Sujets 2016-2017

Atelier Maths en Jeans du Lycée B. Pascal, Orsay

1 des petits carrés

On se propose de mesurer l'aire (surface) d'une figure dans le plan par l'algorithme suivant :

— On place à l'intérieur le plus grand carré possible (qui soit contenu dans la figure de départ). On note son aire

— On place à l'intérieur de la figure restante (dont on a oté ce carré) à nouveau le plus grand carré possible. On additionne son aire a celle du carré précédent.

— On recommence

L'algorithme donne-t-il une bonne approximation (après un grand nombre d'opérations) de l'aire de la figure initiale ? Que se passe-t-il si on prend des triangles au lieu de carrés ?, des disques ?

2 La fin des de la Brie

Au Xème siècle, le comte de la Brie est inquiet pour sa descendance. Depuis d'innombrables générations, la tradition veut que chaque de la Brie ait exactement trois enfants (filles ou garçons). La famille est très croyante et envoie certains de ses membres dans un monastère. Le jour de la naissance d'un enfant, la mère lance une pièce de monnaie. En cas de pile, il devra entrer dans un monastère, sinon il fondra une famille pour perpétuer la tradition. Sachant qu'à l'époque, une femme prenait toujours le nom de son mari, le comte se demande si son nom s'éteindra un jour ou s'il y a des chances de se perpétuer indéfiniment. Que se passera-t-il si le comte décide d''interdire à ses descendants d'entrer au monastère.

3 Jetons dans tableau

Soit ABCD un tableau rectangulaire dans lequel $AB = 20$ et $BC = 12$. Ce tableau est subdivisé en 20×12 carrés unités. On se donne un entier strictement positif r. Un jeton peut se déplacer d'un jeton à un autre si et seulement si la distance entre les centre de ces deux carrés est exactement égale à $\sqrt{r}$ Est-il possible d'imaginer une suite de déplacements menant le carré de sommet A à celui de sommet de sommet B.

4 Fête des voisins

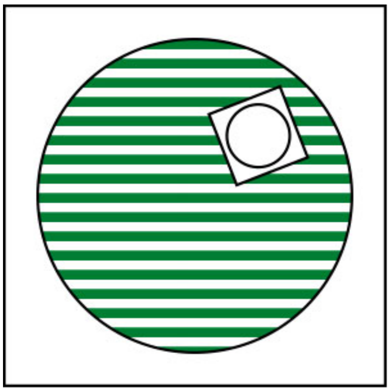
On dispose d'un tableau $n \times n$ et on place un nombre réel sur chaque case de son bord.
Est-il possible de remplir le reste du tableau de telle sorte que chaque case soit la moyenne des quatre adjacentes ? Et des 8 adjacentes ?
Peut-on faire la même chose avec des nombres entiers ?

5 Le championnat

La ligue de football de l'Essonne a décidé cette année de lutter contre le réchauffement climatique. Le championnat jeunes regroupe 30 équipes réparties en 5 poules de 6. Pour la première fois, les poules ne seront plus tirées au hasard, mais de façon à minimiser les trajets pour les rencontres (les parents vont être contents). Le problème c'est que les responsables ne savent pas trop comment faire pour déterminer les poules. Pouvez-vous les aider ?

6 Là où se trouve le trésor

On trouve souvent chez les antiquaires toutes sortes de cartes. L'autre jour que je furetai chez l'un d'entre eux, je tombai sur deux cartes d'une même île, l'une de 1 mètre sur 1 mètre et l'autre, parfaite copie de la première, de 20 cm sur 20 cm, mises l'une sur l'autre comme sur le dessin :



Chose extraordinaire, il y avait un point où les deux cartes se superposaient ! Après un moment de réflexion, je trouvai cela normal... Mais quelle ne fut pas ma surprise lorsque je jetai sur la grande carte une vieille carte toute déformée de cette même île : il y avait toujours un point où les deux cartes figuraient le même endroit. Je restai pensif... Pourrez-vous m'aider ?

7 Agence de sécurité

Une agence de sécurité propose de sécuriser votre maison à base d'un faisceau qui déclencherait une alarme dès qu'il est coupé. Ce faisceau peut rebondir sur différents miroirs.
Sur l'exemple de la figure 1, on peut voir un seul faisceau parcourant les 7 pièces. Mais cela n'empêche pas le passage de la pièce 2 à la pièce 6 sans le couper. L'entreprise vous engage pour réfléchir sur les possibilités d'optimiser la sécurité à moindre coût. De nouveaux contrats pourront arriver avec différentes configurations pour les pièces.

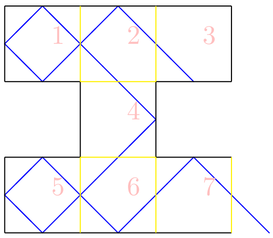


FIGURE 1 – Sécurité : les traits jaunes délimitent les pièces mais ne gênent pas pour passer.

8 La guerre des Gaules

Deux villages gaulois Rififix et Pacifix sont voisins depuis toujours mais ne peuvent pas se supporter. Chaque année, pour chaque village, on observe que :

— chaque habitant du village a un enfant avec probabilité p_e,

— chaque habitant a une probabilité p_{mn} de mourir naturellement,

— chaque habitant a une probabilité p_t^R (pour le village Rififix, resp. p_t^P pour le village Pacifix) d'être tué par le village adverse. On admettra que si l'année d'avant, il y a N_R habitants dans le village Rififix et N_P dans le village Pacifix alors $p_t^R = \frac{cN_R}{N_R+N_P}$ et $p_t^P = \frac{cN_P}{N_R+N_P}$ avec $c \in]0;1[$.

