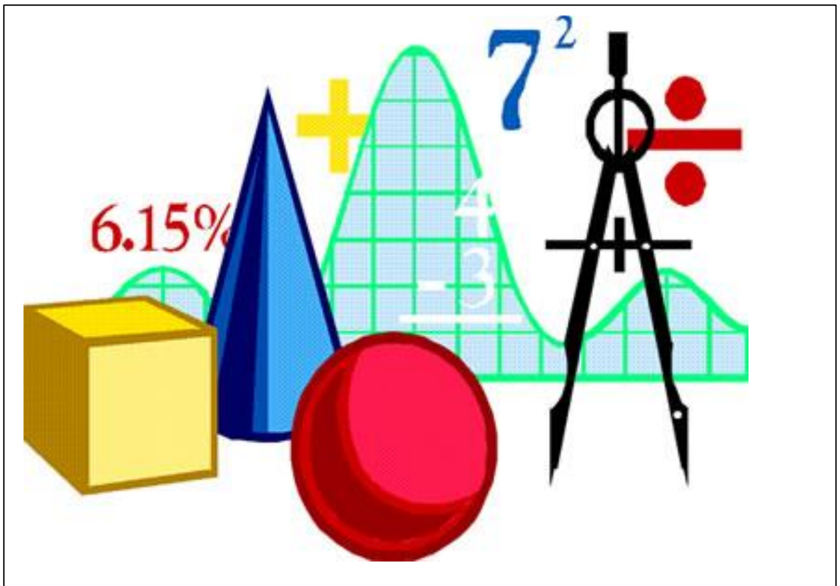
Lycée Jean Jacques ROUSSEAL
Montmorency

Exercices de Mathématiques 1ère ES



Pour préparer la rentrée en T.ES

Fonctions, équations et inéquations

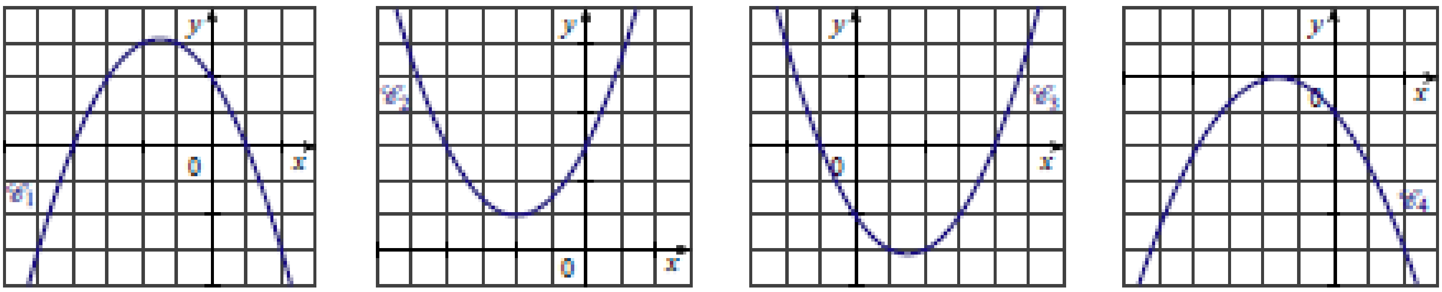
Exercice 1

<u>Rappel :</u> Une fonction polynôme du second degré P est une fonction définie pour tout nombre réel x par :

$$P(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a \neq 0.$$

1. Soit f une fonction polynôme du second degré telle que le maximum de la fonction f soit égal à 0. Parmi les propositions suivantes quelles sont celles qui sont exactes ?
   a) $a > 0$ et $\Delta < 0$.
   b) $a < 0$ et $\Delta = 0$.
   c) $a < 0$ et $\Delta < 0$.
   d) La courbe représentative de la fonction f coupe l'axe des abscisses en deux points.
   e) L'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution.

2. Les 4 paraboles ci-dessous, sont les courbes représentatives de quatre fonctions polynôme du second degré f_1, f_2, f_3 et f_4 .



À partir des informations données sur le signe de a et sur le discriminant, associer à chaque fonction sa courbe représentative :

f_1 : $a > 0$ et $\Delta < 0$; f_2 : $a > 0$ et $\Delta > 0$; f_3 : $a < 0$ et $\Delta = 0$; f_4 : $a < 0$ et $\Delta > 0$.

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   a) $2x^2 + 3x - 2 = 0$
   b) $5x^2 - 9x + 3 = -4x^2 + 3x - 1$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
   a) $-6x^2 - x + 2 \geq 0$
   b) $4x^2 < 8x - 3$

Exercice 3

L'offre et la demande désignent respectivement la quantité d'un bien ou d'un service que les acteurs du marché sont prêts à vendre ou à acheter à un prix donné.
Une étude concernant un article A a permis d'établir que :

- La fonction d'offre f est donnée par : $f(q) = 0{,}5q$
- La fonction de demande g est donnée par : $g(q) = \frac{78-6q}{q+8}$

Où $f(q)$ et $g(q)$ sont les prix d'un article en euros, pour une quantité q comprise entre 1 et 12 millions d'unités.

1. À l'aide du graphique précédent et en argumentant la réponse, déterminer si la demande est excédentaire quand le prix de vente d'un article est de 1 e.
2. On suppose dans cette question que le prix de vente d'un article est de 4,50 €.
   a) Calculer la quantité d'articles offerte sur le marché ;
   b) Calculer la quantité d'articles demandée sur le marché ;
   c) Quel problème cela pose-t-il ?
3. On dit que le marché est à l'équilibre lorsque, pour un même prix, la quantité offerte est égale à la quantité demandée.
   Déterminer le prix d'équilibre et la quantité associée.

