DM : étude de fonction - Corrigé

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 4x^3 - 3x - 8$$

1. g est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 12x^2 - 3 = 3(4x^2 - 1) = 4(2x - 1)(2x + 1)$.
   Les racines de ce trinôme sont donc $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$.
   Le coefficient de x^2 étant strictement positif, on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$	-7	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

2. • Sur $\left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right[$, le maximum de g est $g\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -7$.
   On en déduit que pour tout $x \in \left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right[$, $g(x) \leq -7$ donc que $g(x) < 0$.
   L'équation $g(x) = 0$ n'admet donc pas de solution dans l'intervalle $\left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right[$.
   • g est strictement croissante et continue sur $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.
   $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = -9$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 4x^3 = +\infty$. On en déduit que $0 \in \left[g\left(\dfrac{1}{2}\right); \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)\right[$.
   L'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution α sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.
   • α est donc l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
   De plus, on a $g(1{,}45) \approx -0{,}16$ et $g(1{,}46) \approx 0{,}07$. On a donc $g(1{,}45) < 0 < g(1{,}46)$ donc $\boxed{1{,}45 < \alpha < 1{,}46}$.
3. On en déduit le signe de g sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ par

$$f(x) = \frac{x^3+1}{4x^2-1}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1. a) f est une fonction rationnelle donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{4x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{4} = +\infty$$

   b) Il s'agit de déterminer la limite de f en $\frac{1}{2}$ à droite.

   D'une part $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ x>\frac{1}{2}}} x^3+1 = \frac{1}{8}+1 = \frac{9}{8}$.

   D'autre part $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ x>\frac{1}{2}}} 4x^2-1 = 0^+$. En effet, les racines du trinôme $4x^2-1$ sont $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ et donc son tableau de signe est

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x^2-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Par quotient, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ x>\frac{1}{2}}} f(x) = +\infty$.

   On en déduit que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$.

2. a) f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition soit sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

   Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{3x^2(4x^2-1)-(x^3+1)\times 8x}{(4x^2-1)^2} \\
&= \frac{x[3x(4x^2-1)-8(x^3+1)]}{(4x^2-1)^2} \\
&= \frac{x[12x^3-3x-8x^3-8]}{(4x^2-1)^2} \\
&= \frac{x[4x^3-3x-8]}{(4x^2-1)^2} \\
&= \frac{xg(x)}{(4x^2-1)^2}
\end{aligned}$$

b) Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$, $(4x^2-1)^2 > 0$ et $x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

c)

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3+1}{4\alpha^2-1}$$

Or par définition de α, on a

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 4\alpha^3 - 3\alpha - 8 = 0$$

On a donc

$$\alpha^3 = \frac{3\alpha+8}{4}$$

donc

$$\alpha^3 + 1 = \frac{3\alpha+8}{4} + 1 = \frac{3\alpha+12}{4}$$

On en déduit que

$$f(\alpha) = \frac{3\alpha+12}{4(4\alpha^2-1)} = \frac{3(\alpha+4)}{4(4\alpha^2-1)}$$

La même définition de α donne également

$$\begin{aligned} 4\alpha^3 - 3\alpha = 8 &\Leftrightarrow \alpha(4\alpha^2-3) = 8 \\ &\Leftrightarrow 4\alpha^2 - 3 = \frac{8}{\alpha} \\ &\Leftrightarrow 4\alpha^2 - 1 = \frac{8}{\alpha} + 2 \end{aligned}$$

