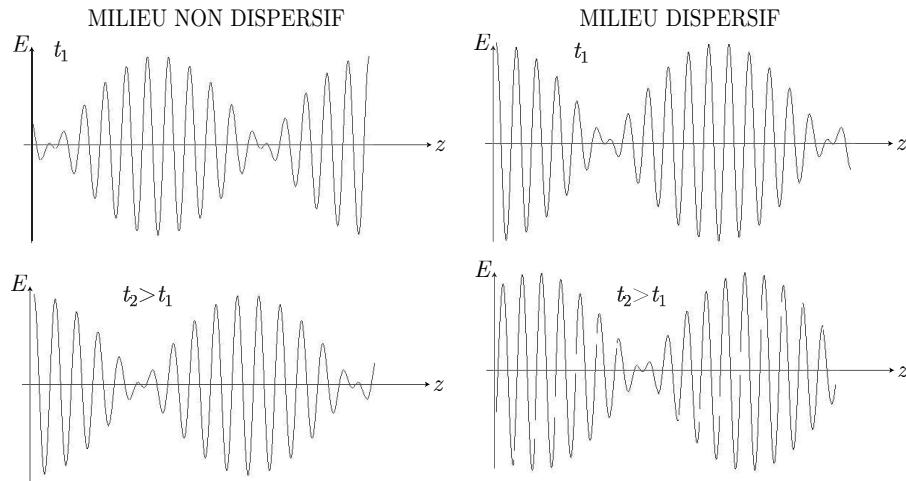
$$v_g \hat{=} \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$$

Remarque : La vitesse de groupe peut être différente de la vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k}$ de chacune des composantes du paquet d'ondes. Le milieu est alors **dispersif**.

Définition 13. Un milieu est **dispersif** lorsque la vitesse de groupe d'une O.P.P.H. dépend de ω .

On appelle **relation de dispersion** la relation entre k et ω .

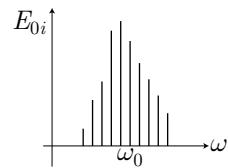
Dans un milieu dispersif, chaque composante du paquet d'ondes (caractérisée par sa pulsation ω) se déplace à sa propre vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k}$; le paquet d'ondes se déforme alors.



Lorsque le paquet d'ondes comporte N composantes de pulsations ω_i voisines de ω_0 et d'amplitudes E_{0i} :

$$E(z, t) = \sum_{i=1}^N E_{0i} \cos(\omega_i t + k_i z - \phi_i)$$

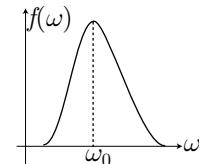
le **spectre** du paquet d'onde fait apparaître E_{0i} en fonction de ω .



En revanche, le paquet d'ondes peut présenter une distribution continue de composantes : dans l'intervalle $[\omega; \omega + d\omega]$ se trouvent des composantes d'amplitudes $\delta E_{0\omega} \hat{=} f(\omega) d\omega$, où $f(\omega)$ est la **densité spectrale** de $E(z, t)$.

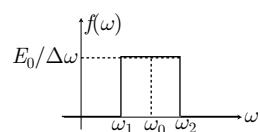
Dans ces conditions, le spectre $f(\omega)$ est une courbe continue à partir de laquelle il est possible d'exprimer :

$$\underline{E} = \int_0^\infty f(\omega) e^{j[kz - \omega t + \phi(\omega)]} d\omega$$



EXEMPLE Considérons un paquet d'ondes constitué d'une distribution continue de composantes spectrales d'amplitude constante et non nulle pour $\omega \in [\omega_1; \omega_2]$. La densité spectrale s'écrit :

$$\begin{cases} f(\omega) = \frac{E_0}{\Delta\omega} \text{ pour } \omega \in [\omega_1; \omega_2] \\ f(\omega) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$



où l'on définit :

$$\Delta\omega \hat{=} \omega_2 - \omega_1 \text{ et } \begin{cases} \omega_1 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \\ \omega_2 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \end{cases} \text{ avec } \Delta\omega \ll \omega_0$$

L'image complexe du champ électrique s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \underline{E} &= \int_0^\infty f(\omega) e^{j(kz - \omega t)} d\omega = \frac{E_0}{\Delta\omega} \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{j(kz - \omega t)} d\omega \\ &= \frac{E_0}{\Delta\omega} \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} e^{j(kz - \omega t)} d\omega \end{aligned}$$

Or, puisque ω reste voisin de ω_0 , on peut définir un paramètre $\varepsilon \ll \omega_0$ tel que :

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \Rightarrow d\omega = d\varepsilon$$

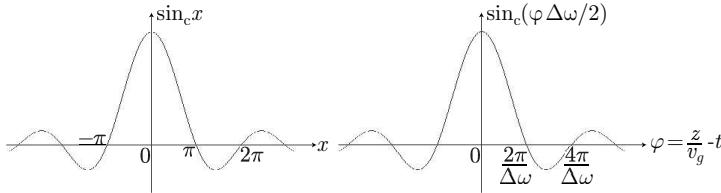
et :

$$k \hat{=} k(\omega) = k(\omega_0 + \varepsilon) \sim k_0 + \varepsilon \frac{dk}{d\omega} = k_0 + \frac{\varepsilon}{v_g}$$

où $k_0 \hat{=} k(\omega_0)$ et $v_g \hat{=} \frac{dk}{d\omega}$ est la vitesse de groupe. Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} kz - \omega t &= \left(k_0 + \frac{\varepsilon}{v_g} \right) z - (\omega_0 + \varepsilon)t = k_0 z - \omega_0 t + \varepsilon \times \varphi(z, t) \text{ avec } \varphi(z, t) \hat{=} \frac{z}{v_g} - t \\ \Rightarrow \underline{E} &= \frac{E_0}{\Delta\omega} \int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} e^{j(k_0 z - \omega_0 t)} \times e^{j\varepsilon \varphi(z, t)} d\varepsilon \\ \Rightarrow \underline{E} &= \frac{E_0}{\Delta\omega} e^{j(k_0 z - \omega_0 t)} \times \frac{1}{j\varphi} \left[e^{j\varphi \Delta\omega/2} - e^{-j\varphi \Delta\omega/2} \right] \\ \Rightarrow \underline{E} &= E_0 e^{j(k_0 z - \omega_0 t)} \times \frac{\sin(\varphi \Delta\omega/2)}{\varphi \Delta\omega/2} \end{aligned} \quad (44)$$

On définit alors la fonction **sinus cardinal** : $\sin_c \hat{=} \frac{\sin x}{x}$, dont la courbe est représentée ci dessous



De la relation (44), il ressort que :

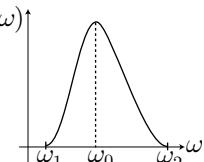
$$E(z, t) = \operatorname{Re} \{\underline{E}\} = E_0 \sin_c \left(\frac{\varphi \Delta\omega}{2} \right) \times \cos(k_0 z - \omega_0 t)$$

ce qui signifie que l'onde d'équation $E_0 \cos(k_0 z - \omega_0 t)$ a pour enveloppe la courbe d'équation $\sin_c \left(\frac{\varphi \Delta\omega}{2} \right)$ dont le maximum central se trouve en $\varphi = 0$, c'est-à-dire en $z = v_g t$; ce paquet d'ondes se propage à une vitesse v_g .

Pour généraliser ce résultat, considérons un champ électrique d'image complexe \underline{E} composée d'un paquet d'ondes de même phase et dont la densité spectrale $f(\omega)$ est non nulle sur un intervalle $[\omega_1 ; \omega_2]$ très étroit au voisinage de ω_0 .

$$\underline{E} = \int_0^\infty f(\omega) e^{j(kz - \omega t)} d\omega$$

On notera $\varepsilon = \omega - \omega_0$ et $k_0 = k(\omega_0)$ de sorte qu'au premier ordre en ε :



$$\begin{aligned}
k &= k(\omega) = k(\omega_0 + \varepsilon) = k_0 + \varepsilon \frac{dk}{d\omega} = k_0 + \frac{\varepsilon}{v_g} \\
\Rightarrow \underline{E} &= \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\omega_0 + \varepsilon) e^{j(k_0 z + \frac{\varepsilon}{v_g} z - \omega_0 t - \varepsilon t)} d\varepsilon \text{ avec } \begin{cases} \omega_1 = \omega_0 - \varepsilon_1 \\ \omega_2 = \omega_0 + \varepsilon_2 \end{cases} \\
\Rightarrow \underline{E} &= e^{j(k_0 z - \omega_0 t)} \times \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} e^{j\left(\frac{z}{v_g} - t\right) \varepsilon} f(\omega_0 + \varepsilon) d\varepsilon \\
\Rightarrow \underline{E} &= \underline{F} \left(\frac{z}{v_g} - t \right) \times e^{j(k_0 z - \omega_0 t)}
\end{aligned}$$

ce qui montre que \underline{E} est composé d'une onde décrite par $e^{j(k_0 z - \omega_0 t)}$ dont l'enveloppe est donnée par la fonction :

$$\underline{F} \left(\frac{z}{v_g} - t \right) \hat{=} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\omega_0 + \varepsilon) e^{j\left(\frac{z}{v_g} - t\right) \varepsilon} d\varepsilon$$

Il apparaît ainsi que cette enveloppe se déplace à la vitesse de groupe $v_g = \frac{dz}{dt}$.

3.6.2 Propagation dans un plasma

Relation de dispersion

Définition 14. Un plasma est un milieu globalement neutre, qui contient des charges électriques libres de s'y déplacer.

Nous supposerons ici que le plasma :

- contient des ions, de charge $q_{\text{ions}} > 0$, de densité volumique n_{ions} et de vitesse $\vec{v}_{\text{ions}} \simeq \vec{0}$, compte tenu de leur grande masse ;
- contient également des électrons mobiles, de charge $q_e < 0$, de densité volumique n_e et de vitesse $\vec{v}_e \neq \vec{0}$;
- est globalement neutre, ce qui signifie aussi que la densité volumique des charges ρ y est globalement nulle :

$$\rho = n_{\text{ions}} q_{\text{ions}} + n_e q_e = 0$$

bien qu'il puisse exister un courant électrique de densité volumique non nulle :

$$\vec{j} = \rho_e \vec{v}_e = n_e q_e \vec{v}_e \neq \vec{0}$$

- est dilué ($n_e \ll 1$), contrairement aux métaux.

Une O.P.P.H. est envoyée dans le plasma, dans la direction de propagation \vec{e}_z , avec un champ électrique polarisé dans la direction de \vec{e}_x :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(kz - \omega t) \vec{e}_x = \text{Re} \left\{ \underline{\vec{E}} \right\} \text{ avec } \underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(kz - \omega t)} \vec{e}_x = \underline{E} \vec{e}_x$$

Puisque les électrons (de masse m_e) du plasma sont soumis à la seule force électrique, leur vitesse vérifie la loi fondamentale de la dynamique :

$$m_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = q_e \vec{E} \Rightarrow m_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = q_e \underline{\vec{E}} \text{ avec } \vec{v}_e = \text{Re} \left\{ \underline{\vec{v}}_e \right\}$$

où l'expression de $\underline{\vec{E}}$ suggère que $\frac{\partial \underline{\vec{v}}_e}{\partial t} = -i\omega \underline{\vec{v}}_e$. Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} -i\omega m_e \underline{\vec{v}}_e &= q_e \underline{\vec{E}} \Rightarrow \underline{\vec{v}}_e = i \frac{q_e}{m_e \omega} \underline{\vec{E}} \\ &\Rightarrow \underline{\vec{j}} = i \frac{n_e q_e^2}{m_e \omega} \text{ avec } \underline{\vec{j}} = \text{Re} \{ \underline{\vec{j}} \} \end{aligned}$$

Remarque : Cette loi ressemble à la loi locale d'Ohm :

$$\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma} \underline{\vec{E}}$$

dans laquelle la conductivité $\underline{\sigma}$ pourrait être complexe.

Or, les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère indiquent que :

$$\vec{\text{rot}} \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \Rightarrow i \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = i\omega \underline{\vec{B}} \quad (45)$$

tandis que :

$$\vec{\text{rot}} \underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\vec{j}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} \Rightarrow i \vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\vec{j}} - \mu_0 \varepsilon_0 i\omega \underline{\vec{E}}$$

De la relation (45) il ressort alors que :

$$\begin{aligned} i \vec{k} \wedge (i \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}) &= i \vec{k} \wedge (i\omega \underline{\vec{B}}) = i\omega (i \vec{k} \wedge \underline{\vec{B}}) \\ &\Rightarrow -\vec{k} (\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}) + k^2 \underline{\vec{E}} = i\omega (\mu_0 \underline{\vec{j}} - \mu_0 \varepsilon_0 i\omega \underline{\vec{E}}) \end{aligned}$$

où la neutralité électrique du plasma impose :

$$\text{div} \underline{\vec{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0$$

Par suite, le champ électrique vérifie l'équation :

$$\begin{aligned} k^2 \underline{\vec{E}} &= i\omega \mu_0 \times \frac{i n_e q_e^2}{m_e \omega} \underline{\vec{E}} + \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \underline{\vec{E}} \\ &\Rightarrow k^2 = -\mu_0 \frac{n_e q_e^2}{m_e} + \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \text{ avec } \mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \\ &\Rightarrow k^2 = \frac{1}{c^2} \left(-\frac{n_e q_e^2}{m_e \varepsilon_0} + \omega^2 \right) \end{aligned}$$

d'où découle la **relation de dispersion** :

$$k^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2) \text{ avec } \omega_p \hat{=} \sqrt{\frac{n_e q_e^2}{m_e \varepsilon_0}}$$

la grandeur ω_p étant appelée **pulsation de plasma**

Structure de l'onde

La relation de dispersion montre que les valeurs relatives de ω et ω_p déterminent la nature de k et donc de l'onde .

- Si $\omega < \omega_p$, l'inégalité : $k^2 < 0$ montre qu'il existe un réel positif κ tel que :

$$k = \pm i\kappa \text{ avec } \kappa = \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} \in \mathbb{R}^{+*}$$

L'image complexe du champ électrique s'écrit alors :

$$\underline{E} = E_{01} e^{i(\kappa z - \omega t)} + E_{02} e^{i(-\kappa z - \omega t)} = E_{01} e^{-\kappa z} e^{-i\omega t} + E_{02} e^{\kappa z} e^{-i\omega t}$$

Or, puisque \underline{E} ne peut tendre vers l'infini, $E_{02} = 0$ laisse seulement :

$$\underline{E} = E_{01} e^{-\kappa z} e^{-i\omega t} \Rightarrow E = E_{01} e^{-\kappa z} \cos(\omega t) \Rightarrow \vec{E} = E \vec{e}_x$$

Une telle onde est dite **évanescante** : lorsque z excède quelques fois la valeur de la distance caractéristique $\delta = \frac{1}{\kappa} = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$, le champ devient très faible, ce qui signifie que l'onde ne peut se propager loin dans le matériau ; il y a réflexion de l'onde.