Exercice 4

Une entreprise fabrique un produit « Bêta ». La production mensuelle ne peut pas dépasser 15 000 articles.
Le coût total, exprimé en milliers d'euros, de fabrication de x milliers d'articles est modélisé par la fonction C définie sur $]0;15]$ par : $C(x)=0{,}5x^2+0{,}6x+8{,}16$

La représentation graphique Γ de la fonction coût total est donnée dans l'annexe ci-dessous.
On admet que chaque article fabriqué est vendu au prix unitaire de 8 €.

1. Qu'est ce qui est plus avantageux pour l'entreprise fabriquer et vendre 4 000 articles ou fabriquer et vendre 12 000 articles ?

2. On désigne par $R(x)$ le montant en milliers d'euros de la recette mensuelle obtenue pour la vente de x milliers d'articles du produit « Bêta ». On a donc $R(x) = 8x$.

a) Tracer dans le repère donné en annexe la courbe D représentative de la fonction recette.

b) Par lecture graphique, déterminer :
- l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice ;
- la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.

3. On désigne par $B(x)$ le bénéfice mensuel, en milliers d'euros, réalisé lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles.

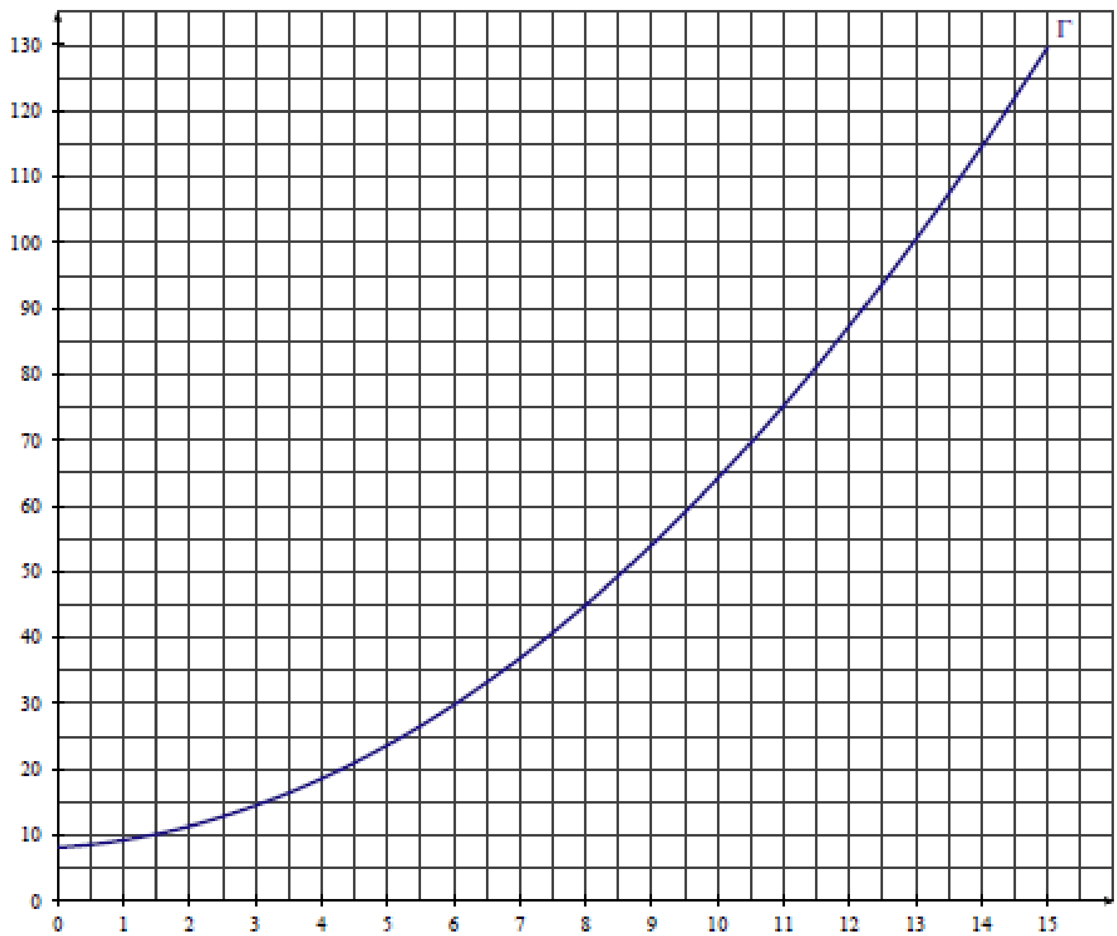
a) Montrer que le bénéfice exprimé en milliers d'euros, lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles, est donné par $B(x) = -0{,}5x^2 + 7{,}4x - 8{,}16$ avec $x \in]0;15]$.

b) Étudier le signe de $B(x)$. En déduire l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice

c) Montrer que : pour tout réel $x \in]0 ; 15]$, $B(x) = -0{,}5(x-7{,}4)^2 + 19{,}22$

d) Construire le tableau de variations de la fonction B sur $]0;15]$.

En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euros, de ce bénéfice maximal ?



Pourcentages

Exercice 5

1. Après une hausse de 8% le prix d'un article est de 243e. Quel était le prix de cet article avant la hausse ?
2. Après une baisse de 5% le prix d'un article est de 152e. Quel était le prix de cet article avant la baisse ?
3. Quel est le pourcentage d'évolution d'un article qui baisse successivement de 8% puis de 5% ?
4. Le cours d'une action a baissé de 20%. Quel devra être le taux du pourcentage d'augmentation pour que cette action retrouve son cours initial ?