Que va-t-il se passer si les deux villages continuent à se faire la guerre ?
Que se passera-t-il si le village Pacifix décide d'être moins agressif que le village Rififix (c'est-à-dire que c dépend du village avec $c_P < c_R$) pour se concentrer sur une meilleure natalité (c'est-à-dire que $p_e^P > p_e^R$) ?

9 Indicateurs

En Mathématiques (et plus généralement en sciences) les chercheurs, quand ils ont obtenu des résultats, les publient sous forme d'articles dans des journaux spécialisés. Ces articles, en général reposent ou utilisent des résultats antérieurs d'autres chercheurs qui les ont publiés antérieurement, et donc citent ces résultats. Pour chaque chercheur "A", on dispose donc (dans une base de donnée accessible) de la liste des articles qu'il a publiés et de la liste des travaux des chercheurs "B" qui citent les articles du chercheur"A". Ce travail bibliométrique permet donc de disposer pour chaque chercheur "A" du nombre d'article qu'il a publiés N_A, et pour chacun des articles du chercheur A du nombre de fois que cet article a été cité. Une grande ambition technocratique a été, récemment, de pouvoir évaluer l'activité des chercheurs au moyen de chiffres (cela évite de lire les articles !). A cette fin, pour chaque chercheur, trois chiffres sont facile à construire :

— Le nombre total d'article qu'il a publiés, N_A

— Le nombre total de fois ou il a été cité, c'est à dire la somme du nombre de fois ou chacun de ses articles ont été cités, C_A.

— Le facteur "H" : le plus grand nombre H tel que l'auteur possède au moins H articles tous cités au moins H fois.

Par exemple, si le chercheur "A" a publie 1'article qui a été cite 12 fois, un qui a été cité 4 fois, un cité 3 fois et 6 cités 1 fois, alors
$N_A = 9$, $C_A = 12+4+3+1+1+1+1+1+1 = 25$ et $H_A = 3$ car il a bien 3 articles cités au moins 3 fois mais pas 4 articles cités au moins 4 fois.
Depuis 2 ans, le ministère de la recherche Italien a décidé d'évaluer les chercheurs et de les répartir en deux catégories : Les chercheurs de 1ère classe et ceux de 2eme classe. L'algorithme est le suivant :
On calcule pour chaque mathématicien (Italien) les indices N, C, H. Le ministère calcule ensuite les moyennes nationales des indices N, C et H des mathématiciens (Italiens), notées N_moy, C_moy, H_moy. Le ministère décide alors que le chercheur A est de 1ère classe si parmi ces trois indices N, C, H, au moins deux sont supérieurs à la moyenne correspondante.
Un mathématicien a alors fait un petit calcul et a fait remarquer que ce système était un peu absurde puisque rien n'empêchait que l'ensemble des mathématiciens Italiens soient de 1ere classe ! Êtes-vous d'accord ?
A la suite de cette remarque, le critère a changé et on demande maintenant qu'au moins deux indices parmi 3 soient supérieurs (strictement) à la médiane. On rappelle que la médiane d'une suite finie de nombre est le plus petit nombre m tel qu'au moins la moitié des nombre de l'ensemble est inférieur à m. Par exemple la médiane de $\{0,0,1,3,4,4,5,8,8,7,6\}$ est 4.

— Ce nouveau critère résout-il le problème ?

— Quelle est la proportion maximale de mathématiciens de 1ere classe ?
— que se passerait-il si on prenait une inégalité large ?

10 Dames Chinoises

Deux adversaires s'opposent dans un jeu simplifié de dames chinoises. Chacun possède quatre pions disposés comme sur la figure.

A	B			1	3
C	D			2	4

Chacun leur tour, les joueurs choisissent de sauter leur tour ou de jouer un pion, soit en l'avançant d'une case adjacente (gauche, droite, bas, haut), soit en sautant par dessus un pion (allié ou adverse) à condition que la case de derrière soit vide. Vous avez les lettres et votre adversaire les chiffres.
A la première partie, votre adversaire joue de la façon suivante : il commence par avancer le pion 1, puis le pion 2, le 3, le 4 et à nouveau le 1 et ainsi de suite. S'il n'y a pas de pion devant lui, il avance simplement. S'il y a un seul pion, il le saute. S'il y a deux pions, il joue le suivant et continue le cycle. Enfin, si tous les pions sont bloqués, il décide de ne pas jouer.
Proposer une stratégie optimale pour le battre.
A la deuxième partie, votre adversaire s'aperçoit qu'il est plus rentable de commencer son cycle par le pion 3. Pouvez-vous le battre ?
Que se passe-t-il si le joueur garde la même stratégie mais en choisissant au hasard, à chaque étape, le pion parmi les pions pouvant avancer ?
Existe-t-il une stratégie optimale en toute circonstance ? Une stratégie pire que toutes les autres ? Que se passe-t-il si vous jouer à deux sur un vrai plateau de dames chinoises ? Et à six joueurs ? En supposant que chacun joue pour soi ? En supposant que les autres joueurs se liguent contre vous ?