En outre, l'expression de \underline{E} conduit à celle du champ magnétique, grâce à l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} &\Rightarrow i \vec{k} \wedge \underline{E} = i\omega \underline{B} \\ &\Rightarrow \omega \underline{B} = \vec{k} \wedge \underline{E} = (i\kappa \vec{e}_z) \wedge (\underline{E} \vec{e}_x) = i\kappa \underline{E} \vec{e}_y \\ &\Rightarrow \underline{B} = \frac{i\kappa}{\omega} \underline{E} \vec{e}_y = \frac{i\kappa}{\omega} E_{01} e^{-\kappa z} e^{-i\omega t} \vec{e}_y \\ &\Rightarrow \vec{B} = \text{Re} \left\{ \underline{B} \right\} = \frac{\kappa}{\omega} E_{01} e^{-\kappa z} \sin(\omega t) \vec{e}_y \end{aligned}$$

Par conséquent, le vecteur de Poynting :

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} &= \frac{\kappa}{\mu_0 \omega} E_{01}^2 e^{-2\kappa z} \sin(\omega t) \cos(\omega t) \vec{e}_z \\ &= \frac{\kappa}{2\mu_0 \omega} E_{01}^2 e^{-2\kappa z} \sin(2\omega t) \vec{e}_z \end{aligned}$$

a pour valeur moyenne :

$$\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \vec{0}$$

ce qui montre que l'onde ne permet pas la propagation de l'énergie ; elle est dite **stationnaire**.

Remarque : Lorsque k est complexe et se présente sous la forme : $k = k_1 + i k_2$, l'onde sinusoïdale a pour image complexe :

$$\begin{aligned} \underline{E} &= E_0 e^{i(kz - \omega t)} = E_0 e^{i(k_1 z + i k_2 z - \omega t)} = E_0 e^{-k_2 z} e^{i(k_1 z - \omega t)} \quad (46) \\ &\Rightarrow E = E_0 e^{-k_2 z} \times \cos(k_1 z - \omega t) \end{aligned}$$

ce qui montre que la vitesse de phase vaut :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_1} \Rightarrow v_\phi \hat{=} \frac{\omega}{\operatorname{Re}\{k\}}$$

L'expression (46) montre, en outre, qu'il n'est pas possible d'écrire les relations : $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \underline{\vec{E}} = i \vec{k}_1 \wedge \underline{\vec{E}}$ et $\operatorname{div} \underline{\vec{E}} = i \vec{k}_1 \cdot \underline{\vec{E}}$ spécifiques aux ondes planes.

– Si $\omega = \omega_p$:

$$k^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2) = 0 \Rightarrow k = 0$$

D'une part cette valeur conduit à :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 e^{i\omega t} \vec{e}_x \Rightarrow \underline{\vec{E}} = E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$$

ce qui montre que le champ électrique ne se propage pas dans le plasma et, d'autre part, la relation (45) fournit :

$$\omega \underline{\vec{B}} = \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \vec{0} \Rightarrow \underline{\vec{B}} = \vec{0}$$

ce qui traduit finalement d'absence d'onde électromagnétique dans le plasma.

– Si $\omega > \omega_p$, $k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} \in \mathbb{R}^{*+}$ montre que l'onde plane se propage avec une vitesse de phase :

$$v_\phi \hat{=} \frac{\omega}{k} = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} \Rightarrow v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} > c$$

et que sa vitesse de groupe $v_g \hat{=} \frac{d\omega}{dk}$ vérifie :

$$\begin{aligned} \omega^2 - \omega_p^2 = c^2 k^2 &\Rightarrow 2\omega d\omega = 2c^2 k dk \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} \times \frac{\omega}{k} = c^2 \\ &\Rightarrow v_g \times v_\phi = c^2 \Rightarrow v_g = \frac{c^2}{v_\phi} \\ &\Rightarrow v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < c \end{aligned}$$

en conséquence de quoi l'énergie ne peut se propager, dans un plasma, qu'à une vitesse inférieure à la célérité de la lumière.

L'ionosphère est considérée comme un plasma de densité $n_e \simeq 10^{11}$ électrons par m^3 et donc de pulsation plasma :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{10^{11} \times (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{9,1 \cdot 10^{-31} \times 8,8 \cdot 10^{-12}}} \simeq 1,8 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

à laquelle est associée une fréquence $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} \simeq 2,8 \text{ MHz}$. Des ondes radios produites sur Terre, seules celles dont la fréquence f excède f_p peuvent traverser l'ionosphère ; les autres sont réfléchies, par l'atmosphère, vers la Terre.

- Les communications entre la Terre et les satellites artificiels ne peuvent se réaliser qu'à l'aide d'ondes hertziennes de fréquence élevée.
- Les ondes radio GO (de longueur d'onde $\lambda > 100$ m et donc de fréquence $f < \frac{c}{\lambda} = \frac{3.10^8}{100} = 3$ MHz) se réfléchissent sur l'ionosphère : leur propagation n'est pas limitée par la courbure de la Terre, contrairement aux ondes de la bande FM, dont la propagation est assurée par des relais.

3.6.3 Réflexion sur les métaux

Structure de l'onde

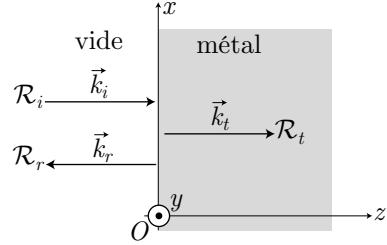
Considérons une O.P.P.M. qui arrive, depuis l'espace vide, sur une surface métallique matérialisée par le plan (Ox, Oy), sous incidence normale. On notera $\vec{E}_1(M, t)$ le champ électrique en un point M de l'espace vide et $\vec{E}_2(M, t) = \vec{0}$ celui en un point M du métal, supposé parfait, situé dans le demi-espace $z \geq 0$.

Le rayon incident \mathcal{R}_i est caractérisé par un vecteur d'onde $\vec{k}_i = k \vec{e}_z$ et possède un champ électrique supposé polarisé selon \vec{e}_x , son amplitude complexe étant notée :

$$\underline{\vec{E}}_i(M, t) = E_0 e^{i(\vec{k}_i \cdot \overrightarrow{OM} - \omega t)} \vec{e}_x$$

avec :

$$\vec{k}_i \cdot \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = kz \Rightarrow \underline{\vec{E}}_i(M, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \vec{e}_x$$



L'onde est partiellement réfléchie, avec un coefficient de réflexion (complexe) \underline{r} tel que le champ réfléchi a pour image complexe :

$$\underline{\vec{E}}_r = \underline{r} E_0 e^{i(\vec{k}_r \cdot \overrightarrow{OM} - \omega' t)} \vec{e}_x$$

avec :

$$\vec{k}_r = -k_r \vec{e}_z \Rightarrow \vec{k}_r \cdot \overrightarrow{OM} = -k_r z \Rightarrow \underline{\vec{E}}_r(M, t) = \underline{r} E_0 e^{i(-k_r z - \omega' t)} \vec{e}_x$$

Par suite, tout point M situé dans l'espace vide est soumis au champ électrique :

$$\vec{E}_1(M, t) = \underline{\vec{E}}_i(M, t) + \underline{\vec{E}}_r(M, t) = E_0 \vec{e}_x \left[e^{i(kz - \omega t)} + \underline{r} e^{-i(k_r z + \omega' t)} \right]$$

En un point P de la surface métallique, où la densité surfacique de charge vaut $\sigma(P)$, la relation de passage du champ électrique s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{E}_2(P, t) - \vec{E}_1(P, t) &= \frac{\sigma(P)}{\epsilon_0} \vec{e}_z \text{ où } \vec{E}_2(P, t) = \vec{0} \text{ et } z = 0 \\ &\Rightarrow -\vec{E}_1(P, t) \cdot \vec{e}_x = \frac{\sigma(P)}{\epsilon_0} \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0 \\ &\Rightarrow E_0 \left[e^{-i\omega t} + \underline{r} e^{-i\omega' t} \right] = 0 \end{aligned} \tag{47}$$

Cette équation devant être vérifiée à toute date t , elle l'est *a fortiori* à la date $t = 0$:

$$1 + \underline{r} = 0 \Rightarrow \underline{r} = -1 = e^{i\pi}$$

Remarque : *Cette valeur montre que la réflexion de l'onde sur une surface métallique s'accompagne d'un déphasage de π .*

Avec $\underline{r} = -1$, l'équation (47) devient :

$$\forall t, e^{-i\omega t} = e^{-i\omega' t} \Rightarrow \omega' = \omega$$

Enfin, dans le vide, le champ électrique vérifie l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

qui indique que la vitesse de phase $\frac{\omega}{k}$ s'identifie à c :

$$\begin{cases} \omega = kc \\ \omega' = k_r c \end{cases} \Rightarrow \frac{k}{k_r} = \frac{\omega}{\omega'} = 1 \Rightarrow k_r = k$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{E}}_r(M, t) = -E_0 e^{i(-kz - \omega t)} \vec{e}_x$$

Finalement, dans le vide, le champ électrique vaut :

$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}}_1(M, t) &= \underline{\vec{E}}_i(M, t) + \underline{\vec{E}}_r(M, t) \\ &= E_0 e^{ikz} e^{-i\omega t} \vec{e}_x - E_0 e^{-ikz} e^{-i\omega t} \vec{e}_x \\ &= E_0 e^{-i\omega t} (e^{ikz} - e^{-ikz}) \vec{e}_x = 2iE_0 e^{-i\omega t} \sin(kz) \vec{e}_x \\ &= 2E_0 e^{i(\pi/2 - \omega t)} \sin(kz) \vec{e}_x \end{aligned}$$

ce qui montre que ce champ est stationnaire :

$$\underline{\vec{E}}_1(M, t) \hat{=} \text{Re} \left\{ \underline{\vec{E}}_1 \right\} = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kz) \vec{e}_x \quad (48)$$

Quant au champ magnétique, il peut se calculer de deux manières :

PREMIÈRE MÉTHODE

Les champs :

$$\underline{\vec{E}}_i = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \vec{e}_x \text{ et } \underline{\vec{E}}_r = -E_0 e^{-i(kz + \omega t)} \vec{e}_x$$

sont ceux d'ondes planes sinusoïdales, pour lesquelles on peut appliquer les règles de calcul :

$$\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} = -i\omega \underline{\vec{B}} \quad \text{rot } \underline{\vec{E}}_i = i \vec{k}_i \wedge \underline{\vec{E}}_i \quad \text{rot } \underline{\vec{E}}_r = i \vec{k}_r \wedge \underline{\vec{E}}_r$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \text{rot } \underline{\vec{E}}_i &= -\frac{\partial \underline{\vec{B}}_i}{\partial t} \Rightarrow i\omega \underline{\vec{B}}_i = i \vec{k}_i \wedge \underline{\vec{E}}_i = (ik \vec{e}_z) \wedge [E_0 e^{i(kz - \omega t)} \vec{e}_x] \\ &\Rightarrow \underline{\vec{B}}_i = \frac{E_0}{c} e^{i(kz - \omega t)} \vec{e}_y \text{ car } \omega = kc \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}} \underline{\vec{E}}_r &= -\frac{\partial \underline{\vec{B}}_r}{\partial t} \Rightarrow i\omega \underline{\vec{B}}_r = i\vec{k}_r \wedge \underline{\vec{E}}_r = (-ik\vec{e}_z) \wedge [-E_0 e^{-i(kz+\omega t)} \vec{e}_x] \\ &\Rightarrow \underline{\vec{B}}_r = \frac{E_0}{c} e^{-i(kz+\omega t)} \vec{e}_y\end{aligned}$$

Par conséquent, l'image complexe du champ magnétique vaut, dans le vide :

$$\begin{aligned}\underline{\vec{B}}_1(M, t) &= \underline{\vec{B}}_i(M, t) + \underline{\vec{B}}_r(M, t) \\ &= \frac{E_0}{c} e^{i(kz-\omega t)} \vec{e}_y + \frac{E_0}{c} e^{-i(kz+\omega t)} \vec{e}_y \\ &= \frac{E_0}{c} e^{-i\omega t} (e^{ikz} + e^{-ikz}) \vec{e}_y = \frac{2E_0}{c} e^{-i\omega t} \cos(kz) \vec{e}_y \\ &\Rightarrow \underline{\vec{B}}_1(M, t) \hat{=} \text{Re} \left\{ \underline{\vec{B}}_1 \right\} = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kz) \vec{e}_y\end{aligned}$$

On remarque, à nouveau, l'absence de propagation de ce champ.

DEUXIÈME MÉTHODE

L'équation de Maxwell-Faraday : $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ peut s'appliquer sur l'expression (48) du champ $\vec{E}_1 = E_x \vec{e}_x$:

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}} \vec{E}_1 &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \\ &= \frac{\partial}{\partial z} [2E_0 \sin(\omega t) \sin(kz)] \vec{e}_y \\ &\Rightarrow \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = -2kE_0 \sin(\omega t) \cos(kz) \vec{e}_y \\ &\Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{2k}{\omega} E_0 \cos(\omega t) \cos(kz) \vec{e}_y \text{ avec } \frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}\end{aligned}$$

Aspects énergétiques

En notant :

$$E_x = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kz) \text{ et } B_y = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kz)$$

les champs électrique \vec{E}_1 et magnétique \vec{B}_1 conduisent à l'expression du vecteur de Poynting :

$$\begin{aligned}\vec{\Pi} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} E_x B_y \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y \\ &= \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin(2\omega t) \sin(2kz) \vec{e}_z \\ &\Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0} \text{ car } \langle \sin(2\omega t) \rangle = 0\end{aligned}$$

Par conséquent, une telle onde ne peut véhiculer de l'énergie. Cependant, la densité volumique d'énergie électromagnétique n'est pas nulle :

$$u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E_x^2}{2} + \frac{B_y^2}{2\mu_0} = 2\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(\omega t) \sin^2(kz) + 2\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t) \cos^2(kz)$$

car $\frac{1}{\mu_0 c^2} = \varepsilon_0$. Or, étant donné que $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$, la valeur moyenne de u_{em} , pendant une période, vaut :

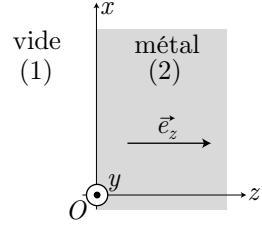
$$\langle u_{em} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(kz) + \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz) \Rightarrow \langle u_{em} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 \neq 0$$

En conclusion, l'énergie électromagnétique accumulée dans l'espace ne se propage pas ; elle oscille, comme le fait $\vec{\Pi}$.