Exercice 6

Dans un sondage, à la question « Êtes-vous satisfait des services proposés ? », 64 % des femmes et 42 % des hommes interrogés ont répondu « oui ».
Dans l'ensemble des personnes interrogées, il y avait 65 % d'hommes. Peut-on considérer que les affirmations suivantes sont vraies ?

1. « Plus de la moitié des personnes interrogées sont satisfaites des services proposés ».
2. « Près de 45% des personnes satisfaites des services proposés sont des femmes ».

Exercice 7

Pendant la période des soldes, un magasin affiche une remise de t % sur les prix des différents articles. Pour les clients titulaires de la carte de fidélité, une remise supplémentaire de t % sur le prix soldé est accordée.
Un client qui bénéficie de ces deux remises paye 180 € un article dont le prix initial était de 250 €.
Calculer la valeur du taux t.

Exercice 8

(d'après sujet métropole, bac ES 2012)

Sur le site http://www.agencebio.org, on a extrait des informations concernant l'agriculture en France métropolitaine.

Document 1

En 2008, la surface agricole utilisée (SAU) était de 27 537 688 hectares dont 583 799 hectares en mode de production biologique.

Document 2

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Surface en mode de production biologique (en hectares)	419 750	517 965	550 990	534 037	550 488	552 824	557 133	583 799
Part (en %) de la surface en mode de production biologique dans la SAU : y_i	1,4	1,75	1,87	1,93	1,99	2	2,02	2,12

1. D'après le document 2, la part de la surface en mode de production biologique dans la SAU est de 2,12 % en 2008. En utilisant le document 1, justifier par un calcul cette information.
2. Calculer le pourcentage d'évolution de la surface en mode de production biologique entre 2007 et 2008. Ce pourcentage sera arrondi à 0,01 %.

Exercice 9

(d'après sujet métropole, bac ES 2010)

Pour i nombre entier variant de 0 à 8, on définit le tableau suivant qui donne les valeurs du SMIC horaire brut, exprimé en euros, de 2001 à 2009 (source INSEE).

On se propose d'en étudier l'évolution :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
SMIC horaire brut (en euros), y_i	6,67	6,83	7,19	7,61	8,03	8,27	8,44	8,71	8,82

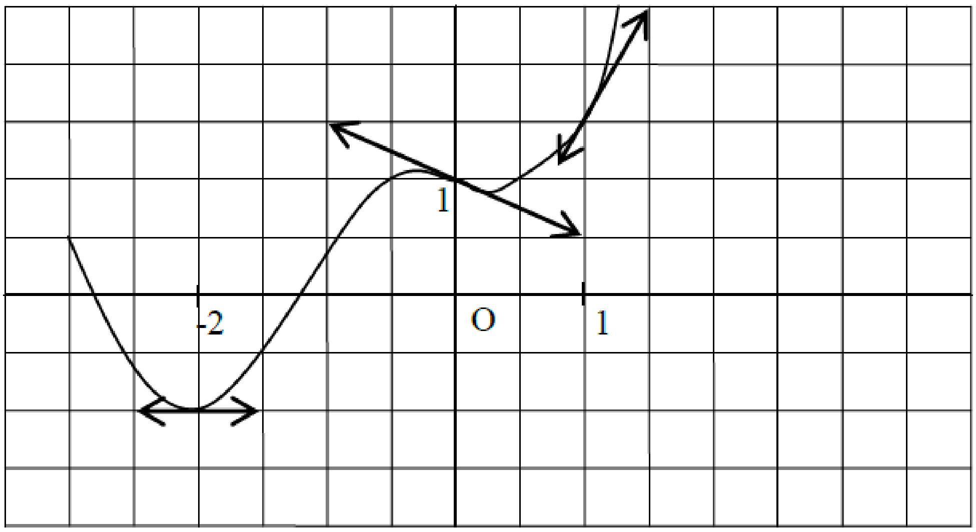
Dans tout l'exercice les pourcentages seront arrondis à 0,01% et les valeurs du SMIC horaire brut au centime d'euro.

1. Pour i entier variant de 0 à 8, représenter le nuage de points $M_i\,(x_i\ ;\ y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal défini de la façon suivante :
   - sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 1 cm pour 1 année,
   - on graduera l'axe des ordonnées en commençant à 6 et on choisira 5 cm pour 1 euro.
2. Calculer le pourcentage d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2001 et 2009.
3. Démontrer qu'une valeur approchée du pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2001 et 2005 est 4,75 %.

