Corrigé du contrôle 1

Exercice 1 :

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère $S_n = 1 + 3 + \ldots + (2n-1)$ la somme des n premiers entiers impairs.

1. $S_1 = 1 = 1^2$, $S_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$, $S_3 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$.

   Conjecture : pour tout entier $n \geq 1, S_n = n^2$.

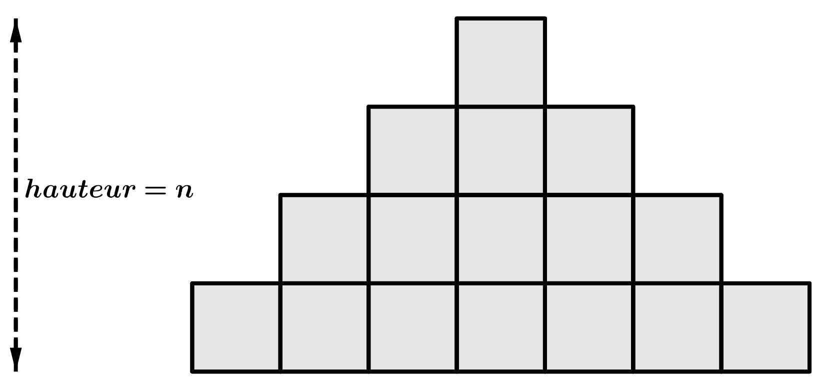
2. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété définie pour tout entier $n \geq 1$ par « $S_n = n^2$ ».
   - D'après la question 1. $\mathcal{P}_1$ est vraie.
   - Supposons qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.
     On a alors $S_n = n^2$.
     De plus $S_{n+1} = S_n + 2(n+1) - 1 = S_n + 2n + 1$.
     On a donc $S_{n+1} = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.
     Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.
   - On en conclut que pour tout entier $n \geq 1, S_n = n^2$.

3. Considérons une telle pyramide de hauteur n.

   La première ligne contient un carré, la deuxième en contient 3, la troisième en contient 5 ...

   D'une ligne à l'autre on additionne deux carrés. Comme la première ligne contient 1 carré, on en déduit que le nombre de carrés de la n^e ligne de la pyramide est le n^e nombre impair.

   Ainsi le nombre total de carrés dans une telle pyramide est la somme des n premiers nombres entiers impairs soit $S_n = n^2$.



Exercice 2 :

1. $(1+i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$.
   On en déduire que $(1+i)^8 = \left[(1+i)^2\right]^4 = (2i)^4 = \left[(2i)^2\right]^2 = (-4)^2 = 16$.
   $(1+i)^8$ est donc bien un nombre réel positif.

2. a) • Notons $z = x + iy$ où x et y sont des réels.
   On a
   $$z + \overline{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2\,\mathrm{Re}(z)$$

   •
   $$\begin{aligned} z \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow z + \overline{z} = 0 \\ &\Leftrightarrow z = -\overline{z} \end{aligned}$$

   b) Pour tout $z \in \mathbb{C}$,
   $$\begin{aligned} \overline{(z+i\overline{z})^2} &= \left(\overline{z+i\overline{z}}\right)^2 \\ &= (\overline{z} - i\overline{\overline{z}})^2 \\ &= (\overline{z} - iz)^2 \\ &= \overline{z}^2 - 2iz\overline{z} - z^2 \\ &= -(-\overline{z}^2 + 2iz\overline{z} + z^2) \\ &= -(z^2 + 2iz\overline{z} - \overline{z}^2) \\ &= -(z+i\overline{z})^2 \end{aligned}$$

   Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(z+i\overline{z})^2$ est donc égal à l'opposé de son conjugué et donc est imaginaire pur.

   Deuxième méthode :
   Pour tout $z \in \mathbb{C}$,
   $$\begin{aligned} \overline{(z+i\overline{z})^2} &= \left(\overline{z+i\overline{z}}\right)^2 \\ &= (\overline{z} - i\overline{\overline{z}})^2 \\ &= (\overline{z} - iz)^2 \\ &= \left(-i\left(-\frac{1}{i}\overline{z} + z\right)\right)^2 \\ &= (-i)^2\left(-\frac{1}{i}\overline{z} + z\right)^2 \\ &= -\left(i\overline{z} + z\right)^2 \left(\text{en effet, } \frac{1}{i} = -i\right) \\ &= -\left(z + i\overline{z}\right)^2 \end{aligned}$$

   Finalement on arrive à la même conclusion.

Exercice 3 :

1.

$$\begin{aligned} 5z-4=(3+2i)z+8-i &\Leftrightarrow 5z-(3+2i)z=8-i+4 \\ &\Leftrightarrow (5-3-2i)z=12-i \\ &\Leftrightarrow (2-2i)z=12-i \\ &\Leftrightarrow z=\frac{12-i}{2-2i} \end{aligned}$$

De plus

$$\frac{12-i}{2-2i}=\frac{(12-i)(2+2i)}{2^2+(-2)^2}=\frac{24+24i-2i+2}{8}=\frac{26+22i}{8}=\frac{13}{4}+\frac{11}{4}i$$

La solution de l'équation est donc $\frac{13}{4}+\frac{11}{4}i$.

2.

$$\begin{aligned} z^3=-z &\Leftrightarrow z^3+z=0 \\ &\Leftrightarrow z(z^2+1)=0 \\ &\Leftrightarrow z(z^2-i^2)=0 \\ &\Leftrightarrow z(z-i)(z+i)=0 \\ &\Leftrightarrow z=0 \text{ ou } z=i \text{ ou } z=-i \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est donc

$$\mathscr{S}=\{-i;i;0\}$$

3. Posons $z = x + iy$.

$$\begin{aligned}
2z + 1 - 2i = i\bar{z} + 1 &\Leftrightarrow 2(x + iy) + 1 - 2i = i(x - iy) + 1 \\
&\Leftrightarrow 2x + 2iy + 1 - 2i = ix + y + 1 \\
&\Leftrightarrow 2x + 1 + i(2y - 2) = y + 1 + ix \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = y + 1 \\ 2y - 2 = x \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ 2 \times 2x - 2 = x \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ 4x - 2 = x \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ 3x = 2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}i
\end{aligned}$$

La solution de l'équation est donc $\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3}i$.

Exercice 4 :

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $\mathcal{Z} = z^2$.
Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des nombres complexes z tels que $\mathcal{Z}$ soit réel.
Notons $z = x + iy$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= (x + iy)^2 \\
&= x^2 + 2ixy + (iy)^2 \\
&= x^2 - y^2 + 2ixy
\end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned}
z \in \mathscr{E} &\Leftrightarrow \mathcal{Z} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \operatorname{Im}(\mathcal{Z}) = 0 \\
&\Leftrightarrow xy = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0 \\
&\Leftrightarrow z \in i\mathbb{R} \text{ ou } z \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Nous venons de démontrer que $\mathcal{E} = \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$.