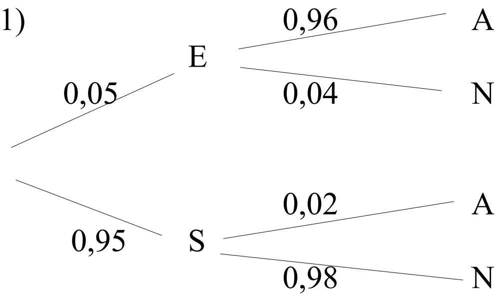
**Corrigé du contrôle du 19 décembre 2013.**

**<u>Exercice 1</u>.**

1)




2a) On cherche $p(E\cap A)$ :

$$p(E\cap A)=p(E)\times p_E(A)=0{,}05\times 0{,}96 \quad \text{donc} \quad \boxed{p(E\cap A)=0{,}048} \ .$$

2b) D'après la formule des probabilités totales :

$$p(A)=p(E\cap A)+p(S\cap A)=0{,}05\times 0{,}96+0{,}95\times 0{,}02$$

Donc $\boxed{p(A)=0{,}067}$ .

3) On cherche $p_A(S)$ :

$$p_A(S)=\frac{p(A\cap S)}{p(A)}=\frac{0{,}95\times 0{,}02}{0{,}067} \quad \text{donc} \quad \boxed{p_A(S)=\frac{19}{67}} \ .$$

C'est à dire environ 28 % de « chance » d'être sobre si l'alcootest est positif : très mauvais alcootest mis au point par un très mauvais laboratoire....

**<u>Exercice 2</u>.**

L'astrologue peut disposer les boules dans les deux urnes de différentes manières :

- 1B (une blanche) et 1B – 2N (une blanche et deux noires)
- 1N et 2B – 1N
- 2B et 2N
- 1B-1N et 1B-1N
- toutes les boules dans la même urne

Pour chacun de ces 5 cas, on fait un arbre pondéré et on calcule la probabilité de tirer une boule blanche.

On trouve alors que le cas le plus favorable à l'astrologue est de mettre une boule dans une urne et les trois autres boules dans l'autre urne. La probabilité de tirer une boule blanche est alors égal à

$$0{,}5\times 1+0{,}5\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \ .$$

2) a) Avec une seule boule blanche dans une urne, il y a donc $n$ boules noires et ($n$ – 1 ) blanches dans la seconde urne.

D'après la formule des probabilités totales, $p(B)=0{,}5\times 1+0{,}5\times\frac{n-1}{2n-1}$

On obtient donc $\boxed{p(B)=\frac{3n-2}{4n-2}}$ .

2) b) On note $p_n=\frac{3n-2}{4n-2}$

La suite $(p_n)$ et la fonction rationnelle $f$ définie pour tout réel $x$ différent de 2 par $f(x)=\frac{3x-2}{4x-2}$ ont la même limite en l'infini.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{4x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$ .

Donc la suite $(p_n)$ converge vers 0,75.

**Exercice 3**.

1) $d(x)=AM^2=(x-1)^2+\left(\frac{1}{x}+1\right)^2$ . En développant on trouve $\boxed{d(x)=x^2-2x+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+2}$ .

2) $d$ est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et, pour tout $x > 0$ : $d'(x)=2x-2-\frac{2}{x^3}-\frac{2}{x^2}$

En réduisant au même dénominateur on obtient $d'(x)=\frac{2(x^4-x^3-x-1)}{x^3}$ .

$2 > 0$ et $x^3>0$ car $x >0$ donc $\boxed{d'(x) \text{ est du signe de } f(x)=x^4-x^3-x-1}$ .

3) a) et b) Corrigées en même temps.

$f'(x)=4x^3-3x^2-1=(x-1)(4x^2+x+1)$ (développement trop facile)

$x > 0$ donc $4x^2+x+1>0$ ,$f'$ est donc du signe de $x-1$ .

par conséquent, on en déduit que :

- sur ]0 ; 1[ $f'(x)<0$ et donc $f$ est strictement décroissante
- $f'(1)=0$
- sur $]1;+\infty[$ $f'(x)>0$ et donc $f$ est strictement croissante.

4) a) **Cette question est un grand classique !**

$\lim_{x \to 0} f(x) = -1$ et $f$ est strictement décroissante sur ] 0 ; 1[ donc pour tout $x$ de ]0 ; 1[, $f(x) < 0$ .

En conséquence, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle ] 0 ; 1[.

Sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ , $f$ est <u>continue</u> (c'est une fonction polynôme), $f(1) = -2 < 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$ .
Comme 0 appartient à l'intervalle $]-2 ; +\infty[$ , d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution dans l'intervalle $[1 ; +\infty[$ .

De plus, $f$ étant <u>strictement</u> croissante sur $[1 ; +\infty[$ , on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ n'admet qu'une unique solution sur $[1 ; +\infty[$ .

**Conclusion** : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $]0 ; +\infty[$ .

4) b) A l'aide de la calculatrice on trouve que $f(1{,}61) = -0{,}0643 < 0$ et $f(1{,}62) = 0{,}01595 > 0$ .

Donc $\boxed{1{,}61 < \alpha < 1{,}62}$ .

5) On sait que $f < 0$ sur ] 0 ; 1[. Sur $]1 ; +\infty[$ $f$ est strictement croissante et $f(\alpha) = 0$ donc :

- sur l'intervalle $]0 ; \alpha[ : f < 0$
- sur l'intervalle $]\alpha ; +\infty[ : f > 0$
- et $f(\alpha) = 0$

Comme la fonction $d'$ est du signe de $f$, on en déduit le sens de variation de $d$ :

$\boxed{d \text{ est strictement décroissante sur } ]0 ; \alpha[ \, ; d \text{ est strictement croissante sur } ]\alpha ; +\infty[}$ .

**Donc la distance d est minimale lorsque l'abscisse du point M est égale à $\alpha$.**

6) Indications pour cette question :

dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires si, et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.[1] (sauf si ces deux droites sont parallèles aux axes du repère)

On calcule donc le coefficient directeur de la tangente à ($C$) au point M d'abscisse $\alpha$, le coefficient directeur de la droite (AM), et c'est fini !

---

1 Exercice : démontrer cette propriété à l'aide du produit scalaire