Chapitre 7 : Fonction inverse.Fonction homographique

Activité : Découvrir la fonction inverse

I) <u>Fonction inverse</u>

1) <u>Définition</u>

<u>Définition 1</u> : On appelle **<u>fonction inverse</u>** la fonction f définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$

<u>Exemples 1</u> : L'inverse de -1 est -1, l'inverse de $\sqrt{2}$ est $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercices 44,45,46 p 120 : images et antécédents par la fonction inverse, résolution d'équations.

2) <u>Tableau de signes de la fonction inverse</u>

Soit f la fonction inverse. Le tableau de signes de f est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de f(x)		-	‖	+	

<u>Remarque</u> **:** La double barre signifie que la fonction f n'est pas définie en 0.

3) <u>Sens de variations</u>

a) <u>Théorème</u>

Théorème 1 : La fonction inverse est strictement décroissante sur] $-\infty$;0[, strictement d décroissante sur]0; $+\infty$ [.

<u>Preuve</u> : Notons f la fonction inverse.

Soient u,v deux nombres réels négatifs non nuls tels que u<v.
On a $f(v)-f(u)=\frac{1}{v}-\frac{1}{u}$, soit $f(v)-f(u)=\frac{u-v}{uv}$.

On en déduit que $f(v)-f(u)<0$.

En conclusion, la fonction inverse est strictement décroissante sur] $-\infty$;0 [.

Soient u,v deux nombres réels positifs non nuls tels que u<v.
On a $f(v)-f(u)=\frac{1}{v}-\frac{1}{u}$, soit $f(v)-f(u)=\frac{u-v}{uv}$.

On en déduit que $f(v)-f(u)<0$.

En conclusion, la fonction inverse est strictement décroissante sur] 0; $+\infty$ [.

<u>Exemple 2</u> : Donner un encadrement de $\frac{1}{x}$ pour $x\in$ [2;3[, $x\in$]-5;-1[, $x\in$ [4;8]

b) <u>Tableau de variations</u>

D'après le théorème 1, le tableau de variations de la fonction inverse f est le suivant:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

Ex 48,49 p 120 : Comparaison et encadrement.

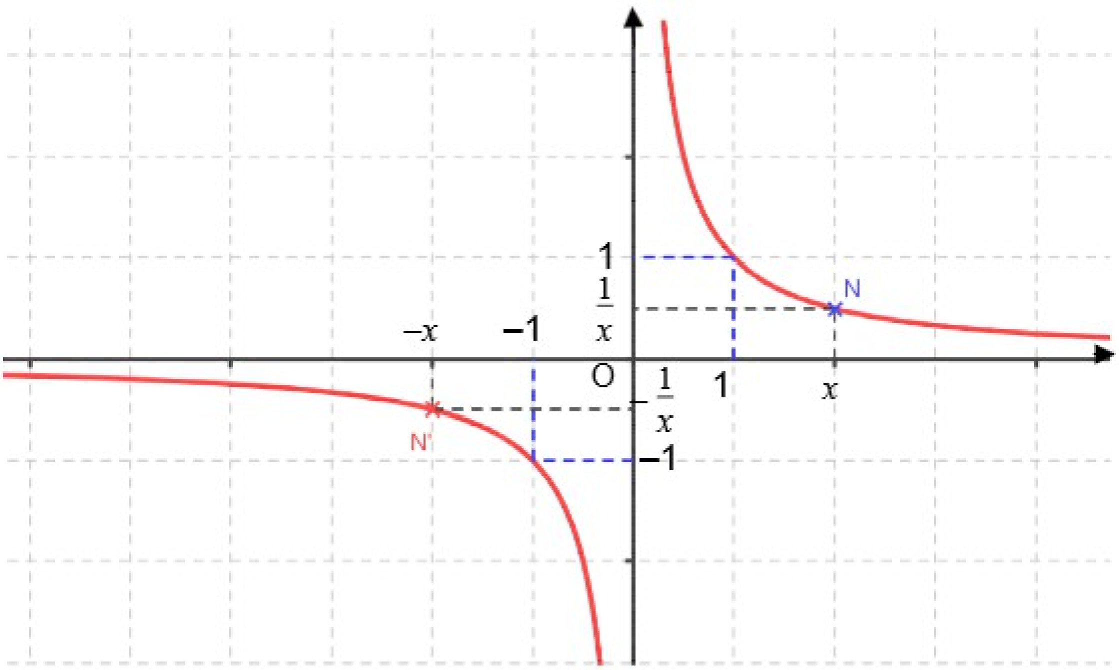
c) <u>Représentation graphique de la fonction inverse</u>

<u>Définition 2</u> : Dans un repère orthogonal, on appelle **<u>hyperbole</u>** la courbe représentative de la fonction inverse.

Théorème 2 : Dans un repère orthogonal d'origine O, la courbe de la fonction inverse admet O comme centre de symétrie.

<u>Preuve</u> : Soit x un nombre réel non nul. Soit N(x; $\frac{1}{x}$) appartenant à l'hyperbole. Le symétrique de N par rapport à l'origine est N'(-x; $\frac{-1}{x}$). Or N' appartient également à l'hyperbole car $\frac{1}{-x}=\frac{-1}{x}$.

En conclusion, la fonction inverse admet O comme centre de symétrie.
<u>Courbe représentative de la fonction inverse :</u> Notons f la fonction inverse de courbe représentative C_f



Exercice 50 p 121 : Résolution graphique d'inéquations

Exercice 73 p 123 : Logique

Exercice 84 p 149 : Sens de variation de fonctions dont la forme algébrique est du type $f(x)=\frac{a}{x}, a \in \mathbb{R}$

II) Fonctions homographiques.