Courant surfacique

La relation de passage du champ magnétique entre le vide (milieu 1) et le métal (milieu 2) s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{B}_{20} - \vec{B}_{10} &= \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_z \\ \Rightarrow \vec{j}_s \wedge \vec{e}_z &= -\frac{1}{\mu_0} \vec{B}_{10} \text{ car } \vec{B}_{20} = \vec{0} \end{aligned}$$



où $\vec{j}_s = j_{sx} \vec{e}_x + j_{sy} \vec{e}_y$ désigne la densité de courant surfacique sur le plan $z = 0$:

$$\vec{j}_s \wedge \vec{e}_z = \begin{pmatrix} j_{sx} \\ j_{sy} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{sy} \\ -j_{sx} \\ 0 \end{pmatrix}$$

tandis que :

$$\vec{B}_{10} = \lim_{z \rightarrow 0^-} \vec{B}_1 = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kz) \vec{e}_y \right] = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{e}_y$$

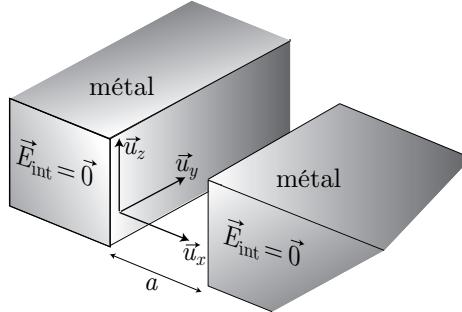
Il s'ensuit d'une part que $j_{sy} = 0$ et d'autre part que :

$$-j_{sx} = -\frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \Rightarrow \vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{e}_x$$

3.6.4 Propagation entre deux plans parallèles

Structure du champ électrique

Considérons l'espace vide compris entre deux surfaces planes, composées d'un métal parfaitement conducteur et espacées d'une distance a .



Intéressons-nous à une onde sinusoïdale qui se propage dans cet espace, dans la direction de \vec{u}_y . L'étude de la section précédente a montré que la réflexion sur les parois métalliques rendait l'onde stationnaire dans la direction de \vec{u}_x . C'est pourquoi le champ électrique sera pris sous la forme :

$$\vec{E} = f(x) \cos(k_y y - \omega t) \vec{u}_z = E(x, y, t) \vec{u}_z$$

en tout point de l'espace vide.

À ce champ est alors associée une image complexe :

$$\underline{\vec{E}} = f(x) e^{i(k_y y - \omega t)} \vec{u}_z = \underline{E}_z \vec{u}_z / E_z = \operatorname{Re} \{ \underline{E}_z \} \quad (49)$$

En $x = 0$ et $x = a$, la présence d'un conducteur parfait, à l'intérieur duquel règne un champ électrique nul impose des conditions aux limites associées à la relation de passage du champ électrique :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\vec{E}(x, y, t)] - \vec{E}_{\text{int}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_x \Rightarrow f(0) \times \cos(k_y y - \omega t) \vec{u}_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_x$$

Le produit scalaire par \vec{u}_z conduit alors à :

$$\forall (y, t), f(0) \times \cos(k_y y - \omega t) = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \quad (50)$$

De même, à proximité de la surface métallique située en $x = a$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^-} [\vec{E}(x, y, t)] - \vec{E}_{\text{int}} &= -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_x \Rightarrow f(a) \cos(k_y y - \omega t) \vec{u}_z = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_x \\ &\Rightarrow \forall (y, t), f(a) \times \cos(k_y y - \omega t) = 0 \Rightarrow f(a) = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

Dans l'espace vide, l'équation de Maxwell-Faraday conduit à :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{B}) \\ &\Rightarrow \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{B}) \end{aligned}$$

où l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\operatorname{div} \underline{\vec{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \text{ dans le vide}$$

et l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\operatorname{rot} \underline{\vec{B}} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ dans le vide}$$

fournissent :

$$\begin{aligned} -\Delta \vec{\underline{E}} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\underline{E}}}{\partial t^2} \Rightarrow \Delta \vec{\underline{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\underline{E}}}{\partial t^2} = \vec{0} \\ &\Rightarrow \Delta \underline{E}_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (52)$$

Remarque : L'expression (49) ne permet pas d'affirmer que l'onde est plane, ce qui exclut l'emploi de la relation : $\vec{\text{rot}} \vec{\underline{E}} = i \vec{k} \wedge \vec{\underline{E}}$.

En remarquant que :

$$\Delta \underline{E}_z = \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial z^2} = \frac{d^2 f}{dx^2} e^{i(k_y y - \omega t)} - k_y^2 f e^{i(k_y y - \omega t)}$$

et que :

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial t^2} = -\omega^2 f e^{i(k_y y - \omega t)}$$

l'équation de propagation devient :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2 \right) f = 0 \quad (53)$$

Plusieurs cas peuvent alors se présenter :

- Si $\omega < ck_y$, il existe une constante $\kappa \in \mathbb{R}^{+*}$ telle que :

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2 < 0 \Rightarrow \frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2 = -\kappa^2 \Rightarrow \frac{d^2 f}{dx^2} - \kappa^2 f = 0$$

Cette équation admet pour solution homogène :

$$f(x) = \lambda e^{\kappa x} + \mu e^{-\kappa x}$$

qui doit non seulement vérifier la condition (50) :

$$f(0) = 0 \Rightarrow \mu = -\lambda \Rightarrow f(x) = 2\lambda \sinh(\kappa x)$$

mais également la condition (51) :

$$\begin{aligned} f(a) = 0 &\Rightarrow 2\lambda \sinh(\kappa a) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ car } \kappa \neq 0 \text{ et } a \neq 0 \\ &\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0} \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'onde électromagnétique ne peut se propager entre les plaques.

- Si $\omega = ck_y$, l'équation (53) montre qu'il existe deux constantes λ et μ telles que :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{df}{dx} = \lambda \Rightarrow f(x) = \lambda x + \mu$$

qui doivent respecter les conditions aux limites (50) et (51) :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ \lambda a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$$

À nouveau, cette configuration interdit la propagation d'une onde électromagnétique.

- Si $\omega > ck_y$, il existe une constante $k_x \in \mathbb{R}^{+*}$ telle que :

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2 > 0 \Rightarrow \frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2 = k_x^2 \quad (54)$$

De la sorte, l'équation différentielle (53) :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + k_x^2 f = 0$$

admet une solution harmonique :

$$f(x) = E_0 \sin(k_x x) + E_1 \cos(k_x x)$$

dans laquelle la constante E_1 est adaptée à la condition :

$$f(0) = 0 \Rightarrow E_1 = 0 \Rightarrow f(x) = E_0 \sin(k_x x)$$

Quant à la condition (51), elle impose :

$$\begin{aligned} f(a) = 0 \Rightarrow E_0 \sin(k_x a) = 0 &\Rightarrow k_x a = n\pi, n \in \mathbb{N}^* \\ &\Rightarrow k_x = \frac{n\pi}{a} \end{aligned}$$

Par conséquent, le champ électrique adopte la forme complexe :

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) e^{i(k_y y - \omega t)} \vec{u}_z, n \in \mathbb{N}^*$$

dont chaque valeur de n correspond à un **mode** (appelé TE_{n0}). Dans la suite, nous limiterons l'étude au mode TE_{10} :

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(k_y y - \omega t)} \vec{u}_z = \underline{E}_z \vec{u}_z \quad (55)$$

Pulsation de coupure

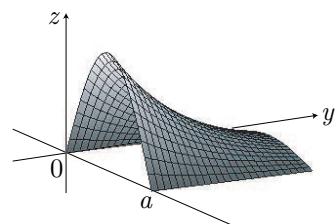
Le mode TE_{10} correspond à la valeur $n = 1$, qui permet d'écrire la relation (54) sous la forme :

$$k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_c^2) \text{ où } \omega_c \hat{=} \frac{\pi c}{a}$$

- Si $\omega < \omega_c$, $k_y^2 < 0$ montre qu'il existe un nombre $k \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que :

$$\begin{aligned} k_y = i k \Rightarrow \underline{E}_z &= E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(iky - \omega t)} \\ &= E_0 e^{-ky} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\omega t} \\ &\Rightarrow E_z = E_0 e^{-ky} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Il s'agit là d'une onde stationnaire, qui ne peut se propager loin entre les plaques : son intensité décroît rapidement avec y .



- Si $\omega = \omega_c$, l'identité $k_y = 0$ conduit à :

$$\begin{aligned} \underline{E}_z &= E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\omega t} \\ \Rightarrow E_z &= E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(\omega t) \end{aligned}$$

À nouveau, cette onde est stationnaire : le champ électrique n'est pas identiquement nul entre les plaques, mais il ne se propage pas.

- Lorsque $\omega > \omega_c$:

$$k_y^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2} > 0 \quad (56)$$

montre que k_y est réel, de sorte que :

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(k_y y - \omega t)} \Rightarrow E_z = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(k_y y - \omega t)$$

désigne le champ électrique d'une onde qui se propage dans la direction de \vec{e}_z , avec une vitesse de phase :

$$v_\phi \hat{=} \frac{\omega}{k_y}$$

En conclusion, la propagation de l'onde entre les plaques est subordonnée à la valeur relative de ω qui doit excéder une **pulsation de coupure** ω_c .

Vitesse de groupe

L'expression (56) de k_y conduit à celle de la vitesse de phase :

$$v_\phi = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}} > c$$

tandis que la vitesse de groupe est définie par : $v_g \hat{=} \frac{d\omega}{dk_y}$, avec :

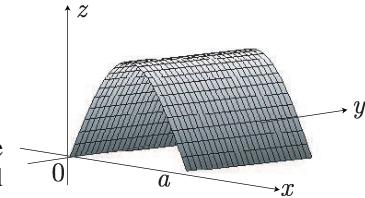
$$\omega^2 - \omega_c^2 = c^2 k_y^2 \Rightarrow 2\omega d\omega = c^2 \times 2k_y dk_y \Rightarrow \frac{\omega}{k_y} \times \frac{d\omega}{dk_y} = c^2$$

$$\Rightarrow v_\phi \times v_g \Rightarrow v_g = \frac{c^2}{v_\phi} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} < c$$

Structure du champ magnétique

L'expression du champ électrique :

$$\vec{E} = E_z \vec{u}_z / E_z = E_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y - \omega t) \text{ où } k_x = \frac{\pi}{a}$$



montre que l'onde n'est pas plane, auquel cas l'expression du champ magnétique s'obtient à partir de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\text{rot}} \vec{E} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ -\frac{\partial E_z}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial B_x}{\partial t} = k_y E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y - \omega t) \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} = k_x E_0 \cos(k_x x) \cos(k_y y - \omega t) \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La dernière équation montre que B_z peut être choisi nul (de sorte que $\vec{B} \perp \vec{E}$), tandis que :

$$\begin{cases} B_x = \frac{E_0 k_y}{\omega} \sin(k_x x) \cos(k_y y - \omega t) \\ B_y = -\frac{E_0 k_x}{\omega} \cos(k_x x) \sin(k_y y - \omega t) \end{cases} \quad (57)$$

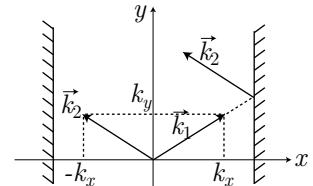
Interprétation

L'expression (55) du champ électrique montre que :

$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}} &= E_0 \frac{e^{ik_x x} - e^{-ik_x x}}{2i} e^{i(k_y y - \omega t)} \vec{u}_z \\ &= \frac{E_0}{2} e^{i(k_x x + k_y y - \omega t - \pi/2)} \vec{u}_z - \frac{E_0}{2} e^{i(-k_x x + k_y y - \omega t - \pi/2)} \vec{u}_z \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en définissant les vecteurs :

$$\vec{k}_1 \hat{=} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{k}_2 = \begin{pmatrix} -k_x \\ k_y \\ 0 \end{pmatrix}$$



le champ électrique apparaît comme la superposition de deux champs, d'images complexes :

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \underline{\vec{E}}_1 \vec{e}_z / \underline{E}_1 = \frac{E_0}{2} e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{OM} - \omega t - \pi/2)} \\ \vec{E}_2 = \underline{\vec{E}}_2 \vec{e}_z / \underline{E}_2 = -\frac{E_0}{2} e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{OM} - \omega t - \pi/2)} \end{cases}$$

composant deux O.P.P.M. qui se propagent dans le vide avec des vecteurs d'onde respectifs \vec{k}_1 et \vec{k}_2 ; le schéma précédent révèle que ces ondes se déduisent l'une de l'autre par réflexion sur les plans métalliques. En outre, les identités :

$$\|\vec{k}_1\| = \|\vec{k}_2\| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = k_0 = \frac{\omega}{c}$$

montre que chaque O.P.P.M. se propage à la célérité c de la lumière.

Aux champs \vec{E}_1 et \vec{E}_2 sont associés les champs magnétiques \vec{B}_1 et \vec{B}_2 qui vérifient :

$$-\frac{\partial \vec{B}_i}{\partial t} = \vec{\text{rot}} \vec{E}_i \Rightarrow \omega \vec{B}_i = \vec{k}_i \wedge \vec{E}_i$$

soit :

$$\omega \vec{B}_1 = \vec{k}_1 \wedge \vec{E}_1 = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{E}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_y \underline{E}_1 \\ -k_x \underline{E}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et :

$$\omega \vec{B}_2 = \vec{k}_2 \wedge \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} -k_x \\ k_y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{E}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_y \underline{E}_2 \\ k_x \underline{E}_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le champ magnétique \vec{B} est, en tout point situé entre les plaques, la superposition des champs magnétiques d'images complexes \vec{B}_1 et \vec{B}_2 :

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} k_y (\underline{E}_1 + \underline{E}_2) \\ k_x (-\underline{E}_1 + \underline{E}_2) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \underline{B}_x = \frac{k_y}{\omega} (\underline{E}_1 + \underline{E}_2) \\ \underline{B}_y = \frac{k_x}{\omega} (-\underline{E}_1 + \underline{E}_2) \end{cases}$$

Ses composantes sont alors :

$$\begin{aligned} \underline{B}_x &= \frac{k_y E_0}{2\omega} \left[e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{OM} - \omega t - \pi/2)} - e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{OM} - \omega t - \pi/2)} \right] \\ &= \frac{k_y E_0}{2\omega} \left[e^{i(k_x x + k_y y - \omega t - \pi/2)} - e^{i(-k_x x + k_y y - \omega t - \pi/2)} \right] \\ &= \frac{k_y E_0}{\omega} e^{i(k_y y - \omega t)} \times \frac{e^{ik_x x} - e^{-ik_x x}}{2i} = \frac{k_y E_0}{\omega} \sin(k_x x) e^{i(k_y y - \omega t)} \\ \Rightarrow B_x &= \text{Re} \{ \underline{B}_x \} = \frac{k_y E_0}{\omega} \sin(k_x x) \cos(k_y y - \omega t) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \underline{B}_y &= -\frac{k_x E_0}{2\omega} \left[e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{OM} - \omega t - \pi/2)} + e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{OM} - \omega t - \pi/2)} \right] \\ &= -\frac{k_x E_0}{2\omega} \left[e^{i(k_x x + k_y y - \omega t - \pi/2)} + e^{i(-k_x x + k_y y - \omega t - \pi/2)} \right] \\ &= -\frac{k_x E_0}{\omega} e^{i(k_y y - \omega t - \pi/2)} \times \frac{e^{ik_x x} + e^{-ik_x x}}{2} \\ &= -\frac{k_x E_0}{\omega} \cos(k_x x) e^{i(k_y y - \omega t - \pi/2)} \\ \Rightarrow B_y &= \text{Re} \{ \underline{B}_y \} = -\frac{k_x E_0}{\omega} \cos(k_x x) \sin(k_y y - \omega t) \end{aligned}$$

On pourra s'assurer que ces deux expressions sont compatibles avec les relations (57).