Dérivation

Exercice 10

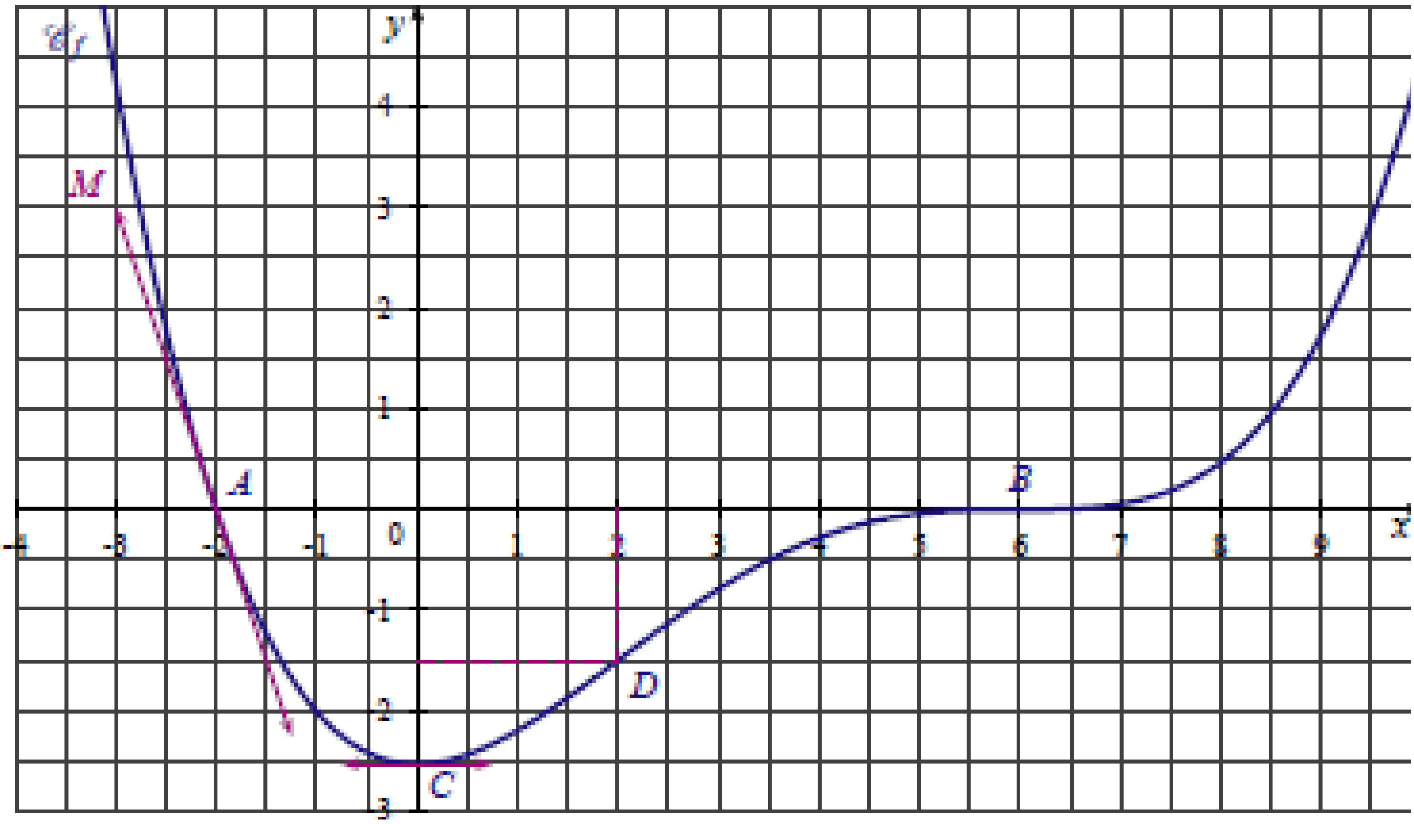
Une fonction f est représentée sur le graphique ci-dessous. En vous servant du quadrillage, compléter :



$f(-2) = \ldots$ $f'(-2) = \ldots$ $f(0) = \ldots$ $f'(0) = \ldots$ $f(1) = \ldots$ $f'(1) = \ldots$

Exercice 11

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la dérivée de la fonction f.
On donne ci-dessous la courbe $\mathrm{C}f$ représentant la fonction f.
La courbe $\mathrm{C}f$ coupe l'axe des abscisses au point $A(-2;0)$ et lui est tangente au point B d'abscisse 6.
La tangente à la courbe au point A passe par le point $M(-3;3)$.
La courbe $\mathrm{C}f$ admet une deuxième tangente parallèle à l'axe des abscisses au point C d'abscisse 0.



À partir du graphique et des données de l’énoncé, répondre aux questions suivantes.

1. Dresser sans justification le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Les réponses aux questions suivantes devront être justifiées.

2. a) Déterminer $f'(0)$.

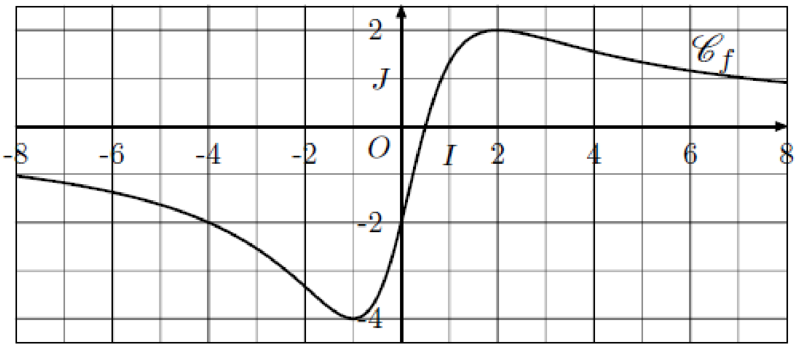
b) Déterminer les solutions de l’équation $f'(x) = 0$.

c) Dresser le tableau de signe de la dérivée f'

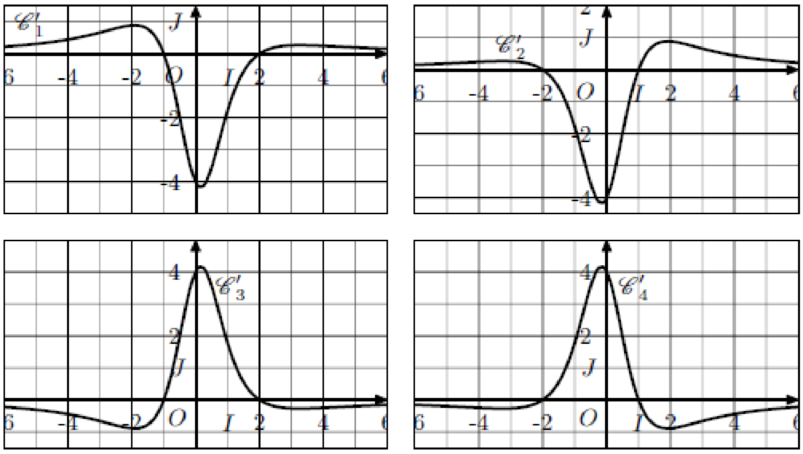
3. Déterminer la valeur de $f'(-2)$. En déduire une équation de la tangente à la courbe Cf au point A.

