Correction du DM n°3, TS 3.

Exercice 1.

1) a) $g(x)=x^3-3x-3$. *g* est une fonction polynôme donc dérivable sur **R**.
Pour tout réel *x*, $g'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x-1)(x+1)$.

$g'(x)$ est un polynôme de degré 2 dont les racines sont -1 et 1, et le signe de $g'(x)$ est celui de $a=3$ sauf entre ses racines.

On en déduit le tableau de variations de la fonction *g* :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		+	0	-	0	+	
Variations de *g*	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

g étant une fonction polynôme on a : $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$.

D'après l'étude des variations de *g*, *g* admet un maximum égal à -1 sur l'intervalle $]-\infty;1]$, donc l'équation $g(x)=0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty;1]$.

Sur $[1;+\infty[$: *g* est continue car dérivable, $g(1)=-5$ et $g(3)=15$, 0 est compris entre -5 et 15 donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ admet au moins une solution α dans [1 ; 3].
De plus, *g* est strictement croissante sur $[1;+\infty[$, ce qui assure l'unicité de la solution α .

Donc l'équation *g* (*x*) = 0 admet une unique solution réelle.

Avec la calculatrice on trouve : g(2,1) = -0,039 <0 et g(2,2) = 1,048 > 0 donc α est compris entre 2,1 et 2,2.
$\boxed{\alpha\approx2{,}1}$ à 0,1 près par défaut et $\boxed{\alpha\approx2{,}2}$ à 0,1 près par excès.

1) b) D'après la question 1 on sait que *g* est négative sur l'intervalle $]-\infty;1]$.
Sur l'intervalle $[1;+\infty[$, *g* est strictement croissante et $g(\alpha)=0$ donc $g(x)\leq0$ sur $[1;\alpha]$ et $g(x)\geq0$ sur $[\alpha;+\infty[$.

En résumé :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de *g* (*x*)		-	0	+	

2) a) $f(x)=\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$. *f* est une fonction rationnelle donc dérivable sur son ensemble de définition qui est $\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}}$.

2) b) Pour tout x de D : $f'(x)=\dfrac{6x^2\times(x^2-1)-2x\times(2x^3+3)}{(x^2-1)^2}=\dfrac{2x^4-6x^2-6x}{(x^2-1)^2}$

Donc $f'(x)=\dfrac{2x(x^3-3x-3)}{(x^2-1)^2}$, c'est à dire $\boxed{f'(x)=\dfrac{2x\,g(x)}{(x^2-1)^2}}$.

Pour tout x de D, $(x^2-1)^2>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x\,g(x)$.

D'après la question 1b) on peut faire le tableau de signes de $f'(x)$ en **n'oubliant surtout pas les valeurs interdites -1 et 1 !!!**

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
Signe de x		-	||	-	0	+	||	+		+	
Signe de $g(x)$		-	||	-		-	||	-	0	+	
Signe de $f'(x)$		+	||	+	0	-	||	-	0	+	

On en déduit donc que la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty;-1[$ et $]-1;0]$, strictement décroissante sur $[0;1[$ et $]1;\alpha]$, et enfin strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$.

2 c) L'ordonnée du point A est égale à $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha^3+3}{\alpha^2-1}$.

Or on sait que α est l'unique solution de l'équation $g(x)=0$.
Donc α est l'unique réel vérifiant $\alpha^3-3\alpha-3=0$. D'où $\alpha^3=3\alpha+3$.

Donc $f(\alpha)=\dfrac{2\times(3\alpha+3)+3}{\alpha^2-1}$, c'est à dire $\boxed{f(\alpha)=\dfrac{3(2\alpha+3)}{\alpha^2-1}}$.

Exercice 2.
La fonction f continue vérifie : pour tout réel x , $f(x)=(f(x))^2$ donc $f(x)=0$ ou $f(x)=1$.

Démontrons par l'absurde que f est constante :

supposons que f n'est pas constante, il existe donc un réel a tel que $f(a)=0$ et il existe un réel b tel que $f(b)=1$.
Comme f est continue sur l'intervalle $[a\,;b]$ (si $a<b$) ou $[b\,;a]$ (si $b<a$), d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=0{,}5$. Ceci contredit le fait que pour tout réel x, $f(x)=0$ ou $f(x)=1$.

Donc la fonction f est constante sur $\mathbf{R}$, et c'est soit la fonction nulle soit la fonction $x\rightarrow 1$.