Propagation de l'énergie

Compte tenu des expressions (55) et (57), le vecteur de Poynting vaut, en tout point M situé entre les plaques :

$$\begin{aligned}\vec{\Pi}(M, t) &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t) = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} -E_z B_y \\ E_z B_x \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \Pi_x(M, t) \vec{e}_x + \Pi_y(M, t) \vec{e}_y\end{aligned}$$

Ses composantes non nulles s'écrivent alors, en posant $\phi \hat{=} k_y y - \omega t$:

$$\begin{aligned}\Pi_x(M, t) &= -\frac{1}{\mu_0} E_z B_y = \frac{E_0^2 k_x}{\mu_0 \omega} \times \sin(k_x x) \cos \phi \times \cos(k_x x) \sin \phi \\ &= \frac{E_0^2 k_x}{4\mu_0 \omega} \sin(2k_x x) \sin(2\phi)\end{aligned}$$

et :

$$\Pi_y(M, t) = \frac{1}{\mu_0} E_z B_x = \frac{E_0^2 k_y}{\mu_0 \omega} \sin^2(k_x x) \cos^2 \phi$$

Or, compte tenu des valeurs moyennes, sur une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$\langle \sin(2\phi) \rangle = 0 \text{ et } \langle \cos^2 \phi \rangle = \frac{1}{2}$$

il s'ensuit que :

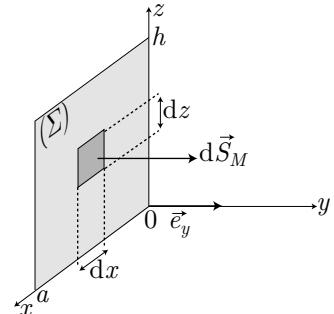
$$\langle \Pi_x \rangle_M = 0 \text{ et } \langle \Pi_y \rangle_M = \frac{E_0^2 k_y}{2\mu_0 \omega} \sin^2(k_x x)$$

Ainsi, la valeur moyenne, sur une période, du vecteur de Poynting, vaut :

$$\begin{aligned}\langle \vec{\Pi} \rangle_M &= \langle \Pi_x \rangle_M \vec{e}_x + \langle \Pi_y \rangle_M \vec{e}_y \\ &\Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle_M = \frac{E_0^2 k_y}{2\mu_0 \omega} \sin^2(k_x x) \vec{e}_y\end{aligned}\tag{58}$$

Cette expression prouve la propagation de l'énergie entre les plaques, dans la direction de \vec{e}_y .

Considérons alors une surface (Σ) comprise entre les plaques, de largeur a , de longueur h , située dans un plan $y = \text{cte}$. En notant $d\vec{S}_M = dx dz \vec{e}_y$ un élément de surface de (Σ) , centré sur M , la puissance instantanée $\mathcal{P}(t)$ qui traverse (Σ) à un instant t est liée au vecteur de Poynting :



$$\mathcal{P}(t) = \iint_{(\Sigma)} \vec{\Pi}(M, t) \cdot d\vec{S}_M \Rightarrow \langle \mathcal{P} \rangle = \iint_{(\Sigma)} \langle \vec{\Pi} \rangle_M \cdot d\vec{S}_M$$

soit, compte tenu de l'expression (58) :

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{P} \rangle &= \int_{x=0}^a \int_{z=0}^h \frac{E_0^2 k_y}{2\mu_0 \omega} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) dx dz = \frac{E_0^2 k_y h}{2\mu_0 \omega} \underbrace{\int_0^a \sin^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) dx}_{=a/2} \\ \Rightarrow \langle \mathcal{P} \rangle &= \frac{E_0^2 k_y h a}{4\mu_0 \omega}\end{aligned}$$

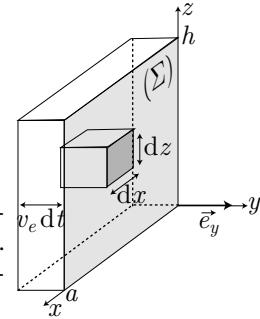
Quant à la densité volumique d'énergie électromagnétique, elle vaut à toute date t et en tout point M situé entre les plaques :

$$\begin{aligned}u_{em}(M, t) &= \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\varepsilon_0 E_z^2}{2} + \frac{1}{2\mu_0} (B_x^2 + B_y^2) \\ &= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \sin^2(k_x x) \cos^2 \phi \\ &\quad + \frac{E_0^2}{2\mu_0 \omega^2} [k_y^2 \sin^2(k_x x) \cos^2 \phi + k_x^2 \cos^2(k_x x) \sin^2 \phi]\end{aligned}$$

Puisque $\langle \sin^2 \phi \rangle = \frac{1}{2}$ et $\langle \cos^2 \phi \rangle = \frac{1}{2}$, la valeur moyenne de u_{em} sur une période a pour expression :

$$\begin{aligned}\langle u_{em} \rangle_M &= \frac{E_0^2}{4} \left(\varepsilon_0 + \frac{k_y^2}{\mu_0 \omega^2} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) \\ &\quad + \frac{E_0^2 k_x^2}{4\mu_0 \omega^2} \cos^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right)\end{aligned}$$

Considérons alors un parallélépipède rectangle \mathfrak{P} de section (Σ) , d'épaisseur $v_e dt$ et donc de volume $V = h a v_e dt$. L'énergie électromagnétique contenue à l'intérieur de ce volume vaut, à toute date t :



$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_{em}(t) &= \iiint_{(V)} u_{em}(P, t) d\tau_P = \int_{x=0}^a \int_{z=0}^h u_{em}(P, t) v_e dt dx dz \\ \Rightarrow \langle \mathfrak{E}_{em} \rangle &= v_e dt \int_{x=0}^a \int_{z=0}^h \langle u_{em} \rangle_P dx dz = v_e dt h \int_{x=0}^a \langle u_{em} \rangle_P dx\end{aligned}$$

où les intégrales :

$$\int_0^a \sin^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) dx = \frac{a}{2} \text{ et } \int_0^a \cos^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) dx = \frac{a}{2}$$

conduisent à :

$$\langle \mathfrak{E}_{em} \rangle = \frac{v_e dt h a E_0^2}{8} \left(\varepsilon_0 + \frac{k_y^2}{\mu_0 \omega^2} + \frac{k_x^2}{\mu_0 \omega^2} \right)$$

avec :

$$k_x^2 + k_y^2 = k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow \langle \mathfrak{E}_{em} \rangle = \frac{v_e dt h a E_0^2}{4\mu_0 c^2} \text{ car } \varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$$

Par conséquent, si l'énergie se propage dans la direction de \vec{e}_y , l'énergie moyenne $\langle \mathfrak{E}_{em} \rangle$ contenue dans \mathfrak{P} traverse (Σ) pendant dt , ce qui se traduit par :

$$\langle \mathfrak{E}_{em} \rangle = \langle \mathcal{P} \rangle dt \Rightarrow \frac{v_e dt h a E_0^2}{4\mu_0 c^2} = \frac{E_0^2 k_y h a dt}{4\mu_0 \omega} \Rightarrow v_e = \frac{c^2 k_y}{\omega} = \frac{c^2}{v_\phi}$$

car $v_\phi \hat{=} \frac{\omega}{k_y}$. L'expression de la vitesse de groupe :

$$v_g = \frac{c^2}{v_\phi} \Rightarrow v_e = v_g$$

montre finalement que l'énergie se propage avec la vitesse de groupe.

3.6.5 Rayonnement d'un dipôle oscillant

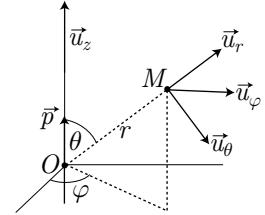
Champ électromagnétique

Soit O un point de l'espace où se trouve un dipôle électrique de moment :

$$\vec{p}(t) = p_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z = p(t) \vec{u}_z$$

dont l'image complexe sera notée :

$$\underline{\vec{p}}(t) = \underline{p}(t) \vec{u}_z \text{ avec } \underline{p}(t) = p_0 e^{-i\omega t} \Rightarrow p(t) = \text{Re} \{ \underline{p}(t) \}$$



On admettra que ce dipôle produit, en un point M situé à une distance r , un potentiel vecteur retardé :

$$\underline{\vec{A}}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left. \frac{d\vec{p}}{dt} \right|_{t-\frac{r}{c}} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left. \frac{dp}{dt} \right|_{t-\frac{r}{c}} \vec{u}_z$$

où :

$$\left. \frac{dp}{dt} \right|_t = -i\omega p_0 e^{-i\omega t} \Rightarrow \underline{\vec{A}}(M, t) = -\frac{\mu_0 i \omega p_0}{4\pi r} e^{-i\omega t} e^{ikr} \text{ avec } k \hat{=} \frac{\omega}{c}$$

On définit alors une fonction complexe $\underline{F}(t) = -\frac{i\omega \mu_0 p_0}{4\pi} e^{-i\omega t}$ de manière à pouvoir poser :

$$\underline{\vec{A}}(M, t) = \underline{F}(t) \frac{e^{ikr}}{r} \vec{u}_z$$

Ce potentiel vecteur est à l'origine d'un champ magnétique d'image complexe :

$$\begin{aligned} \underline{\vec{B}}(M, t) &= \vec{\text{rot}} \underline{\vec{A}}(M, t) = \underline{F}(t) \vec{\text{rot}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \vec{u}_z \right) \\ &= \underline{F}(t) \left[\frac{e^{ikr}}{r} \vec{\text{rot}} \vec{u}_z + \vec{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \wedge \vec{u}_z \right] \end{aligned}$$

avec $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}_z = \vec{0}$ et :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) &= \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \vec{u}_r = e^{ikr} \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right) \vec{u}_r \\ \Rightarrow \vec{B}(M, t) &= \underline{F}(t) \frac{e^{ikr}}{r^2} (ikr - 1) \vec{u}_r \wedge \vec{u}_z \text{ où } \vec{u}_r \wedge \vec{u}_z = -\sin \theta \vec{u}_\varphi \\ \Rightarrow \vec{B}(M, t) &= \underline{F}(t) \frac{e^{ikr}}{r^2} (1 - ikr) \sin \theta \vec{u}_\varphi \end{aligned} \quad (59)$$

Dans le vide, l'équation de Maxwell-Ampère permet de déduire l'expression du champ électrique :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \underline{B}) \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \underline{B}) \vec{u}_\theta \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\underline{F}(t) \frac{e^{ikr}}{r^2} (1 - ikr) \sin^2 \theta \right] \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\underline{F}(t) e^{ikr} \left(\frac{1}{r} - ik \right) \sin \theta \right] \vec{u}_\theta \\ &= 2\underline{F}(t) \frac{e^{ikr}}{r^3} (1 - ikr) \cos \theta \vec{u}_r + \underline{F}(t) \frac{e^{ikr}}{r^3} (1 - ikr - k^2 r^2) \sin \theta \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

L'expression de $\underline{F}(t)$ fournit, en outre :

$$c^2 \underline{F}(t) = -i\omega c^2 \frac{\mu_0 p_0}{4\pi} e^{-i\omega t} = -\frac{i\omega}{4\pi \varepsilon_0} \underline{p} \text{ car } \mu_0 c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}$$

Les composantes radiale et orthoradiale de \vec{E} vérifient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{E}_r}{\partial t} &= -\frac{i\omega}{4\pi \varepsilon_0} p_0 e^{-i\omega t} \times \frac{2 \cos \theta}{r^3} e^{ikr} (1 - ikr) \\ \Rightarrow \underline{E}_r &= \frac{\underline{p}}{4\pi \varepsilon_0} \times \frac{2 \cos \theta}{r^3} e^{ikr} (1 - ikr) \end{aligned} \quad (60)$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{E}_\theta}{\partial t} &= -\frac{i\omega}{4\pi \varepsilon_0} p_0 e^{-i\omega t} \times \frac{\sin \theta}{r^3} e^{ikr} (1 - ikr - k^2 r^2) \\ \Rightarrow \underline{E}_\theta &= \frac{\underline{p}}{4\pi \varepsilon_0} \times \frac{\sin \theta}{r^3} e^{ikr} (1 - ikr - k^2 r^2) \end{aligned} \quad (61)$$

Remarque : Dans le cadre de l'A.R.Q.S., ω est assez faible pour que l'on puisse poser :

$$kr = \omega \frac{r}{c} \ll 1 \Rightarrow \underline{E}_r \sim \frac{\underline{p}}{4\pi \varepsilon_0} \times \frac{2 \cos \theta}{r^3} \text{ et } \underline{E}_\theta \sim \frac{\underline{p}}{4\pi \varepsilon_0} \times \frac{\sin \theta}{r^3}$$

Ces expressions sont aussi celles des composantes du champ électrique produit par un dipôle électrostatique (cf. cours de première année).

Zone de rayonnement

En explicitant :

$$\underline{E}(t) = -i\omega \frac{\mu_0 p_0}{4\pi} e^{-i\omega t} \text{ et } \underline{p} = p_0 e^{-i\omega t}$$

les expressions (59), (60) et (61) :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \underline{B}_\varphi \vec{u}_\varphi / \underline{B}_\varphi = -i\omega \frac{\mu_0 p_0}{4\pi} \times \frac{1 - ikr}{r^2} \sin \theta e^{i(kr - \omega t)} \\ \underline{E}_r &= \frac{2p_0}{4\pi \epsilon_0} \times \frac{1 - ikr}{r^3} \cos \theta e^{i(kr - \omega t)} \\ \underline{E}_\theta &= \frac{p_0}{4\pi \epsilon_0} \times \frac{1 - ikr - k^2 r^2}{r^3} \sin \theta e^{i(kr - \omega t)} \end{aligned}$$

montrent que les champs \vec{E} et \vec{B} se propagent selon un mode sinusoïdal de longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.

Définition 15. On appelle **zone de rayonnement** l'ensemble des points de l'espace assez éloignés de la source O pour que $r \gg \lambda$.

