Chapitre 5: Sens de variation d'une fonction. Fonctions affines.

Activité 1p56

I) Sens de variation d'une fonction

1) Définitions

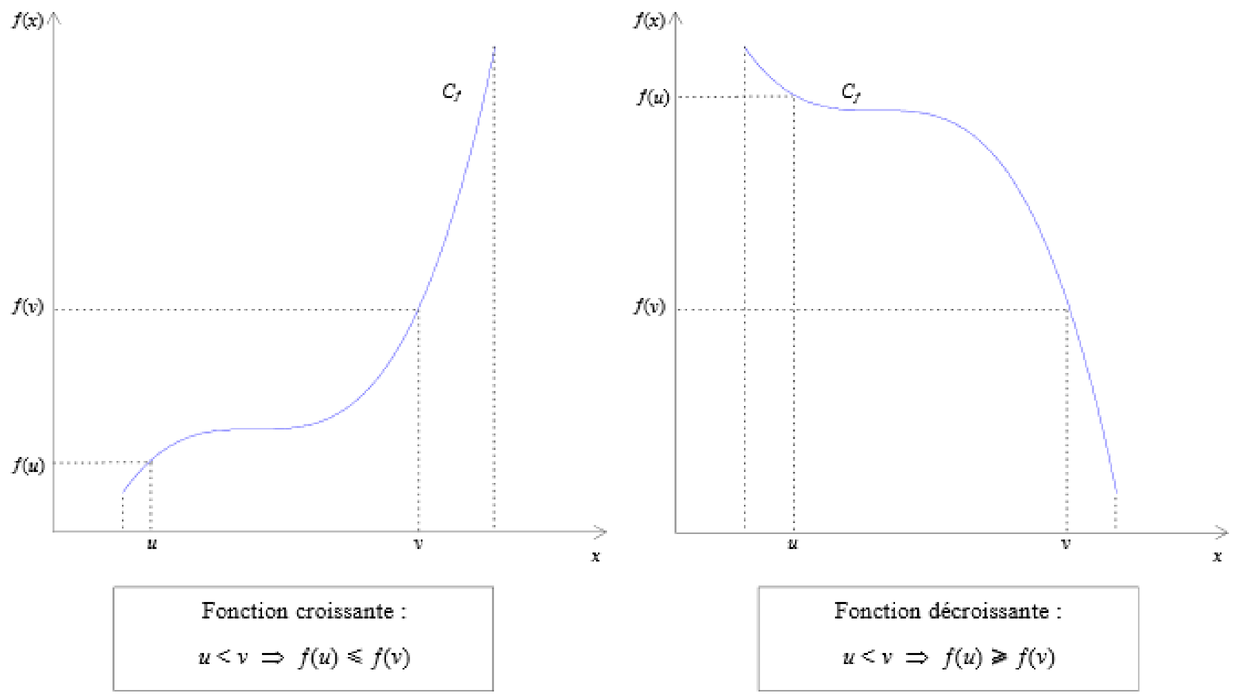
Définitions1: Soit f une fonction, D_f son ensemble de définition, I intervalle inclus dans D_f .
On dit que:

- f est croissante (resp strictement croissante) sur I si: pour tout x,y appartenant à I, $x<y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (resp $x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$)
- f est décroissante (resp strictement décroissante) sur I si: pour tout x,y appartenant à I, $x<y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ (resp $x<y \Rightarrow f(x)>f(y)$)
- f est monotone (resp strictement monotone) sur I si f est croissante ou décroissante sur I (resp strictement croissante ou strictement décroissante).
- f est constante sur I s'il existe un réel k tel que pour tout x appartenant à I, f(x)=k

Remarque: On dit parfois que f est croissante si elle conserve les inégalités et que f est décroissante si elle inverse les inégalités.

2) Illustration graphique

Illustration graphique :

