Corrigé de l'exercice 50 p 119

2. b) Il semble que la suite (w_n) soit une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $w_0 = 1$.

Pour le démontrer, il est « commode »de montrer en fait que pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n = 2n + 1$. (ce qui se comprend au vu de ce qu'on veut démontrer)

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = 2n + 1$.

- $w_0 = 1 = 2 \times 0 + 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.
  On a alors $w_n = 2n + 1$. Il faut montrer que $w_{n+1} = 2(n + 1) + 1 = 2n + 3$.
  Or on a $(n + 1)w_{n+1} = (n + 2)w_n + 1$ donc $(n + 1)w_{n+1} = (n + 2)(2n + 1) + 1$ et donc

$$w_{n+1} = \frac{(n + 2)(2n + 1) + 1}{n + 1} = \frac{2n^2 + 5n + 3}{n + 1}$$

  De plus, $(2n + 3)(n + 1) = 2n^2 + 5n + 3$ donc, finalement $w_{n+1} = 2n + 3$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
  La propriété est donc héréditaire.
- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n = 2n + 1$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}, w_{n+1} - w_n = 2$ et donc que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 2.

$$w_{2\,012} = 2 \times 2\,012 + 1 = 4\,025$$