Dans la zone de rayonnement, on trouve donc :

$$kr = 2\pi \frac{r}{\lambda} \gg 1$$

ce qui permet de simplifier les expressions de \underline{B}_φ , \underline{E}_r et \underline{E}_θ :

$$\begin{aligned} \underline{B}_\varphi &\sim -\frac{\mu_0 p_0}{4\pi} \frac{\omega k}{r} \sin \theta e^{i(kr - \omega t)} \text{ avec } k = \frac{\omega}{c} \\ \Rightarrow \quad \vec{B} &\simeq -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi c} \times \frac{\sin \theta}{r} e^{i(kr - \omega t)} \vec{u}_\varphi \\ \underline{E}_r &\sim -\frac{2p_0}{4\pi \epsilon_0} \times \frac{ikr}{r^3} \cos \theta e^{i(kr - \omega t)} \\ \underline{E}_\theta &\sim -\frac{p_0}{4\pi \epsilon_0} \frac{k^2 r^2}{r^3} \sin \theta e^{i(kr - \omega t)} \end{aligned} \quad (62)$$

Notamment, en remarquant que :

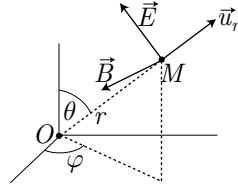
$$\left| \frac{\underline{E}_\theta}{\underline{E}_r} \right| = kr \times \frac{\sin \theta}{2 \cos \theta} \gg 1 \text{ si } \theta \neq \pm \frac{\pi}{2}$$

il est possible de négliger \underline{E}_r dans l'expression du champ électrique :

$$\begin{aligned} \underline{E}_\theta &\simeq -\frac{p_0 \omega^2}{4\pi \epsilon_0 c^2} \times \frac{\sin \theta}{r} e^{i(kr - \omega t)} \text{ où } \epsilon_0 c^2 = \frac{1}{\mu_0} \\ \Rightarrow \quad \vec{E} &\simeq \underline{E}_\theta \vec{u}_\theta = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi} \times \frac{\sin \theta}{r} e^{i(kr - \omega t)} \vec{u}_\theta \end{aligned} \quad (63)$$

D'une part les expressions (62) et (63) montrent que les champs électrique et magnétique sont orthogonaux et d'autre part, en notant $\vec{k} = k \vec{u}_r$:

$$\begin{aligned}
 \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} &= -\frac{\mu_0 k \omega^2 p_0}{4\pi} \times \frac{\sin \theta}{r} e^{i(kr - \omega t)} \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta \\
 &\text{avec } \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{u}_\varphi \text{ et } k = \frac{\omega}{c} \\
 &= -\frac{\mu_0 \omega^3 p_0}{4\pi c} \times \frac{\sin \theta}{r} e^{i(kr - \omega t)} \vec{u}_\varphi \Rightarrow \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \omega \underline{\vec{B}}
 \end{aligned}$$



ce qui montre que, localement l'onde présente une structure plane.

Propagation de l'énergie

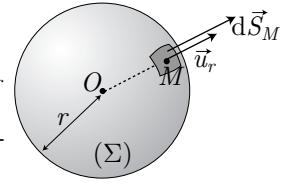
Soit M un point de la zone de rayonnement, où les champs électriques et magnétiques sont donnés par :

$$\begin{cases} \vec{E}(M, t) = \vec{E} = \operatorname{Re} \{ \underline{\vec{E}} \} = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi} \times \frac{\sin \theta}{r} \cos(kr - \omega t) \vec{u}_\theta \\ \vec{B}(M, t) = \vec{B} = \operatorname{Re} \{ \underline{\vec{B}} \} = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi c} \times \frac{\sin \theta}{r} \cos(kr - \omega t) \vec{u}_\varphi \end{cases}$$

Le vecteur de Poynting s'y exprime donc par :

$$\vec{\Pi}(M, t) \hat{=} \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{16\pi^2 c} \times \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \cos^2(kr - \omega t) \vec{u}_r$$

Calculons alors la puissance qui traverse une surface sphérique de rayon r , à la date t :



$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(t) &= \iint_{(\Sigma)} \vec{\Pi}(M, t) \cdot d\vec{S}_M \text{ où } d\vec{S}_M = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{u}_r \\
 &= \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{16\pi^2 c} \cos^2(kr - \omega t) \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \\
 &= \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{8\pi c} \cos^2(kr - \omega t) \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta
 \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta &= \int_0^{\pi} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta = \left[-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{4}{3} \\
 \Rightarrow \mathcal{P}(t) &= \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{6\pi c} \cos^2(kr - \omega t)
 \end{aligned}$$

La valeur moyenne de \mathcal{P} sur une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ vaut alors :

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{12\pi c} \text{ car } \langle \cos^2(kr - \omega t) \rangle = \frac{1}{2}$$

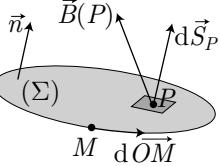
3.7 Compléments de magnétostatique

3.7.1 Théorème d'Ampère

En magnétostatique, l'équation de Maxwell-Ampère se simplifie :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Considérons un parcours fermé (Γ) délimitant une surface orientée (Σ) : les doigts de la main droite tournant dans le sens du parcours (Γ) , le pouce tendu donne le sens et la direction d'un vecteur \vec{n} qui servira à orienter les surfaces élémentaires $d\vec{S}_P$ en chaque point P .



La circulation de \vec{B} le long de (Γ) est alors définie par :

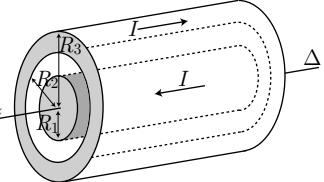
$$\begin{aligned} \mathcal{C}_B &\equiv \oint_{(\Gamma)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{OM} = \iint_{(\Sigma)} \vec{\text{rot}} \vec{B}(P) \cdot d\vec{S}_P \\ &= \mu_0 \iint_{(\Sigma)} \vec{j}(P) \cdot d\vec{S}_P \Rightarrow \mathcal{C}_B = \mu_0 I_{\text{int}} \end{aligned}$$

où I_{int} représente l'intensité du courant qui traverse (Σ) ; cette intensité est algébrique : elle est comptée positivement dans le sens indiqué par le vecteur \vec{n} .

EXEMPLE

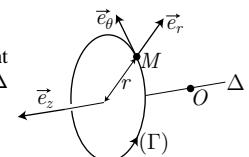
Calculons le champ magnétique produit dans l'espace par un câble coaxial cylindrique. Le câble est composé :

- d'un cœur métallique (cylindre de rayon R_1), parcouru par un courant constant et uniforme d'intensité I ;
- d'une gaine métallique (cylindre évidé de rayons R_2 et R_3 $(R_3 > R_2)$) coaxiale, parcourue par un courant de même intensité I mais de sens opposé.



Soit (Γ) un parcours circulaire, de rayon r , de même axe Δ que le câble, sur lequel peut être défini un déplacement élémentaire : $d\vec{OM} = r d\theta \vec{e}_\theta$.

Compte tenu de la distribution des courants, le champ magnétique en un point M de (Γ) ne dépend que de r et est orthoradial, car le plan passant par M et Δ est un plan de symétrie pour le courant :



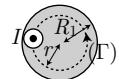
$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\theta$$

Par suite, la circulation de \vec{B} le long de (Γ) est définie par :

$$\mathcal{C}_B \equiv \oint_{(\Gamma)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{OM} = \oint_{(\Gamma)} B(r) \times r d\theta = 2\pi r B(r)$$

- Pour $r < R_1$, (Γ) circonscrit une surface (Σ) circulaire de rayon r et donc d'aire $S_1 = \pi r^2$. La densité surfacique de courant qui traverse S_1 vaut :

$$j = \frac{I_{\text{int}}}{\pi r^2}$$



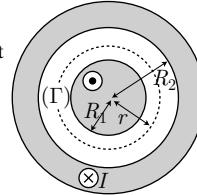
où I_{int} désigne le courant qui traverse (Σ) .

En revanche, la section πR_1^2 du cœur est traversée par un courant d'intensité I et donc de densité :

$$j = \frac{I}{\pi R_1^2} \Rightarrow \frac{I_{\text{int}}}{\pi r^2} = \frac{I}{\pi R_1^2} \Rightarrow I_{\text{int}} = \frac{I r^2}{R_1^2}$$

Le théorème d'Ampère indique alors que :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_B = \mu_0 I_{\text{int}} &\Rightarrow 2\pi r B(r) = \mu_0 \frac{I r^2}{R_1^2} \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2} r \\ &\Rightarrow \vec{B}(r > R_1) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2} \vec{e}_\theta \end{aligned}$$



- Pour $R_1 < r < R_2$, le courant qui traverse la surface circonscrite par (Γ) est aussi celui qui circule dans le conducteur de cœur ; son intensité vaut :

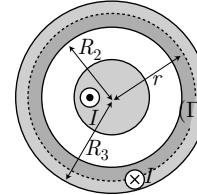
$$I_{\text{int}} = I \Rightarrow 2\pi r B(r) = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B}(R_1 < r < R_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

- Pour $R_2 < r < R_3$, la surface circonscrite par (Γ) est traversée par des courants de sens contraires :
 - celui, d'intensité I , qui circule dans le conducteur central ;
 - celui, de densité j , qui circule dans une fraction du conducteur extérieur, laquelle fraction a pour aire :

$$S_2 = \pi r^2 - \pi R_2^2$$

auquel cas ce courant a pour intensité :

$$I' = j S_2 = j \pi (r^2 - R_2^2)$$



alors que son intensité vaut I à travers la section d'aire $\pi (R_3^2 - R_2^2)$ du conducteur externe :

$$j = \frac{I}{\pi (R_3^2 - R_2^2)} \Rightarrow I' = I \times \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

Par conséquent, la surface circonscrite par (Γ) est traversée dans le sens de \vec{e}_z par un courant d'intensité :

$$I_{\text{int}} = I - I' = I \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right) = I \times \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

Le théorème d'Ampère indique alors que :

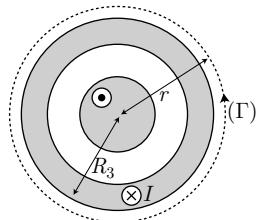
$$B(r) \times 2\pi r = \mu_0 I \times \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \Rightarrow \vec{B}(R_2 < r < R_3) = \mu_0 I \times \frac{R_3^2 - r^2}{2\pi r (R_3^2 - R_2^2)} \vec{e}_\theta$$

- Lorsque $r > R_3$, la surface circonscrite par (Γ) est traversée par les courants, de sens opposés, qui circulent à travers les deux conducteurs :

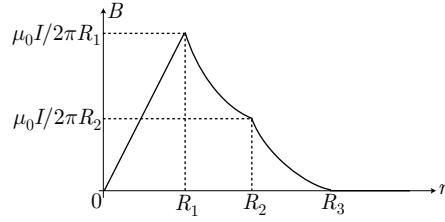
$$I_{\text{int}} = I - I' = 0$$

Le théorème d'Ampère devient :

$$B(r) \times 2\pi r = \mu_0 I_{\text{int}} = 0 \Rightarrow \vec{B}(r > R_3) = \vec{0}$$



Les expressions ainsi obtenues montrent la continuité de $\vec{B}(r)$ (du reste associée à l'absence de courant surfacique), dont la norme a pour représentation graphique :



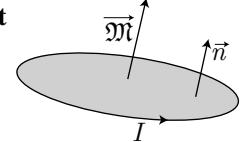
3.7.2 Dipôle magnétique

Potentiel et champ créés

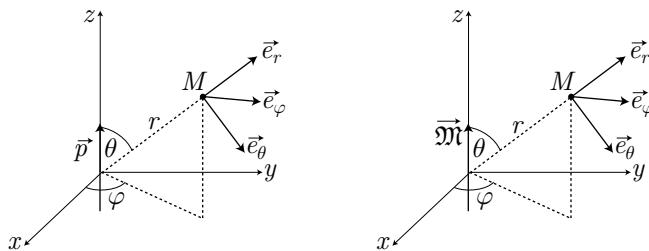
Définition 16. Soit une boucle de courant (Γ) plane, infinitésimale, parcourue par un courant d'intensité I et orientée à l'aide d'un vecteur unitaire \vec{n} (par la règle de la main droite).

Une telle boucle constitue un **dipôle magnétique** et son **moment magnétique** est défini par :

$$\vec{\mathfrak{M}} \doteq IS\vec{n}$$



Soit M un point de l'espace repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) d'un repère à l'origine O duquel se trouve un dipôle (électrique de moment \vec{p} ou magnétique de moment $\vec{\mathfrak{M}}$).



On admettra que le potentiel vecteur $\vec{A}(M)$ créé par $\vec{\mathfrak{M}}$ au point M est analogue au potentiel scalaire $V(M)$ créé en M par \vec{p} :

$$\begin{aligned} \text{dipôle électrique : } V(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{r^2} \\ \text{dipôle magnétique : } \vec{E}(M) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{\vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{e}_r}{r^2} \end{aligned}$$

Le champ magnétique $\vec{B}(M) = B_r \vec{e}_r + B_\theta \vec{e}_\theta + B_\varphi \vec{e}_\varphi$ s'en déduit à l'aide des composantes de \vec{A} :

$$\vec{A} = \vec{A}(M) = \frac{\mu_0 \vec{\mathfrak{M}}}{4\pi} \times \frac{\sin \theta}{r^2} \vec{e}_\varphi = A_\varphi \vec{e}_\varphi$$

et de la relation :

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\varphi \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_\varphi) \vec{e}_\theta \text{ car } A_\theta = 0 \text{ et } A_r = 0\end{aligned}$$

Le champ \vec{B} a donc deux composantes non nulles :

$$B_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\mu_0 \mathfrak{M}}{4\pi} \times \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right] \Rightarrow B_r = \frac{\mu_0 \mathfrak{M}}{4\pi} \times \frac{2 \cos \theta}{r^3} \quad (64)$$

et :

$$B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\mu_0 \mathfrak{M}}{4\pi} \times \frac{\sin \theta}{r} \right] \Rightarrow B_\theta = \frac{\mu_0 \mathfrak{M}}{4\pi} \times \frac{\sin \theta}{r^3} \quad (65)$$

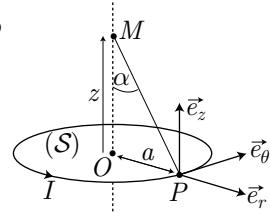
dont on remarque l'analogie avec les composantes du champ électrique $\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta$ produit par \vec{p} en M :

$$E_r = \frac{p}{4\pi \varepsilon_0} \times \frac{2 \cos \theta}{r^3} \text{ et } E_\theta = \frac{p}{4\pi \varepsilon_0} \times \frac{\sin \theta}{r^3}$$

Champ produit par une spire circulaire

Soit (\mathcal{S}) une spire circulaire plane parcourue par un courant d'intensité I , le long de laquelle un point P décrit un déplacement élémentaire $d\vec{OP} = a d\theta \vec{e}_\theta$, à l'origine d'un champ magnétique en un point M de l'axe de (\mathcal{S}) :

$$\begin{aligned}\delta \vec{B}(M) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{OP} \wedge \vec{PM}}{PM^3} \\ \Rightarrow \vec{B}(M) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{(\mathcal{S})} \frac{d\vec{OP} \wedge \vec{PM}}{PM^3}\end{aligned}$$



où $PM = \sqrt{a^2 + z^2}$ tandis que $\vec{B}(M)$ est colinéaire à \vec{e}_z (l'axe OM est l'intersection des plans d'antisymétrie de (\mathcal{S})) :

$$\begin{aligned}\vec{B}(M) = B \vec{e}_z \Rightarrow B &= \vec{e}_z \cdot \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{1}{PM^3} \oint_{(\mathcal{S})} \left(d\vec{OP} \wedge \vec{PM} \right) \cdot \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{1}{PM^3} \oint_{(\mathcal{S})} \left(\vec{PM} \wedge \vec{e}_z \right) \cdot d\vec{OP}\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\vec{PM} \wedge \vec{e}_z &= PM \sin \alpha \vec{e}_\theta = a \vec{e}_\theta \\ \Rightarrow B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{1}{PM^3} \int_{\theta=0}^{2\pi} (a \vec{e}_\theta) \cdot (a d\theta \vec{e}_\theta) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{a^2}{PM^3} \times 2\pi \\ \Rightarrow \vec{B}(M) &= \frac{\mu_0 I a^2}{2 PM^3} \vec{e}_z\end{aligned} \quad (66)$$

À grande distance de O , c'est-à-dire lorsque $z \gg a$ permet de poser :

$$PM = \sqrt{a^2 + z^2} \simeq z = r$$

la spire (\mathcal{S}) est assimilable à un dipôle magnétique de moment :

$$\vec{\mathfrak{M}} = IS \vec{e}_z = I \times \pi a^2 \vec{e}_z$$

qui produit en M un champ magnétique dont les composantes sont données par les expressions (64) et (65), dans lesquelles :

$$\begin{cases} \mathfrak{M} = \pi a^2 I \\ \theta = 0 \\ \vec{e}_r = \vec{e}_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_r = \frac{\mu_0 \pi a^2 I}{4\pi} \times \frac{2}{r^3} = \frac{\mu_0 a^2 I}{2r^3} \\ B_\theta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 a^2 I}{2r^3} \vec{e}_r$$

Cette loi est compatible avec l'expression (66) pour laquelle :

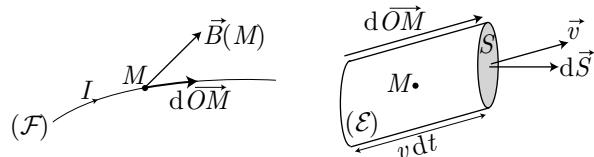
$$\begin{cases} \vec{e}_z = \vec{e}_r \\ PM \simeq r \end{cases} \Rightarrow \vec{B}(M) \simeq \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3} \vec{e}_r$$

3.7.3 Action d'un champ magnétique sur un dipôle

Force de Laplace

Considérons un fil électrique (\mathcal{F}) dans lequel circule un courant d'intensité I , plongé dans une région où règne un champ magnétique \vec{B} .