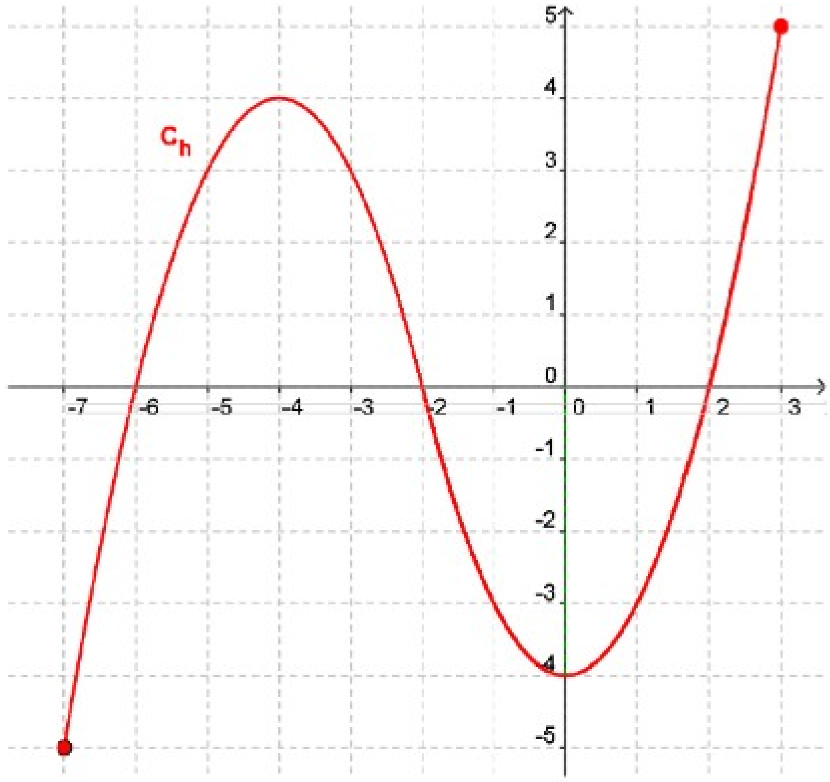


Ex 21p69 (Evolution de la vitesse en fonction du temps, sens de variation)

3) Tableau de variations d'une fonction

Définition 2: On appelle **tableau de variation** d'une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ un tableau indiquant les plus grands intervalles sur lesquels f est strictement croissante (flèche montante) et strictement décroissante (flèche descendante). Ce tableau indique également les valeurs remarquables de la fonction f.

Exemple 1: On donne ci-dessous la représentation graphique d'une fonction h. Déterminer le tableau de variations de cette fonction.



Le tableau de variations de la fonction h est le suivant

x	-7		-4		0		3
h(x)	-5	↗	4	↘	- 4	↗	5

Ex27,29p70 (passer de tableau de variations à représentations graphiques et réciproquement)

4) Maximum et minimum d'une fonction

Définition 3: Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $a \in I$. On dit que:
- f admet un **minimum** en a sur I si pour tout x appartenant à I, $f(x) \geq f(a)$. f(a) est alors appelé minimum de f sur f(I).
- f admet un **maximum** en a sur I si pour tout x appartenant à I, $f(x) \leq f(a)$. f(a) est alors appelé maximum de f sur f(I).
- f admet un **extremum** sur I si f admet un minimum ou un maximum sur I.

Exemple 2: Dans le cas de l'exemple 1, la fonction h admet un maximum en 3 sur l'intervalle [-7;3] et ce maximum vaut 5. La fonction h admet de même un minimum sur l'intervalle [-7;3] en -7 et ce minimum vaut -5.

Exemple 3: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4+(x-3)^2$.
Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$. En quel(s) point(s) ce minimum est-il atteint?

Rédaction: Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(x-3)^2 \geq 0$ (un carré est toujours positif dans $\mathbb{R}$), d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x-3)^2+4 \geq 4$.

En conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \geq 4$. Or f(3)=4.On en déduit donc que la fonction f admet un minimum atteint en 3 sur $\mathbb{R}$ valant 4.

Ex 27,29 p70: Donner maximum et minimum graphiquement ;43,45p71: Minimum et maximum algébriquement.

Activité 4p57

II) Fonctions affines.

1) Définition

Définition 4: Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite affine s'il existe deux nombres réels a, b tels que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, f(x)=ax+b. Le réel a est appelé coefficient directeur, le réel b ordonnée à l'origine.

Remarques:- Si b=0, la fonction f est appelée fonction linéaire.
- Si a=0, la fonction f est constante.