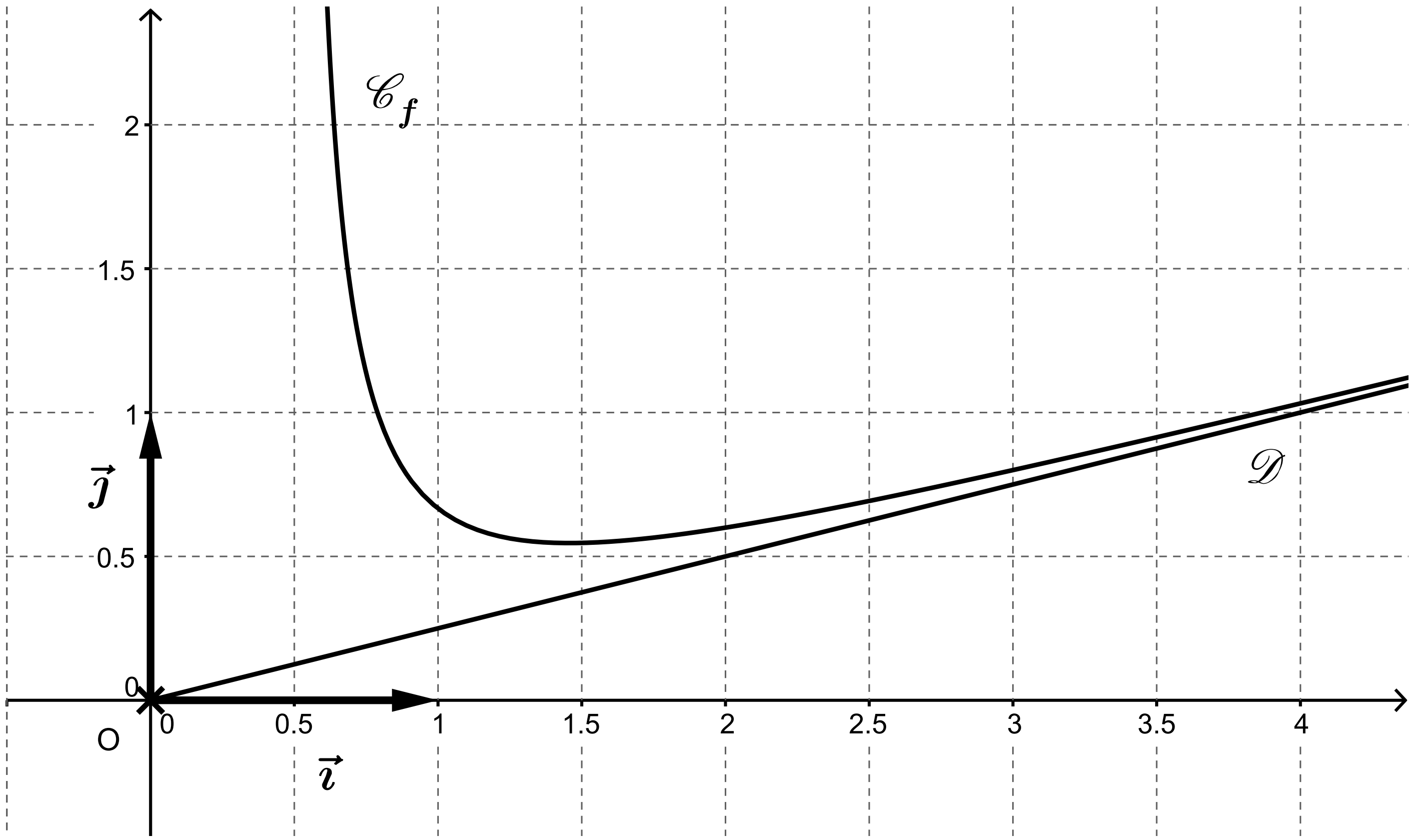
On remplace et il vient que

$$
\begin{aligned}
f(\alpha) &= \frac{3(\alpha+4)}{4(\dfrac{8}{\alpha}+2)} \\
&= \frac{3\alpha(\alpha+4)}{4(8+2\alpha)} \\
&= \frac{3\alpha(\alpha+4)}{8(4+\alpha)} \\
f(\alpha) &= \frac{3}{8}\alpha
\end{aligned}
$$

Or, on a vu que $1{,}45 < \alpha < 1{,}46$ donc $\alpha \approx 1{,}5$ et donc $f(\alpha) \approx \dfrac{3}{8} \times \frac{3}{2} \approx \frac{9}{16}$.

Partie C :

On appelle $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = \dfrac{x}{4}$.



1. a) On conjecture que $\mathscr{C}$ est strictement au-dessus de $\mathscr{D}$ sur $\left[\frac{1}{2};6\infty\right[$.

   b) On conjecture que la distance MN tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte.*

   Pour tout $x > \dfrac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{x}{4} &= \frac{x^3+1}{4x^2-1} - \frac{x}{4} \\ &= \frac{4(x^3+1) - x(4x^2-1)}{4(4x^2-1)} \\ &= \frac{4x^3+4-4x^3+x}{4(4x^2-1)} \\ &= \frac{x+4}{4(4x^2-1)} \end{aligned}$$

On en conclut que pour tout $x > \dfrac{1}{2}$, $f(x) - \dfrac{x}{4} > 0$ et donc que $\mathscr{C}$ est strictement au-dessus de $\mathscr{D}$ sur $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

Par ailleurs, la distance MN n'est autre que $f(x) - \frac{x}{4}$ et

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - \frac{x}{4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+4}{4(4x^2-1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{16x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{16x} = 0$$

La deuxième conjecture est donc démontrée.