Supposons que tous les porteurs de charge mobiles possèdent la même vitesse \vec{v} et isolons, dans (\mathcal{F}), un élément cylindrique (\mathcal{E}) au voisinage d'un point M de (\mathcal{F}).



Pendant une durée dt , seule la charge δq contenue dans (\mathcal{E}) participe au courant $I = \frac{\delta q}{dt}$, en conséquence de quoi (\mathcal{E}) est soumis à la force de Lorentz :

$$\delta \vec{F}(M) = \delta q \vec{v}(M) \wedge \vec{B}(M) = I dt \vec{v}(M) \wedge \vec{B}(M)$$

où $\vec{v}(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Rightarrow \vec{v}(M) dt = d\vec{OM}$ conduit finalement à l'expression de la **force de Laplace** qui s'exerce sur l'élément (\mathcal{E}) caractérisé par $d\vec{OM}$:

$$\delta \vec{F}(M) = I(M) d\vec{OM} \wedge \vec{B}(M)$$

Remarque : En définissant par $\rho_m = \frac{\delta q}{d\tau_M}$ la densité volumique des porteurs de charge mobiles, présents dans le volume $d\tau_M$ de (\mathcal{E}) , on définit la **densité volumique de force de Laplace** par :

$$\vec{F}_v(M) \hat{=} \frac{\delta \vec{F}(M)}{d\tau_M} = \frac{\delta q}{d\tau_M} \vec{v}(M) \wedge \vec{B}(M) = \rho_m(M) \vec{v}(M) \wedge \vec{B}(M)$$

où l'on reconnaît la définition de la densité de courant $\vec{j} = \rho \vec{v}$:

$$\vec{F}_v(M) = \vec{j}(M) \wedge \vec{B}(M)$$

Résultante des forces de Laplace

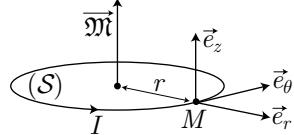
Un dipôle magnétique est matérialisé par une spire plane (\mathcal{S}) parcourue par un courant d'intensité I .

Un élément $d\vec{OM}$ de (\mathcal{S}) , situé dans un champ magnétique $\vec{B}(M)$, est alors soumis à une force de Laplace :

$$\delta \vec{F}(M) = I d\vec{OM} \wedge \vec{B}(M)$$

dont la résultante vaut :

$$\vec{F} \hat{=} \oint_{(\mathcal{S})} I d\vec{OM} \wedge \vec{B}(M) \quad (67)$$



Si le champ magnétique est uniforme : $\vec{B}(M) = \vec{B}$, cette résultante devient :

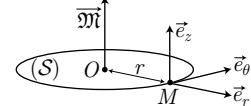
$$\vec{F} = I \left(\oint_{(\mathcal{S})} d\vec{OM} \right) \wedge \vec{B} = \vec{0} \text{ car } \oint_{(\mathcal{S})} d\vec{OM} = \vec{0}$$

Si le champ magnétique est non uniforme, la résultante \vec{F} n'est pas nécessairement nulle.

EXEMPLE

Considérons une région de l'espace dans laquelle règne un champ magnétique $\vec{B} = B_r \vec{e}_r + B_\theta \vec{e}_\theta + B_z \vec{e}_z$, dont les composantes s'écrivent, en coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} B_r = \alpha r \\ B_\theta = 0 \\ B_z = B_0 - 2\alpha z \end{cases} \quad \text{où } \alpha \text{ et } B_0 \text{ sont des constantes.}$$



On peut s'assurer qu'un tel champ vérifie l'équation : $\text{div } \vec{E} = 0$, avec :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Soit M un point d'une spire circulaire plane, de rayon r , de centre O , parcourue par un courant d'intensité I et donc de moment magnétique $\vec{M} = \pi r^2 I \vec{e}_z$. Un déplacement élémentaire de M sur (\mathcal{S}) s'écrivant : $d\vec{OM} = r d\theta \vec{e}_\theta$, il s'ensuit que :

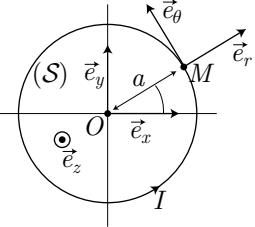
$$d\vec{OM} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ r d\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha r \\ 0 \\ B_0 - 2\alpha z \end{pmatrix} = r (B_0 - 2\alpha z) d\theta \vec{e}_r - \alpha r^2 d\theta \vec{e}_z$$

Par suite, le dipôle magnétique constitué par (\mathcal{S}) est soumis à la résultante (67) :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= Ir (B_0 - 2\alpha z) \int_0^{2\pi} \vec{e}_r \, d\theta - I\alpha r^2 \vec{e}_z \int_0^{2\pi} \, d\theta \\ &= -2\pi\alpha Ir^2 \vec{e}_z \text{ car } \int_0^{2\pi} \vec{e}_r \, d\theta = \vec{0} \\ \Rightarrow \vec{F} &= -2\alpha \vec{\mathfrak{M}} \neq \vec{0}\end{aligned}$$

Moment des forces de Laplace

Considérons à nouveau un dipôle magnétique matérialisé par une spire plane circulaire (\mathcal{S}) de centre O , de rayon a , parcourue par un courant d'intensité I . Chaque point de (\mathcal{S}) est repéré par ses coordonnées polaires (a, θ) :



$$\overrightarrow{OM} = a \vec{e}_r \Rightarrow d\overrightarrow{OM} = a d\theta \vec{e}_\theta = -a d\theta \sin \theta \vec{e}_x + a d\theta \cos \theta \vec{e}_y \quad (68)$$

Enfin, ce dipôle, caractérisé par un moment magnétique :

$$\vec{\mathfrak{M}} = I \times \pi a^2 \vec{e}_z \quad (69)$$

est soumis à un champ magnétique que l'on supposera uniforme :

$$\vec{B} = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z \quad (70)$$

Sous l'effet de ce champ, chaque point M de (\mathcal{S}) est soumis à une force de Laplace :

$$\delta \vec{F}_L(M) = I d\overrightarrow{OM} \wedge \vec{B}$$

de moment en O :

$$\begin{aligned}\delta \vec{\mathcal{M}}_O &\cong \overrightarrow{OM} \wedge \delta \vec{F}_L(M) = I \overrightarrow{OM} \wedge (d\overrightarrow{OM} \wedge \vec{B}) \\ &= I (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{B}) \times d\overrightarrow{OM} - I \vec{B} \times (\overrightarrow{OM} \cdot d\overrightarrow{OM})\end{aligned}$$

Le moment résultant vaut alors :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = I \oint_{(\mathcal{S})} (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{B}) d\overrightarrow{OM} - I \vec{B} \oint_{(\mathcal{S})} \overrightarrow{OM} \cdot d\overrightarrow{OM}$$

où :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} \cdot d\overrightarrow{OM} &= d\left(\frac{OM^2}{2}\right) \Rightarrow \oint_{(\mathcal{S})} \overrightarrow{OM} \cdot d\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \oint_{(\mathcal{S})} dOM^2 = 0 \\ \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_O &= I \oint_{(\mathcal{S})} (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{B}) \times d\overrightarrow{OM} \quad (71)\end{aligned}$$

Or, les identités (68) et (70) fournissent :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} \cdot \vec{B} &= a B_x \vec{e}_r \cdot \vec{e}_x + a B_y \vec{e}_r \cdot \vec{e}_y + a B_z \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z}_{=0} \\ &= a B_x \cos \theta + a B_y \sin \theta\end{aligned}$$

d'où il découle qu'en coordonnées cartésiennes :

$$(\overrightarrow{OM} \cdot \vec{B}) \times d\overrightarrow{OM} = a^2 d\theta \begin{pmatrix} -B_x \sin \theta \cos \theta - B_y \sin^2 \theta \\ B_x \cos^2 \theta + B_y \cos \theta \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

En remarquant que :

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = 0 \text{ et } \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi$$

la relation (71) devient :

$$\vec{M}_O = Ia^2 \begin{pmatrix} -\pi B_y \\ \pi B_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi a^2 I B_y \\ \pi a^2 I B_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quant à l'expression (69), elle conduit à :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi a^2 I \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi a^2 I B_y \\ \pi a^2 I B_x \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad \vec{M}_O &= \overrightarrow{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B}\end{aligned}$$

On pourra admettre le caractère général de cette relation.

Remarque : *Cette expression du moment des forces de Laplace qui s'exercent sur un dipôle magnétique est analogue à celle du moment qui s'exerce sur un dipôle électrique plongé dans un champ électrique \vec{E} :*

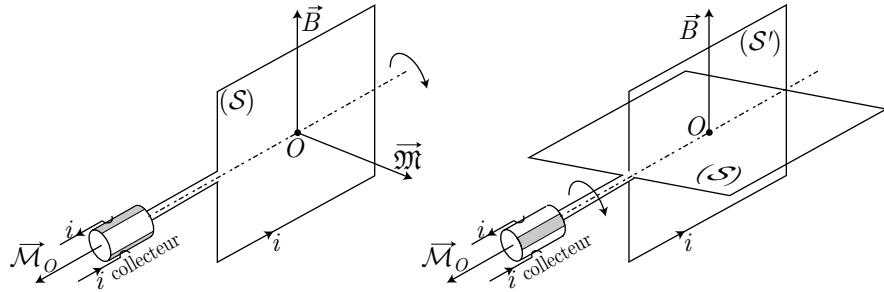
$$\vec{M}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

L'analogie précédente s'étend à l'énergie potentielle d'interaction $\mathcal{E}_{p\text{ int}}$ entre le moment d'un dipôle et le champ dans lequel il est plongé :

$$\text{Dipôle électrique : } \mathcal{E}_{p\text{ int}} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

$$\text{Dipôle magnétique : } \mathcal{E}_{p\text{ int}} = -\overrightarrow{\mathfrak{M}} \cdot \vec{B}$$

Enfin, le principe du moment $\vec{M}_O = \overrightarrow{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B}$ est appliqué dans le moteur : une spire (\mathcal{S}), parcourue par un courant i , constitue un dipôle de moment $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ plongé dans le champ magnétique \vec{B} créé par un stator. Sous l'effet de \vec{B} , un moment \vec{M}_O apparaît, qui fait tourner (\mathcal{S}) jusqu'à ce qu'un collecteur prive (\mathcal{S}') de courant, au profit d'une nouvelle spire (\mathcal{S}') :



3.8 Induction électromagnétique

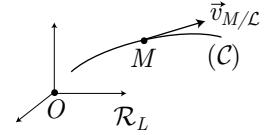
3.8.1 Force électromotrice

Intéressons-nous à un porteur \mathcal{P} mobile, de charge q , situé en un point M d'un conducteur (\mathcal{C}) et animé d'une vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{L}}$ par rapport au laboratoire.

Ce porteur est alors soumis à une force électromagnétique :

$$\vec{F} = q \vec{E}(M) + q \vec{v}_{M/\mathcal{L}} \wedge \vec{B}(M)$$

$$\text{où } \vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \left. \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right|_M.$$



Définissons alors :

- le **champ électrostatique** en M : $\vec{E}_e \hat{=} -\overrightarrow{\text{grad}} V(M)$;
- le **champ électromoteur** en M :

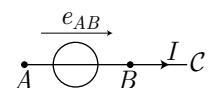
$$\vec{E}_{em} \hat{=} -\left. \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right|_{(M,t)} + \vec{v}_{M/\mathcal{L}} \wedge \vec{B}(M)$$

de manière à poser :

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_e(M) + \vec{E}_{em} = -\overrightarrow{\text{grad}} V + \vec{E}_{em}(M) \Rightarrow \vec{F} = q \vec{E}_{\text{tot}}(M) \quad (72)$$

Définition 17. On appelle **force électromotrice** (f.é.m.) entre les points A et B d'un conducteur \mathcal{C} l'intégrale :

$$e_{AB} \hat{=} \int_A^B \vec{E}_{em}(M) \cdot \overrightarrow{OM} \quad$$



Remarque : La définition de \vec{E}_{em} montre que $e_{AB} > 0$ est à l'origine de la mise en mouvement des charges positives dans le sens de \overrightarrow{AB} ; par convention, une f.é.m. positive e_{AB} sera orientée dans le même sens que le courant I qu'elle génère.

