# Devoir : raisonnement par récurrence

Démontrer les propriétés suivants en utilisant le raisonnement par récurrence :

1. Pour tout entier $n \geq 1$ ,

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Soit $x > -1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

3. Pour tout entier $n \geq 1$ ,

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

**Terminale S** **2014/2015**

# Devoir : raisonnement par récurrence

Démontrer les propriétés suivants en utilisant le raisonnement par récurrence :

1. Pour tout entier $n \geq 1$ ,

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Soit $x > -1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

3. Pour tout entier $n \geq 1$ ,

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

# Corrigé du DM 1 : raisonnement par récurrence

1. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété définie pour tout $n \geq 1$ par

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**Initialisation :** pour $n = 1$ on a

$$\sum_{k=1}^{k=1} k^2 = \frac{1}{1^2} = 1$$

et

$$\frac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6} = \frac{2\times 3}{6} = 1$$

Les deux expressions étant égales $\mathcal{P}_1$ est vraie.

**Hérédité :** Supposons qu'il existe $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

Montrons alors que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{k=n} k^2 + (n+1)^2$$

Or on a supposé que

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

on a donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{k=n+1} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}\\ &= \frac{(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]}{6}\\ &= \frac{(n+1)\left[2n^2+7n+6\right]}{6}\end{aligned}$$

Or on veut montrer que

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

et $(n+2)(2n+3) = 2n^2+3n+4n+6 = 2n^2+7n+6$.
On a donc

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie. La propriété est donc héréditaire.

**Conclusion :** Pour tout $n \geq 1, \mathcal{P}_n$ est vraie donc pour tout $n \geq 1$ ,

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Soit $x > -1$.
Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

**Initialisation :** pour $n=0$ on a $(1+x)^0 = 1$ et $1+0x = 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

**Hérédité :** Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.
Montrons alors que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$.
Or on a supposé que $(1+x)^n \geq 1+nx$. Étant donné que $x > -1$ on a $1+x > 0$ et donc $(1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx)$ (en multipliant dans chaque membre par $(1+x) > 0$)
Or $(1+x)(1+nx) = 1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2$ et $nx^2 \geq 0$ donc $(1+x)(1+nx) \geq 1+(n+1)x$.
Finalement $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ et donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
La propriété est héréditaire.

**Conclusion :** Pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n$ est vraie donc pour tout $x > -1$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}$
$(1+x)^n \geq 1+nx$.

3. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété définie pour tout $n \geq 1$ par

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

**Initialisation :** pour $n=1$ on a

$$\sum_{k=1}^{k=1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2}$$

et

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Les deux expressions étant égales $\mathcal{P}_1$ est vraie.

**Hérédité :** Supposons qu'il existe $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.
Montrons alors que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Or on a supposé que

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

on a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{n+2}
\end{aligned}$$

$\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie. La propriété est donc héréditaire.

**Conclusion :** Pour tout $n \geq 1, \mathcal{P}_n$ est vraie donc pour tout $n \geq 1$ ,

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

**remarque :**

Ce dernier raisonnement par récurrence est un prétexte pour s'entraîner car on peut s'en passer en remarquant que pour tout $k \geq 1$ ,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

...