1) Définition

Définition 3 : On dira qu'une **fonction f est homographique** s'il existe quatre nombres réels a,b,c,d, avec c non nul tels que pour tout $x \in \mathbb{R}-\{\frac{-d}{c}\}$, $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$.

Exemple 3 : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ -{ $\frac{-2}{3}$ } par $f(x)=\frac{5x-2}{3x+2}$ est une fonction homographique.

Exemple 4 : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ -{0} par $f(x)=2+\frac{x-2}{3x}$ est une fonction homographique.

Remarque : La somme de deux fonctions homographiques n'est pas une fonction homographique.

Définition 4 : Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction homographique est appelée **hyperbole**

Exercices 66,67 p 123 : Indiquer si des fonctions sont des homographies + domaine de définition

2) Sens de variation d'une fonction homographique

Exemple 5 : A savoir refaire

Soit f la fonction définie sur D_f par $f(x)=\frac{4x}{x+2}$

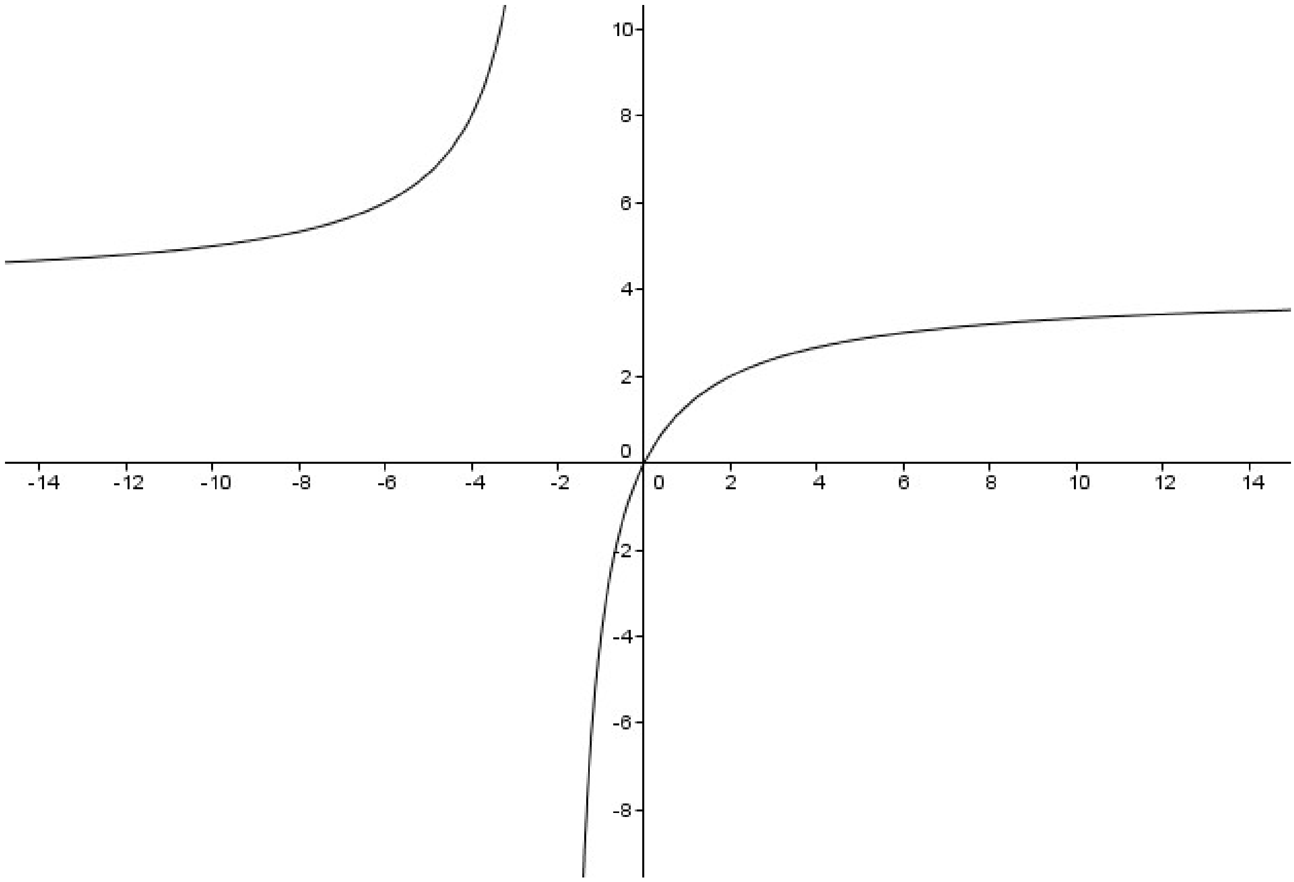
1) Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f

2) Montrer que f est une fonction homographique

3) Démontrer que pour tout $x \in D_f, f(x)=4-\frac{8}{x+2}$

4) En déduire le sens de variations de la fonction f sur D_f

5) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f



Exercice 50,85 p 145-149 : Sens de variations de fonctions homographiques
Exercices 107,108 p 99 : Minimum de fonctions liant fonctions affines et fonction inverse, géométrie.

DM 50 p 145, 107 p 99

3) Équation quotient

a) Théorème

Théorème 3 :Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur est non nul.

c) Exemples

Exemple 6 : Soit f la fonction définie sur D_f par $f(x)=\frac{2x+3}{8x-9}$

1) Déterminer D_f
2) Résoudre l'équation f(x)=0 sur D_f

Exemple 7 : Soit f la fonction définie sur D_f par $f(x)=\frac{8}{3x-2}-\frac{5}{x+1}$

1) Déterminer D_f

2) Résoudre l'équation f(x)=0 sur D_f

Exercices 70,71 72p 123 ,104,105 p 99 : Equations quotient