Dans un conducteur, le porteur de charge, de masse m , est soumis à la force électromagnétique $\vec{F} = q \vec{E}_{\text{tot}}(M)$ ainsi qu'à une force de frottement $\vec{F}_{\text{fr}} \hat{=} -\lambda \vec{v}_{M/\mathcal{C}}$, où

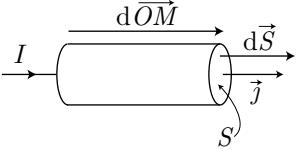
λ est une constante positive et où $\vec{v}_{M/C}$ est la vitesse du porteur dans le référentiel du conducteur. La loi fondamentale de la dynamique indique qu'il existe une vitesse limite $\vec{v}_{M/C}$ telle que :

$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{fr}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_{M/C} = \frac{q}{\lambda} \vec{E}_{\text{tot}}$$

Ainsi, dans un milieu contenant une densité volumique de n porteurs mobiles par unité de volume, la densité de courant dans le conducteur vaut :

$$\vec{j} = nq \vec{v}_{M/C} = \frac{nq^2}{\lambda} \vec{E}_{\text{tot}} = \sigma \vec{E}_{\text{tot}}$$

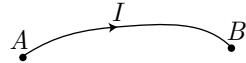
Ce faisant, dans un conducteur élémentaire de section S , parcouru par un courant d'intensité i , il est possible de calculer :



$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{tot}} \cdot d\vec{OM} &= \frac{1}{\sigma} \vec{j} \cdot d\vec{OM} = \frac{1}{\sigma} j \times dOM = \frac{1}{\sigma} \frac{i}{S} dOM \\ &= \delta R \times i \end{aligned}$$

où $\delta R = \frac{dOM}{\sigma S}$ est la résistance du conducteur élémentaire. Par conséquent, la circulation de \vec{E}_{tot} vérifie la loi d'Ohm le long d'un conducteur de résistance totale R :

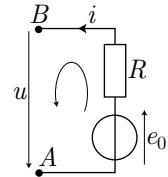
$$\int_A^B \vec{E}_{\text{tot}} \cdot d\vec{OM} = Ri$$



où le courant i est orienté de A vers B .

Considérons maintenant un circuit comportant :

- une résistance totale R ;
- une force électromotrice e_0 ;
- un courant i orienté dans le même sens que e_0 ;
- deux points A et B entre lesquels peut se mesurer la tension $u \hat{=} V_A - V_B$.



En parcourant ce circuit dans le sens défini par i , la relation (72) devient :

$$\begin{aligned} \int_A^B \vec{E}_{\text{tot}}(M) \cdot d\vec{OM} &= - \int_A^B \vec{\text{grad}} V \cdot d\vec{OM} + \int_A^B \vec{E}_{\text{em}}(M) \cdot d\vec{OM} \\ \Rightarrow Ri &= V_A - V_B + e_0 \Rightarrow Ri = u + e_0 \end{aligned} \quad (73)$$

On pourra désormais retenir cette loi sous la forme suivante :

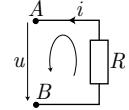
Dans un circuit, la somme des tensions et forces électromotrices rencontrées dans le sens de i vaut Ri .

Remarque : Il s'agit en fait d'une autre formulation de la loi des mailles : la somme des tensions et forces électromotrices aux bornes de tous les dipôles constituant une maille est nulle.

EXEMPLES

- Considérons un circuit comportant une unique résistance R entre les bornes A et B . La loi (73) permet alors de retrouver la loi d'Ohm :

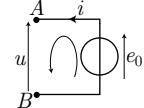
$$u = Ri$$



- Supposons qu'entre les bornes A et B se trouve une source de tension de force électromotrice e_0 . La loi (73) conduit à :

$$e_0 - u = 0 \Rightarrow u = e_0$$

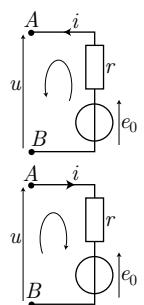
ce qui montre que la force électromotrice e_0 est aussi la tension aux bornes de la source.



- Si un générateur (de résistance interne r et de f.e.m. e_0) est placé entre les bornes A et B , la relation (73) devient :

$$ri = e_0 - u \Rightarrow u = e_0 - ri$$

ce qui correspond à la tension aux bornes du générateur.



- Enfin, considérons un récepteur (moteur, électrolyseur, ...) de **force contre-électromotrice** e_0 (e_0 est orienté en sens inverse de i). La loi (73) fournit alors :

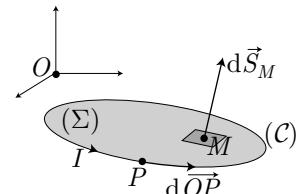
$$ri = u - e_0 \Rightarrow u = e_0 + ri$$

3.8.2 Circuit immobile dans un champ variable

Auto-induction

Soit (\mathcal{C}) un circuit dans lequel circule un courant d'intensité I , lequel courant produit, en tout point M de l'espace, un champ magnétique donné par la loi de Biot et Savart :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{(\mathcal{C})} \frac{d\vec{OP} \wedge \vec{PM}}{PM^3} \text{ où } \begin{cases} P \in (\mathcal{C}) \\ M \notin (\mathcal{C}) \end{cases}$$



Le flux de ce champ à travers la surface (Σ) circonscrite dans (\mathcal{C}) :

$$\phi_B \hat{=} \iint_{(\Sigma)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_M = I \times \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{(\Sigma)} d\vec{S}_M \cdot \oint_{(\mathcal{C})} \frac{d\vec{OP} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

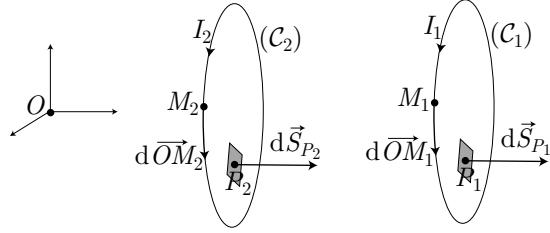
est proportionnel à I :

$$\phi_B = L \times I \quad (74)$$

Dans cette relation, L est le **coefficent d'auto-inductance** du circuit (en henry : H), qui ne dépend que de sa géométrie.

Inductance mutuelle

Soient (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) deux circuits parcourus par les courants respectifs I_1 et I_2 , qui circonscrivent les surfaces (Σ_1) et (Σ_2) .



En chaque point P_1 de (Σ_1) , le champ magnétique :

$$\vec{B}(P_1) = \vec{B}_1(P_1) + \vec{B}_2(P_1)$$

est la superposition :

- du champ produit par les points M_1 de (C_1) :

$$\vec{B}_1(P_1) = \oint_{(C_1)} \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{d\overrightarrow{OM}_1 \wedge \overrightarrow{M_1 P_1}}{M_1 P_1^3}$$

- et du champ $\vec{B}_2(P_1)$ produit par les points M_2 de (C_2) , qui dérive du potentiel vecteur :

$$\vec{A}_2(P_1) = \oint_{(C_2)} \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \frac{d\overrightarrow{OM}_2}{M_2 P_1}$$

Le flux du champ magnétique à travers (Σ_1) est alors défini par :

$$\phi_1 \hat{=} \iint_{(\Sigma_1)} \vec{B}(P_1) \cdot d\vec{S}_{P_1} = \iint_{(\Sigma_1)} \vec{B}_1(P_1) \cdot d\vec{S}_{P_1} + \iint_{(\Sigma_1)} \vec{B}_2(P_1) \cdot d\vec{S}_{P_1}$$

où :

$$\iint_{(\Sigma_1)} \vec{B}_1(P_1) \cdot d\vec{S}_{P_1} = L_1 I_1$$

conformément à la loi (74) dans laquelle L_1 est l'auto-inductance de (C_1) . En outre :

$$\begin{aligned} \iint_{(\Sigma_1)} \vec{B}_2(P_1) \cdot d\vec{S}_{P_1} &= \oint_{(C_1)} \vec{A}_2(M_1) \cdot d\overrightarrow{OM}_1 \text{ (théorème de Stokes)} \\ &= \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{(C_1)} \oint_{(C_2)} \frac{d\overrightarrow{OM}_2 \cdot d\overrightarrow{OM}_1}{M_2 M_1} \\ &= M I_2 \text{ avec } M \hat{=} \oint_{(C_1)} \oint_{(C_2)} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\overrightarrow{OM}_2 \cdot d\overrightarrow{OM}_1}{M_2 M_1} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\phi_1 = L_1 I_1 + M I_2 \quad (75)$$

De même, le flux du champ magnétique à travers (Σ_2) vaut :

$$\phi_2 \hat{=} \iint_{(\Sigma_2)} \vec{B}(P_2) \cdot d\vec{S}_{P_2} = \iint_{(\Sigma_2)} \vec{B}_1(P_2) \cdot d\vec{S}_{P_2} + \iint_{(\Sigma_2)} \vec{B}_2(P_2) \cdot d\vec{S}_{P_2}$$

où $\vec{B}_2(P_2)$ est le champ produit en P_2 par \mathcal{C}_2 , de sorte que :

$$\iint_{(\Sigma_2)} \vec{B}_2(P_2) \cdot d\vec{S}_{P_2} = L_2 I_2$$

et où $\vec{B}_1(P_2)$ désigne le champ produit en P_2 par chaque point de \mathcal{C}_1 :

$$\iint_{(\Sigma_2)} \vec{B}_1(P_2) \cdot d\vec{S}_{P_2} = \iint_{(\Sigma_2)} \text{rot } \vec{A}_1(P_2) \cdot d\vec{S}_{P_2} = \oint_{(\mathcal{C}_2)} \vec{A}_1(M_2) \cdot d\vec{OM}_2$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{A}_1(M_2) &= \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{d\vec{OM}_1}{M_1 M_2} \\ &\Rightarrow \iint_{(\Sigma_2)} \vec{B}_1(P_2) \cdot d\vec{S}_{P_2} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_2} \oint_{\mathcal{C}_\infty} \frac{d\vec{OM}_1 \cdot d\vec{OM}_2}{M_1 M_2} = M I_1 \end{aligned}$$

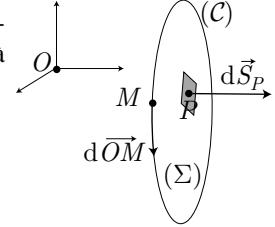
Il s'ensuit que :

$$\phi_2 = L_2 I_2 + M I_1 \quad (76)$$

Loi de Faraday

Soit (\mathcal{C}) un circuit refermé sur lui-même de manière à circonscrire une surface (Σ) . Le flux du champ magnétique à travers (Σ) est défini par :

$$\phi_B \hat{=} \iint_{(\Sigma)} \vec{B}(P, t) \cdot d\vec{S}_P = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{A}(P, t) \cdot d\vec{S}_P$$



c'est-à-dire, en tenant compte du théorème de Stockes-Ampère :

$$\phi_B(t) = \oint_{(\mathcal{C})} \vec{A}(M, t) \cdot d\vec{OM} \text{ et } \phi_B(t + dt) = \oint_{(\mathcal{C})} \vec{A}(M, t + dt) \cdot d\vec{OM}$$

Donc, pendant dt , le flux ϕ_B varie de la quantité :

$$\begin{aligned} d\phi_B \hat{=} \phi_B(t + dt) - \phi_B(t) &= \oint_{\mathcal{C}} [\vec{A}(M, t + dt) - \vec{A}(M, t)] \cdot d\vec{OM} \\ &= \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Big|_{M, t} dt \cdot d\vec{OM} \\ &\Rightarrow \frac{d\phi_B}{dt} = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Big|_{M, t} \cdot d\vec{OM} \end{aligned}$$

Quant à la force électromotrice rencontrée dans (\mathcal{C}) , elle s'écrit :

$$e_0 \hat{=} \oint_{\mathcal{C}} \vec{E}_{em}(M, t) \cdot d\vec{OM} \not\propto \vec{E}_{em}(M, t) = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Big|_{M, t} + \vec{v}_{M/\mathcal{L}} \wedge \vec{B}(M)$$

Or, le déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ est réalisé dans le référentiel de \mathcal{C} :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \hat{=} \vec{v}_{M/C} \Rightarrow d\overrightarrow{OM} = \vec{v}_{M/C} dt$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} e_0 &= - \oint_C \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Big|_{M,t} \cdot d\overrightarrow{OM} + \oint_C [\vec{v}_{M/C} \wedge \vec{B}(M)] \cdot \vec{v}_{M/C} dt \\ &= - \frac{d\phi_B}{dt} + J \end{aligned}$$

où l'on définit l'intégrale :

$$J \hat{=} \oint_C [\vec{v}_{M/C} \wedge \vec{B}(M)] \cdot \vec{v}_{M/C} dt = \oint_C (\vec{v}_{M/C} \wedge \vec{v}_{M/C}) \cdot \vec{B}(M) dt$$

Notamment, lorsque le circuit est immobile :

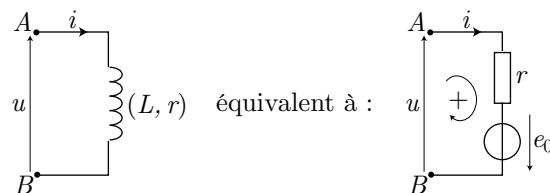
$$\vec{v}_{M/C} = \vec{v}_{M/L} \Rightarrow J = 0$$

conduit à la **loi de Faraday** :

$$e_0 = - \frac{d\phi_B}{dt}$$

Relation courant-tension d'une bobine

Soient A et B les bornes d'une bobine de résistance r et d'auto-inductance L , traversée par un courant i , sous une tension $u = V_A - V_B$.



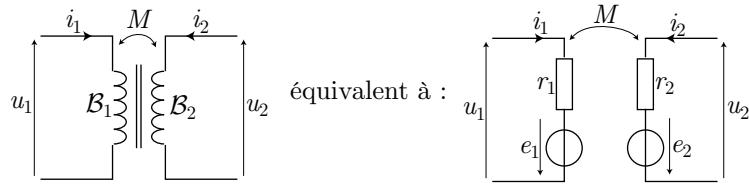
En convention récepteur, la loi (73) devient :

$$\begin{aligned} ri &= u + e_0 \text{ avec } e_0 = - \frac{d\phi_B}{dt} \text{ et } \phi_B = Li \\ &= u - L \frac{di}{dt} \Rightarrow u = ri + L \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

Bobines en interaction

Soient \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 deux bobines d'auto-inductances respectives L_1 et L_2 , de résistances r_1 , r_2 , alimentées par des tensions u_1 et u_2 , parcourues par des courants d'intensités i_1 et i_2 .

L'interaction magnétique de ces bobines est supposée caractérisée par le coefficient d'induction mutuelle M .



En convention récepteur, la loi (73) prend la forme :

$$r_1 i_1 = u_1 + e_1 \Rightarrow u_1 = r_1 i_1 - e_1$$

avec :

$$\begin{aligned} e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} &= -\frac{d}{dt} (L_1 i_1 + M i_2) = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ \Rightarrow u_1 &= r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

$$\text{De même : } u_2 = r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

Par conséquent, la puissance électrique reçue par le système $\{\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2\}$ est définie par :

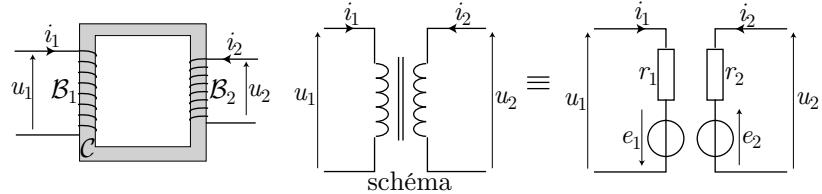
$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{reçue}} &= u_1 i_1 + u_2 i_2 \\ &= r_1 i_1^2 + L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2^2 + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt} \\ &= r_1 i_1^2 + r_2 i_2^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right) \end{aligned}$$

En remarquant que $r_1 i_1^2 + r_2 i_2^2$ représente la puissance Joule $\mathcal{P}_{\text{Joule}}$ reçue par $\{\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2\}$, l'énergie électromagnétique \mathfrak{E}_{em} accumulée dans le système vérifie le bilan :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{reçue}} &= \mathcal{P}_{\text{Joule}} + \frac{d\mathfrak{E}_{em}}{dt} \\ \Rightarrow \mathfrak{E}_{em} &= \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \end{aligned}$$

Application : le transformateur

Un transformateur est composé de deux enroulements (bobines) comportant respectivement N_1 et N_2 spires. Le couplage magnétique entre ces enroulements est assuré par un circuit magnétique (C).