Exercice 12

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui admet dans le repère (O, I, J).
La courbe Cf pour représentation :



Parmi les quatre courbes C'_1 , C'_2, C'_3 et C'_4 présentées ci-dessous, déterminer la courbe représentative de la fonction $f\,'$, dérivée de la fonction f. Justifier votre choix.



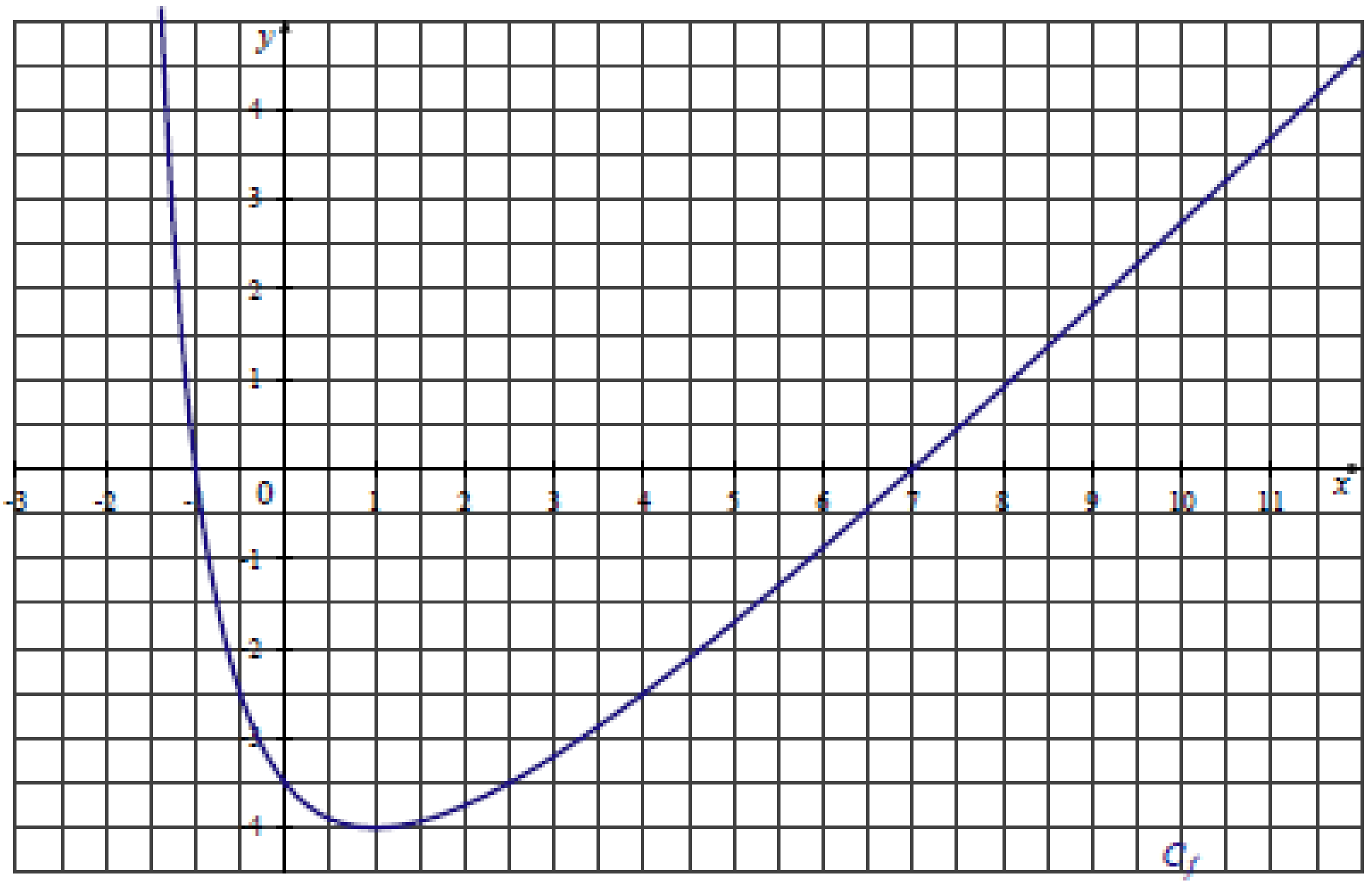
Exercice 13

Dans chaque cas, déterminer l'expression de la dérivée f' (sans déterminer l'ensemble de dérivabilité)

a. $f(x) = 3\,x^2 + 5x$
b. $g(x) = \frac{3}{x} + 2\sqrt{x}$
c. $h(x) = 5x^3 - \frac{3}{x}$
d. $i(x) = \frac{8x-1}{x+2}$
e. $j(x) = (2x^2 - 1)(4x - 1)$
f. $k(x) = (x^2 - 3)\sqrt{x}$

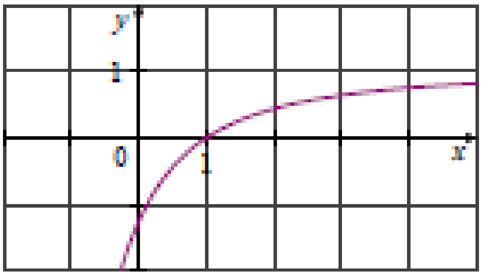
Exercice 14

On a tracé ci-dessous, la courbe représentative Cf d'une fonction f définie sur l'intervalle $]-2;+\infty[$. On note f' la dérivée de la fonction f.

