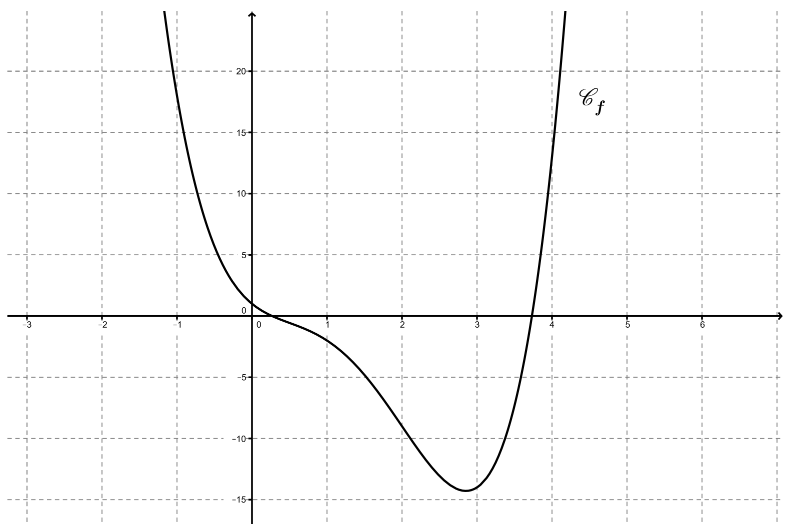
Équation à coefficients symétriques

On cherche à résoudre l'équation de degré 4 suivante

$$(\mathrm{E}) : z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$$

1. On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1$$



   Donner le nombre de solutions de (E) observées ainsi qu'une valeur approchée de chacune d'elles à 10^{-1} près.

2. Justifier que 0 n'est pas solution de (E).
3. Montrer que

$$z \text{ est solution de (E)} \Leftrightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} - 5\left(z + \frac{1}{z}\right) + 6 = 0$$

4. Soit $Z = z + \dfrac{1}{z}$. Calculer Z^2 en fonction de z.
   En déduire que z est solution de (E) $\Leftrightarrow$ Z est solution de (E') : $Z^2 - 5Z + 4 = 0$.
5. Résoudre (E') dans $\mathbb{C}$.
6. Terminer la résolution de (E) dans $\mathbb{C}$. Comparer avec les résultats de la question 1.