2) Représentation graphique

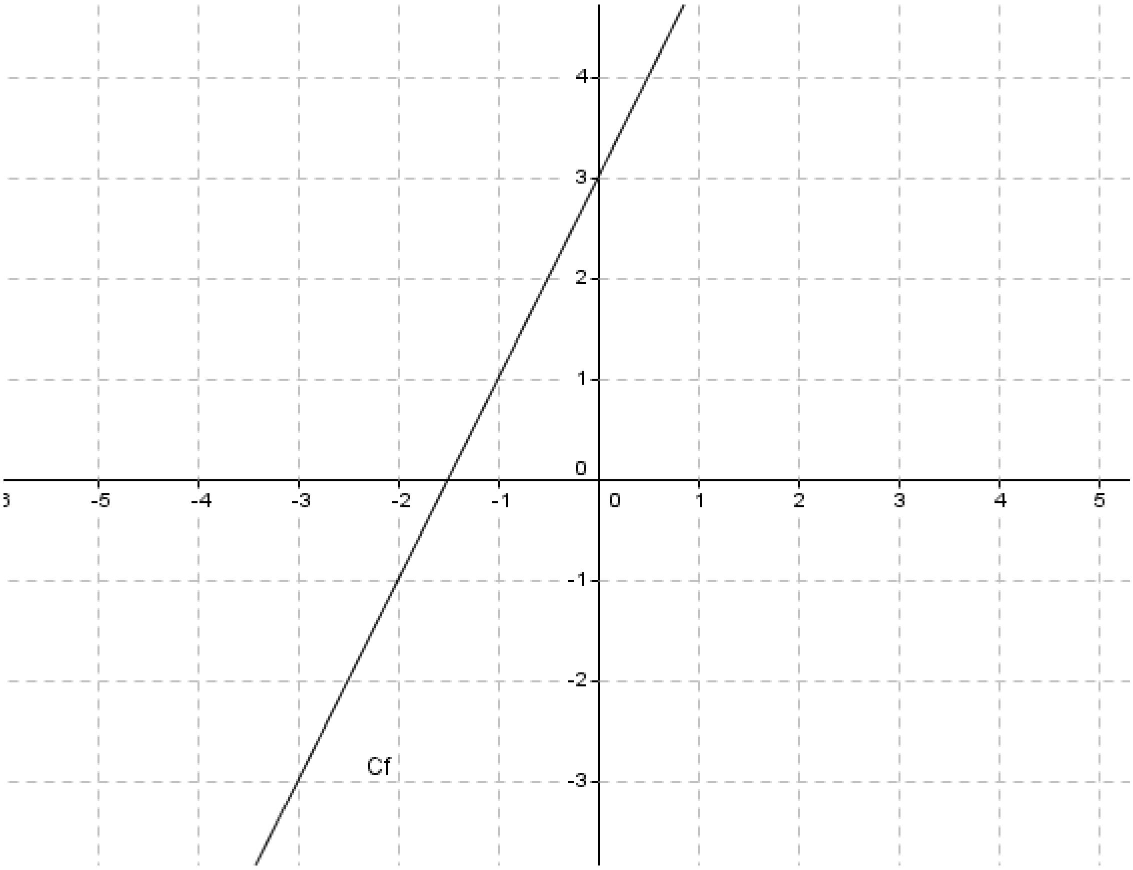
Th1 (admis): La représentation graphique d'une fonction affine dans un repère quelconque est une droite.

Exemple 4: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f(x)=2x+3. Représenter la fonction f.

Méthode: f est une fonction affine. Sa représentation graphique est donc une droite. On a donc besoin de deux points appartenant à C_f pour la représenter.

x	0	-1
f(x)	3	1

On place ensuite les points de coordonnées (0;3) et (-1;1) , puis on les relie.



3) Sens de variation d'une fonction affine.

Th2: Soit f:x $\longmapsto$ ax+b une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$, où a et b sont 2 réels.
- Si a>0, alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- Si a<0, alors la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Preuve: Supposons a>0. Soient u et v deux réels quelconques tel que $u<v$.
Alors $v-u>0$. Or $a>0$ donc $a(v-u)>0$, d'où $f(v)-f(u)>0$.

En conclusion, $f(v)>f(u)$ et donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Supposons désormais a<0. Soient u et v deux réels quelconques tel que $u<v$.
Alors $v-u>0$. Or $a<0$ donc $a(v-u)<0$, d'où $f(v)-f(u)<0$.

En conclusion, $f(v)<f(u)$ et donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Exemple 5: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f(x)=-2x+5. Déterminer le sens de variation de la fonction f.

Rédaction: f est une fonction affine (a= -2,b=5). D'après le théorème 2, la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Ex54p72 (reconnaître une fonction affine, sens de variations)

4) Détermination du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine

Th3: Soit f:x $\longmapsto$ ax+b une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$, où a et b sont 2 réels.

Alors, pour tous nombres u et v distincts, $a=\frac{f(u)-f(v)}{u-v}$, $b=f(u)-u\times\frac{f(u)-f(v)}{u-v}$

Preuve:

Exemple 6: Déterminer la fonction affine f telle que f(1)=1, f(2)=-1.

Rédaction: On cherche a et b appartenant à $\mathbb{R}$ tels pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, f(x)= ax+b.

D'après le théorème 3, on a $a=\frac{f(1)-f(2)}{1-2}$, soit $a=-2$. On a alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$, f(x)=-2x+b. Or f(1)=1, d'où 1=-2+b, soit b=3.

En conclusion, pour tout $x\in\mathbb{R}$, f(x)= -2x+3.

Ex 57,60,61p73: Déterminer algébriquement et graphiquement l'expression d'une fonction affine

5) Tableau de signes d'une fonction affine

Th4: Soit f:x $\longmapsto$ ax+b une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$, $a\neq0$

- Si a>0: le tableau de signe de f est

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		$-$	0	$+$	

- Si a<0: le tableau de signe de f est

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		$+$	0	$-$	

Preuve
:

Exemple 7: Dresser le tableau de signes des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par f(x)=2x+5 et g(x)=-x+8.

x	$-\infty$		$\frac{-5}{2}$		$+\infty$
Signe de f(x)		-	0	+	

x	$-\infty$		8		$+\infty$
Signe de g(x)		+	0	-	

Ex58p73: Changer la question en donner le tableau de signe de la fonction affine f.

Un peu de logique et d'algorithmique pour terminer: Ex 74,76,77p 75
DM ex 73p74: Étude graphique et algébrique de 2fonctions affines, application à la chimie.