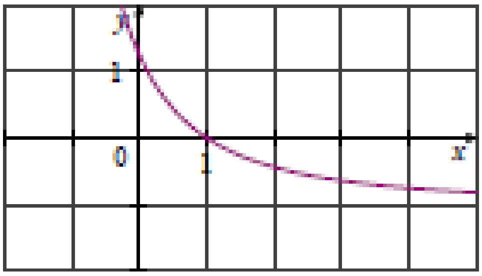


PARTIE A

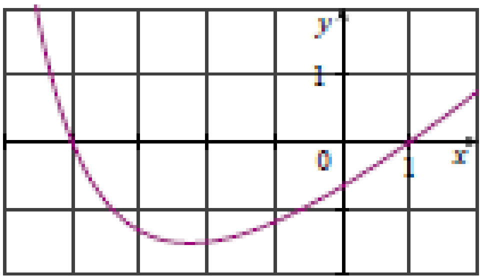
1. Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et de $f'(1)$
2. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f'. Déterminer laquelle.



Courbe C_1



Courbe C_2



Courbe C_3

PARTIE B

La fonction f est définie sur l'intervalle $]-2;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2-6x-7}{x+2}$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Donner le tableau complet des variations de f.

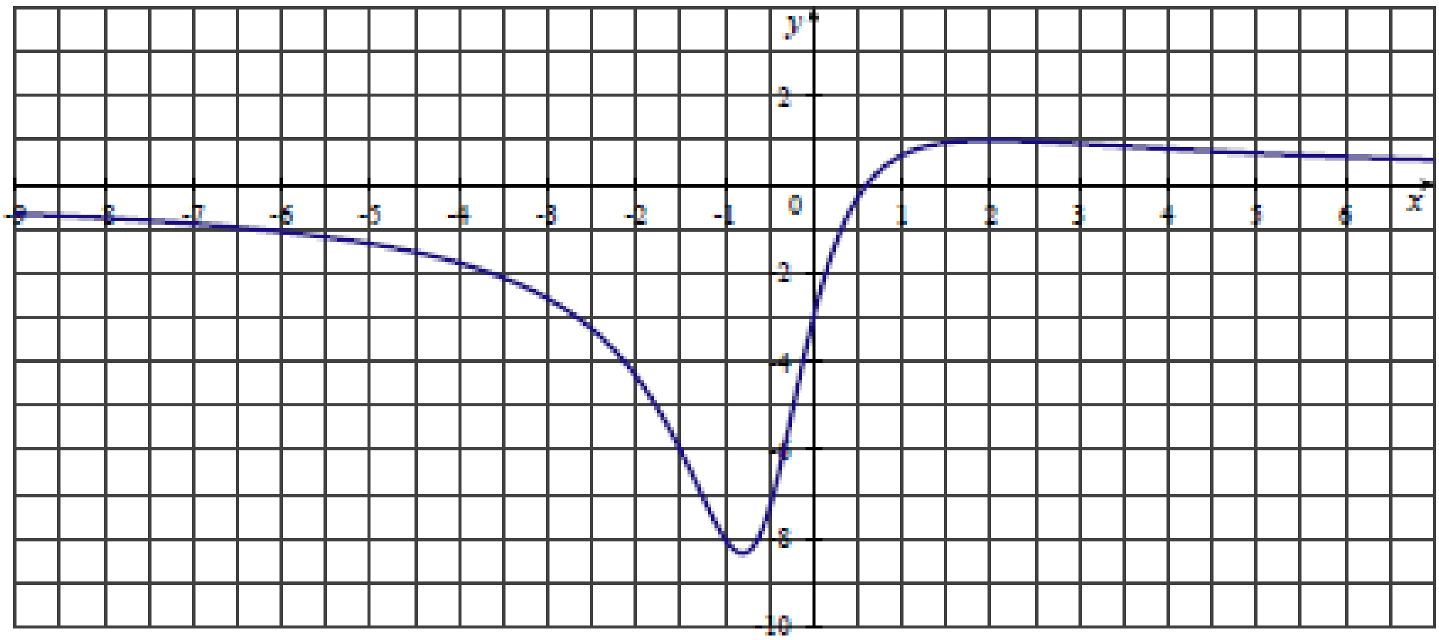
Exercice 15

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{5x-3}{x^2+x+1}$

On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

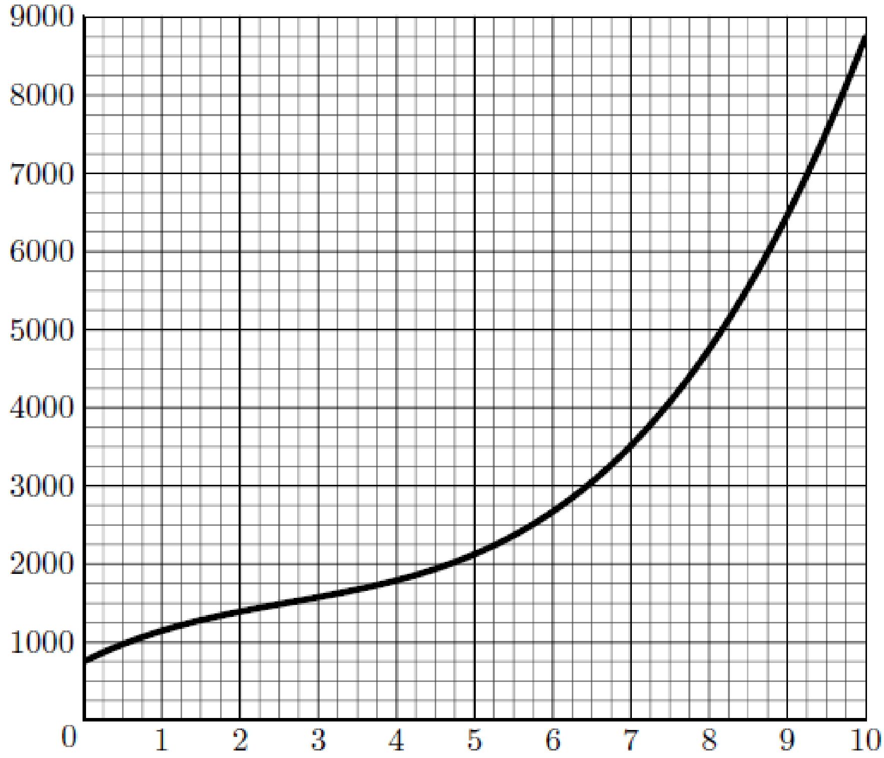
1. On note f' la dérivée de la fonction f, calculer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction f.
3. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point A d'abscisse $-\frac{3}{2}$

