Corrigé du DM n°2. TS3.

Exercice 52 p 53. « Le chemin le plus rapide »

1) temps$=\dfrac{\text{distance}}{\text{vitesse}}$ donc $t(x)=\dfrac{AH}{4}+\dfrac{HB}{5}$. De plus $AH=\sqrt{x^2+1}$ (théorème de Pythagore) et $HB=6-x$ donc :

$t(x)=\dfrac{1}{4}\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{5}(6-x)$, soit $\boxed{t(x)=\dfrac{1}{4}\sqrt{x^2+1}-\dfrac{1}{5}(x-6)}$.

2) et 3) La fonction $x\to x^2+1$ est dérivable et ne s'annule pas sur [0 ; 6] donc la fonction $x\to\sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur [0 ; 6]. Par suite, la fonction *t* est dérivable sur [0 ; 6] et on a :

$$t'(x)=\frac{1}{4}\times\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{5}=\frac{5x-4\sqrt{x^2+1}}{20\sqrt{x^2+1}}$$

$t'(x)$ est du signe de $5x-4\sqrt{x^2+1}$ car $20\sqrt{x^2+1}>0$ pour tout *x* de [0 ; 6].

$5x-4\sqrt{x^2+1}>0\Leftrightarrow 5x>4\sqrt{x^2+1}>0\Leftrightarrow 25x^2>16(x^2+1)$ car $5x$ et $4\sqrt{x^2+1}$ sont positifs.

Donc : $5x-4\sqrt{x^2+1}>0\Leftrightarrow x^2>\dfrac{16}{9}\Leftrightarrow x>\dfrac{4}{3}$ (car *x* >0)

On en déduit donc que $t'(x)<0$ sur [0 ; 4/3 [, $t'(x)>0$ sur] 4/3 ; 6] et $t'\left(\dfrac{4}{3}\right)=0$.

La fonction *t* est donc strictement décroissante sur [0 ; 4/3] et strictement croissante sur [4/3 ; 6].
La fonction *t* admet donc un minimum en $x=\dfrac{4}{3}$.

Conclusion : pour que le trajet soit le plus rapide possible, il faut accoster à $\dfrac{4}{3}\approx 1{,}33$ km de O.

Exercice 120 p 130.
Soit u_n le nombre de truites par hectare durant l'année (2010 + *n*). D'après les données de l'énoncé on a donc $u_0=200$ et, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1}=0{,}8u_n+200$. (une baisse de 20% équivaut à multiplier par 0,8)

Cherchons la limite éventuelle de la suite (u_n) .En calculant les premiers termes à la calculatrice, on peut conjecturer que (u_n) converge vers 1000.
On pose alors $v_n=u_n-1\,000$ pour tout *n* entier naturel. (technique déjà vue en classe)

$v_{n+1}=u_{n+1}-1000=0{,}8u_n+200-1000=0{,}8u_n-800$.
Donc $v_{n+1}=0{,}8(u_n-1000)$, c'est à dire $v_{n+1}=0{,}8v_n$.

La suite (v_n) est donc géométrique de premier terme $v_0=-800$ et de rais on 0,8.
Donc pour tout n entier naturel : $\boxed{v_n=-800\times(0{,}8)^n}$.

Or la suite $((0{,}8)^n)$ tend vers 0 car $|0{,}8|<1$, donc la suite (v_n) converge vers 0.

On en déduit alors que la suite (u_n) converge vers 1000.

Cela signifie qu'à terme, au bout de quelques années, la population de truites se stabilisera aux environs de 1 000 individus par hectare.