On notera :

- u_1 la tension aux bornes de \mathcal{B}_1 (**enroulement primaire**), i_1 le courant qui circule dans \mathcal{B}_1 et ϕ_1 le flux du champ magnétique à travers \mathcal{B}_1 ;
- u_2 la tension aux bornes de \mathcal{B}_2 (**enroulement secondaire**), i_2 le courant qui circule dans \mathcal{B}_2 et ϕ_2 le flux du champ magnétique à travers \mathcal{B}_2 .
- ϕ_0 le flux du champ magnétique à travers une section droite de \mathcal{C} ; si le circuit magnétique est parfait, les enroulements de N_1 spires et de N_2 spires sont traversés par les flux magnétiques :

$$\phi_1 = N_1 \phi_0 \text{ et } \phi_2 = N_2 \phi_0 \quad (77)$$

La loi des mailles, appliquée à \mathcal{B}_1 , conduit à :

$$\begin{aligned} u_1 - r_1 i_1 + e_1 = 0 &\Rightarrow u_1 = r_1 i_1 - e_1 \text{ où } e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -N_1 \frac{d\phi_0}{dt} \\ &\Rightarrow u_1 = r_1 i_1 + N_1 \frac{d\phi_0}{dt} \end{aligned} \quad (78)$$

tandis qu'appliquée à \mathcal{B}_2 , elle fournit :

$$\begin{aligned} e_2 - r_2 i_2 - u_2 = 0 &\Rightarrow u_2 = e_2 - r_2 i_2 \text{ où } e_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = -N_2 \frac{d\phi_0}{dt} \\ &\Rightarrow u_2 = -N_2 \frac{d\phi_0}{dt} - r_2 i_2 \end{aligned} \quad (79)$$

Pour limiter les pertes par effet Joule, les résistances r_1 et r_2 sont souvent choisies assez faibles pour qu'il soit légitime de simplifier les relations (78) et (79) :

$$u_1 \simeq N_1 \frac{d\phi_0}{dt} \text{ et } u_2 = -N_2 \frac{d\phi_0}{dt} \quad (80)$$

Ces dernières identités permettent de montrer que :

$$u_2 = -\frac{N_2}{N_1} u_1 \quad (81)$$

Le choix du rapport $\frac{N_2}{N_1}$ détermine alors la tension u_2 aux bornes de l'enroulement secondaire.

Quant aux identités (75), (76) et (77), elles fournissent :

$$\begin{cases} \phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 = N_1 \phi_0 \\ \phi_2 = L_2 i_2 + M i_1 = N_2 \phi_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 N_2 \phi_0 = N_2 L_1 i_1 + N_2 M i_2 \\ N_1 N_2 \phi_0 = N_1 L_2 i_2 + N_1 M i_1 \end{cases} \Rightarrow N_2 L_1 i_1 + N_2 M i_2 = N_1 L_2 i_2 + N_1 M i_1$$

Notamment, lorsque $i_2 = 0$, cette équation devient :

$$N_2 L_1 i_1 = N_1 M i_1 \Rightarrow \frac{L_1}{N_1} = \frac{M}{N_2}$$

ce qui prouve l'existence d'un réel K tel que :

$$\begin{cases} \frac{L_1}{N_1} = K \\ \frac{M}{N_2} = K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_1 = K N_1 \\ M = K N_2 \end{cases}$$

de sorte que :

$$\begin{aligned}\phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 &= N_1 \phi_0 \Rightarrow K N_1 i_1 + K N_2 i_2 = N_1 \phi_0 \\ &\Rightarrow N_1 i_1 + N_2 i_2 = \frac{N_1}{K} \phi_0\end{aligned}\quad (82)$$

Supposons que l'enroulement primaire soit alimenté sous une tension sinusoïdale $u_1(t) = U_{10} \cos(\omega t)$, d'image complexe $\underline{u}_1 = U_{10} e^{j\omega t}$. Si $\underline{Z}_1 = Z_1 e^{j\varphi_1}$ désigne l'impédance d'entrée :

$$\underline{i}_1 = \frac{\underline{u}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{U_{10}}{Z_1} e^{j(\omega t - \varphi_1)} = I_{10} e^{j(\omega t - \varphi_1)} \text{ avec } I_{10} = \frac{U_{10}}{Z_1}$$

Quant à la relation (81), elle révèle que :

$$\begin{aligned}\underline{u}_2 &= -\frac{N_2}{N_1} \underline{u}_1 = -\frac{N_2 U_{10}}{N_1} e^{j\omega t} \\ &\Rightarrow \underline{u}_2 = -U_{20} e^{j\omega t} \text{ avec } U_{20} = \frac{N_2 U_{10}}{N_1}\end{aligned}$$

Par suite, en notant $\underline{Z}_2 = Z_2 e^{j\varphi_2}$ l'impédance raccordée à l'enroulement secondaire, on trouve :

$$\underline{i}_2 = \frac{\underline{u}_2}{\underline{Z}_2} = -\frac{U_{20}}{Z_2} e^{j(\omega t - \varphi_2)} = -I_{20} e^{j(\omega t - \varphi_2)} \text{ avec } I_{20} = \frac{U_{20}}{Z_2}$$

Enfin, la première des relations (80) révèle que l'image complexe $\underline{\phi}_0$ de ϕ_0 vérifie :

$$\underline{u}_1 = N_1 \frac{d\underline{\phi}_0}{dt} = j\omega N_1 \underline{\phi}_0 \Rightarrow N_1 \underline{\phi}_0 = \frac{1}{j\omega} \underline{u}_1 = \frac{U_{10}}{\omega} e^{j(\omega t - \pi/2)}$$

Par conséquent, l'équation (82) admet pour image complexe :

$$\begin{aligned}N_1 \underline{i}_1 + N_2 \underline{i}_2 &= \frac{N_1}{K} \underline{\phi}_0 \Rightarrow N_1 I_{10} e^{j(\omega t - \varphi_1)} - N_2 I_{20} e^{j(\omega t - \varphi_2)} = \frac{N_1 U_{10}}{K \omega} e^{j(\omega t - \pi/2)} \\ &\Rightarrow N_1 I_{10} e^{-j\varphi_1} - N_2 I_{20} e^{-j\varphi_2} = \frac{N_1 U_{10}}{K \omega} e^{-j\pi/2} \\ &\Rightarrow \operatorname{Re} \{N_1 I_{10} e^{-j\varphi_1} - N_2 I_{20} e^{-j\varphi_2}\} = \frac{N_1 U_{10}}{K \omega} \operatorname{Re} \{e^{-j\pi/2}\} \\ &\Rightarrow N_1 I_{10} \cos \varphi_1 - N_2 I_{20} \cos \varphi_2 = 0 \\ &\Rightarrow N_1 I_{10} \cos \varphi_1 = N_2 I_{20} \cos \varphi_2\end{aligned}$$

Enfin, l'équation (80) conduit à :

$$\begin{aligned}U_{20} &= -\frac{N_2}{N_1} U_{10} \Rightarrow N_2 U_{10} = -N_1 U_{20} \\ &\Rightarrow N_1 I_{10} \cos \varphi_1 \times (N_2 U_{10}) = N_1 I_{20} \cos \varphi_2 \times (-N_1 U_{20}) \\ &\Rightarrow U_{10} I_{10} \cos \varphi_1 = -U_{20} I_{20} \cos \varphi_2\end{aligned}$$

où l'on reconnaît d'une part l'expression de la puissance moyenne reçue par l'enroulement (\mathcal{B}_1) :

$$P_1 = \frac{U_{10} I_{10}}{2} \cos \varphi_1$$

et d'autre part la puissance moyenne fournie par l'enroulement (\mathcal{B}_2) :

$$P_2 = -\frac{U_{20}I_{20}}{2} \cos \varphi_2 \Rightarrow P_1 = P_2$$

En conclusion, le transformateur parfait transmet toute la puissance qu'il reçoit.

3.8.3 Circuit mobile dans un champ permanent

Force électromotrice

Le potentiel vecteur \vec{A} d'un champ magnétique permanent ne dépendant pas du temps, le champ électromoteur se simplifie :

$$\vec{E}_{em}(M) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_{M/\mathcal{L}} \wedge \vec{B}(M) = \vec{v}_{M/\mathcal{L}} \wedge \vec{B}(M)$$

de sorte qu'entre deux points A et B , la force électromotrice est définie par :

$$e_{AB} \hat{=} \int_A^B \vec{E}_{em}(M) \cdot d\overrightarrow{OM}_{\mathcal{C}} = \int_A^B [\vec{v}_{M/\mathcal{L}} \wedge \vec{B}(M)] \cdot d\overrightarrow{OM}_{\mathcal{C}} \quad (83)$$

où $d\overrightarrow{OM}_{\mathcal{C}}$ est un déplacement élémentaire d'un porteur de charge mobile, dans le référentiel du circuit. Notamment, la vitesse d'un tel porteur vaut, dans (\mathcal{C}) :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{C}} \hat{=} \frac{d\overrightarrow{OM}_{\mathcal{C}}}{dt} \Rightarrow \vec{v}_{M/\mathcal{C}} \parallel d\overrightarrow{OM}_{\mathcal{C}}$$

tandis que la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e(M)$ du circuit en M permet d'appliquer la loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{L}} = \vec{v}_e(M) + \vec{v}_{M/\mathcal{C}}$$

Il s'ensuit que :

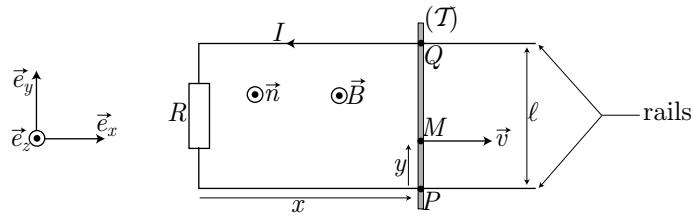
$$\begin{aligned} [\vec{v}_{M/\mathcal{L}} \wedge \vec{B}(M)] \cdot d\overrightarrow{OM}_{\mathcal{C}} &= [\overrightarrow{OM}_{\mathcal{C}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{L}}] \cdot \vec{B}(M) \\ &= \left[\overrightarrow{OM}_{\mathcal{C}} \wedge \vec{v}_e(M) + \underbrace{\overrightarrow{OM}_{\mathcal{C}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{C}}}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{OM}_{\mathcal{C}} \parallel \vec{v}_{M/\mathcal{C}}} \right] \cdot \vec{B}(M) \\ &= [\vec{v}_e(M) \wedge \vec{B}(M)] \cdot d\overrightarrow{OM}_{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

Par conséquent, la f.e.m. donnée par la relation (83) s'écrit aussi :

$$e_{AB} = \int_A^B [\vec{v}_e(M) \wedge \vec{B}(M)] \cdot d\overrightarrow{OM}_{\mathcal{C}} \quad (84)$$

Loi de Faraday

Soient deux rails parallèles, de résistance négligeable, reliés à l'une de leurs extrémités par une résistance R . Une tige (T) peut glisser sans frottements sur les rails, aux points de contact P et Q . Le dispositif est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B \vec{e}_z$, tandis que la tige est animée d'une vitesse $\vec{v} = v \vec{e}_x$ dans la direction des rails.



On appelle ℓ l'écartement des rails.

Orientons le circuit (\mathcal{C}) dans le sens trigonométrique, de sorte que la surface (Σ) à l'intérieur de ce circuit soit orientée par un vecteur normal \vec{n} . En parcourant le circuit dans ce sens, la force électromotrice e est donnée par l'identité (84) :

$$e \cong \oint_{\mathcal{C}} [\vec{v}_e(M) \wedge \vec{B}(M)] \cdot d\overrightarrow{OM}_{\mathcal{C}}$$

où seuls les points compris entre P et Q possèdent une vitesse d'entraînement $\vec{v}_e(M) = \vec{v} = v \vec{e}_x$. C'est pourquoi :

$$\begin{aligned} e &= \int_P^Q [(v \vec{e}_x) \wedge (B \vec{e}_z)] \cdot (dy \vec{e}_y) \text{ car } d\overrightarrow{OM}_{\mathcal{C}} = dy \vec{e}_y \\ &= \int_0^\ell -vB dy = -vB\ell \end{aligned}$$

Quant au flux du champ magnétique à travers (Σ), il se calcule en orientant chaque élément $d\vec{S}$ de la surface (Σ) selon $\vec{n} = \vec{e}_z$:

$$\begin{aligned} \phi_B &\cong \iint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{(\Sigma)} (B \vec{e}_z) \cdot (dS \vec{n}) = Bx\ell \\ &\Rightarrow \frac{d\phi_B}{dt} = B \frac{dx}{dt} \ell = Bv\ell \end{aligned}$$

Ainsi, la f.e.m. induite est donnée par la **loi de Faraday** :

$$e = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

dont on admettra la généralisation.

Table des matières

3	Électromagnétisme	1
3.1	Électrostatique	1
3.1.1	Outils mathématiques	1
3.1.2	Rappels d'électrostatique	4
3.1.3	Continuité du champ électrique	6
3.1.4	Lois locales	10
3.2	Magnétostatique	15
3.2.1	Calculs de champs magnétiques	15
3.2.2	Structure du champ magnétostatique	17
3.3	Conducteurs en équilibre électrostatique	21
3.3.1	Les conducteurs	21
3.3.2	Condensateurs	25
3.4	Équations de Maxwell	30
3.4.1	Équation de propagation	30
3.4.2	Équations de Maxwell	34
3.4.3	Les potentiels	36
3.4.4	Relations de passage	41
3.4.5	Conducteur ohmique	43
3.5	Énergie électromagnétique	46
3.5.1	Effet Joule	46
3.5.2	Bilans d'énergie	47
3.6	Propagation et rayonnement	52
3.6.1	Ondes planes progressives	52
3.6.2	Propagation dans un plasma	64
3.6.3	Réflexion sur les métaux	68
3.6.4	Propagation entre deux plans parallèles	71
3.6.5	Rayonnement d'un dipôle oscillant	80
3.7	Compléments de magnétostatique	84
3.7.1	Théorème d'Ampère	84
3.7.2	Dipôle magnétique	86
3.7.3	Action d'un champ magnétique sur un dipôle	88
3.8	Induction électromagnétique	92
3.8.1	Force électromotrice	92
3.8.2	Circuit immobile dans un champ variable	94
3.8.3	Circuit mobile dans un champ permanent	101