   Représenter la tangente T sur le graphique ci-dessous



Exercice 16

L'entreprise CoTon produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur x exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.
Le coût total de production en euros de l'entreprise CoTon est donné en fonction de la longueur x par la formule :
$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750$.
Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique de la fonction C.



Partie A : Etude du bénéfice

Si le marché offre un prix p en euros pour un kilomètre de ce tissu, alors la recette de l'entreprise CoTon pour la vente d'une quantité x est égal à $R(x) = px$.

1. Tracer sur le graphique la droite $D1$ d'équation : $y = 400x$.
Expliquer, au vu de ce tracé, pourquoi l'entreprise CoTon ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix p du marché est égal à 400 euros.

2. Dans cette question on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros.

a. Tracer sur le graphique la droite $D2$ d'équation $y = 680x$.
Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise CoTon réalise un bénéfice si le prix p du marché est de 680 euros.

b. On désigne par $B(x)$ le bénéfice, en euros, réalisé par l'entreprise pour pour la vente d'une quantité x *km* de tissu
Montrer que la fonction B définie sur l'intervalle [0 ; 10] par $B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750$.

c. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; 10] on a : $B'(x) = -45x^2 + 240x + 180$

d. Etudier les variations de la fonction B sur [0 ; 10]
En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise CoTon est maximum.
Donner la valeur de ce bénéfice.

Partie B : étude du coût moyen

On rappelle que le coût moyen de production C_M mesure le coût par unité produite. On considère la fonction CM définie sur l'intervalle [0 ; 10] par : $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$

1. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; 10] , on a : $C_M'(x) = \frac{30(x-5)(x2+x+5)}{x^2}$

2. a. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; 10] , $C_M'(x)$ est du signe de $(x - 5)$.
En déduire les variations de la fonction C_M sur l'intervalle [0 ; 10]

b. Pour quelle quantité de tissu produite le coût moyen de production est-il minimum?
Que valent dans ce cas le coût moyen de production et le coût total ?

Exercice 17

Partie A

1. Le prix d'un article est de 120 euros. Ce prix subit une première évolution au taux de 25%, puis une seconde évolution qui le ramène à sa valeur initiale. Quel est le taux de la deuxième évolution ?

2. Le prix d'un article est de 120 euros. Ce prix subit une première évolution au taux de – 20%, puis une seconde évolution qui le ramène à sa valeur initiale. Quel est le taux de la deuxième évolution ?

Partie B

D'une façon générale, un prix P subit deux évolutions successives, la première à un taux de x % , et la deuxième à un taux de y %. Il revient alors à sa valeur initiale P.

1. Montrer que x et y vérifient : $(1 + x)(1 + y) = 1$.
On admet alors que $y = -\frac{x}{1+x}$

2. On veut étudier sur l'intervalle $[-0{;}5\ ;\ 2]$ la fonction f telle que : $f(x) = -\frac{x}{1+x}$
Soit C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

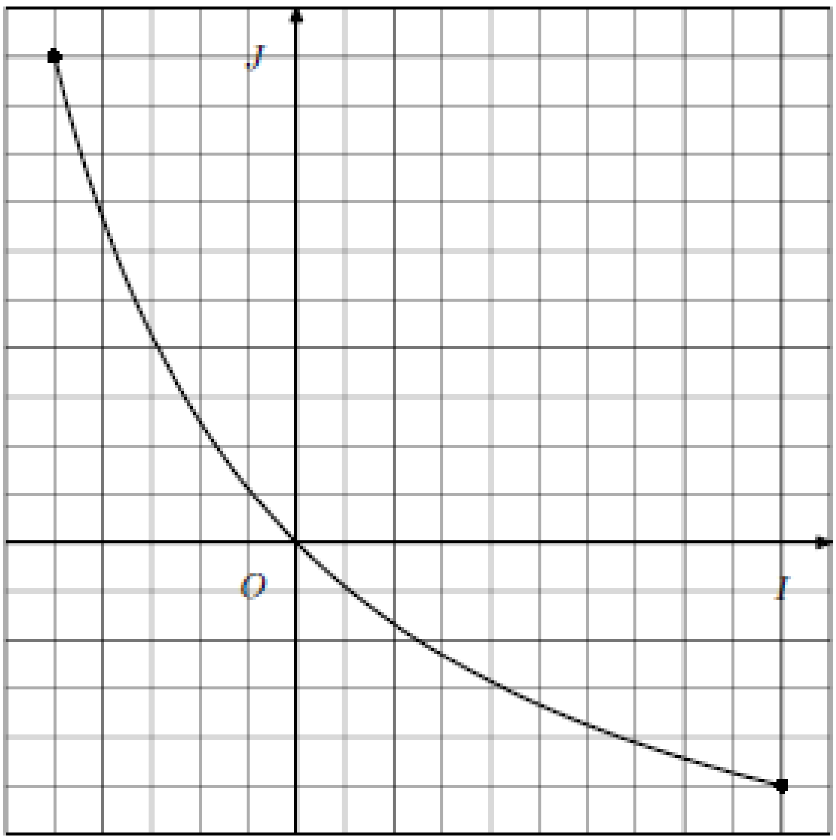
a. On note $f\,'$ la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.

b. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-0{;}5\ ;\ 2]$ et dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

3. A l'aide de la représentation graphique de la courbe C donnée en annexe, ou à l'aide d'un calcul, répondre aux questions suivantes :

a. Quelle évolution faut-il faire subir à un prix augmenté de 50% pour retrouver le prix initial ?

b. Quelle évolution faut-il faire subir à un prix diminué de 50% pour retrouver le prix initial ?



Suites numériques

Exercice 18

Voici des suites définies sur ℕ :

a) u_n = n² – n, n∈ ℕ

b) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n \end{cases}$, n∈ ℕ

c) u_n =$3n - 1$, n∈ ℕ

Pour chacune des suites,

1. Déterminer les trois premiers termes et les représenter graphiquement
2. Déterminer si les suites sont arithmétiques ou géométriques.
   Si oui, préciser la raison
3. Déterminer le sens de variation de ces suites

Exercice 19

Les 2 questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit (u_n) la suite définie par u_0= −12 et pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = u_n + \frac{5}{6}$.
   a) Exprimer u_n en fonction de *n*
   b) Calculer u_{42}
2. (v_n) est une suite géométrique de raison *q* strictement positive telle que v_4 = 48, $v_6 = \frac{64}{3}$.
   a) Déterminer *q*
   b) Exprimer v_n en fonction de *n*
   c) En vous aidant de la calculatrice, déterminer l'entier *p* tel que $v_p = \frac{256}{27}$

Exercice 20

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel *n* par $w_n = 16 \times 0{,}5^n - 1$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite (w_n).

2. Étudier la monotonie de la suite (w_n).

Exercice 21

Albert dispose d'un capital initial C_0 = 3000 euros.
Pour le placement A, le taux annuel est de 6% à intérêts simples. C'est-à-dire que le capital d'une année est égal à celui de l'année précédente augmenté de 6% du capital initial.
Pour le placement B, le taux annuel est de 4% à intérêts composés. C'est-à-dire que le capital d'une année est égal à celui de l'année précédente augmenté de 4%.
On note C_n le capital d'Albert au bout de n années avec le placement A et D_n le capital d'Albert au bout de n années avec le placement B, capital exprimé en euros.

1. Calculer le capital pour chacun des deux placements après une année puis après deux années.
2. Quelle est la nature de la suite (C_n) ? Pour tout entier n, exprimer alors C_n en fonction de n.
3. Quelle est la nature de la suite (D_n) ? Pour tout entier n, exprimer alors D_n en fonction de n.
4. Déterminer le nombre d'années n nécessaires pour que le capital double avec le placement A.
5. Quel est le placement le plus avantageux au bout de dix années ?
6. En utilisant le tableur de la calculatrice, déterminer le nombre d'années nécessaires pour que le placement B soit plus avantageux que le placement A.

Probabilités

Exercice 22

Le comité d'entreprise d'une société parisienne souhaite organiser un week-end en province.
Une enquête est faite auprès des 1 200 employés de cette entreprise afin de connaître leur choix en matière de moyen de transport *(les seuls moyens de transport proposés sont le train, l'avion ou l'autocar)*
Les résultats de l'enquête auprès des employés de l'entreprise sont répertoriés dans le tableau suivant :

	Train	Avion	Autocar	Total
Femme	468	196	56	720
Homme	150	266	64	480
Total	618	462	120	1200

On interroge au hasard un employé de cette entreprise *(on suppose que tous les employés ont la même chance d'être interrogés)*.
F l'évènement : "*l'employé est une femme*" ;
T l'évènement : "*l'employé choisit le train*".

1. Calculer les probabilités $P(F)$, $P(T)$ puis déterminer la probabilité que l'employé ne choisisse pas le train *(on donnera les résultats sous forme décimale)*
2. a. Déterminer la probabilité de l'évènement $F \cap T$.
b. En déduire la probabilité de l'évènement $F \cup T$.
3. En choisissant un employé au hasard parmi les employés n'ayant pas choisi le train, quelle est la probabilité que cet employé soit une femme ? *(on donnera le résultat arrondi au millième)*

Exercice 23

Cinq garçons et trois filles participent écrivent leur nom sur un bout de papier et l'insère dans une urne.
On extrait, successivement et avec remise, deux bouts de papier de l'urne. On considère que les deux tirages sont indépendants.

1. A chaque tirage, on regarde si le papier tiré désigne un garçon ou une fille.
Construire l'arbre pondéré lié à cette expérience.
2. Soit X la variable aléatoire associant à une issue de ce tirage le nombre de filles sélectionnées.
a. Déterminer la loi de probabilité de X.
b. Calculer son espérance mathématique de $E(X)$.

Exercice 24

Des effets secondaires peuvent apparaître suite à l'absorption du médicament Daubitol. Des tests ont montré que la probabilité qu'un patient subisse des effets secondaires est p = 0,014. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de patients subissant des effets secondaires sur un échantillon de 1500 patients. On considère qu'il n'y a aucun lien entre les patients.

1. Quelle loi suit X ?
2. On considère un échantillon de 1500 patients. Calculer le nombre moyen m de patients subissant des effets secondaires sur cet échantillon.