Le solitaire

Ou l'histoire du pion sans famille

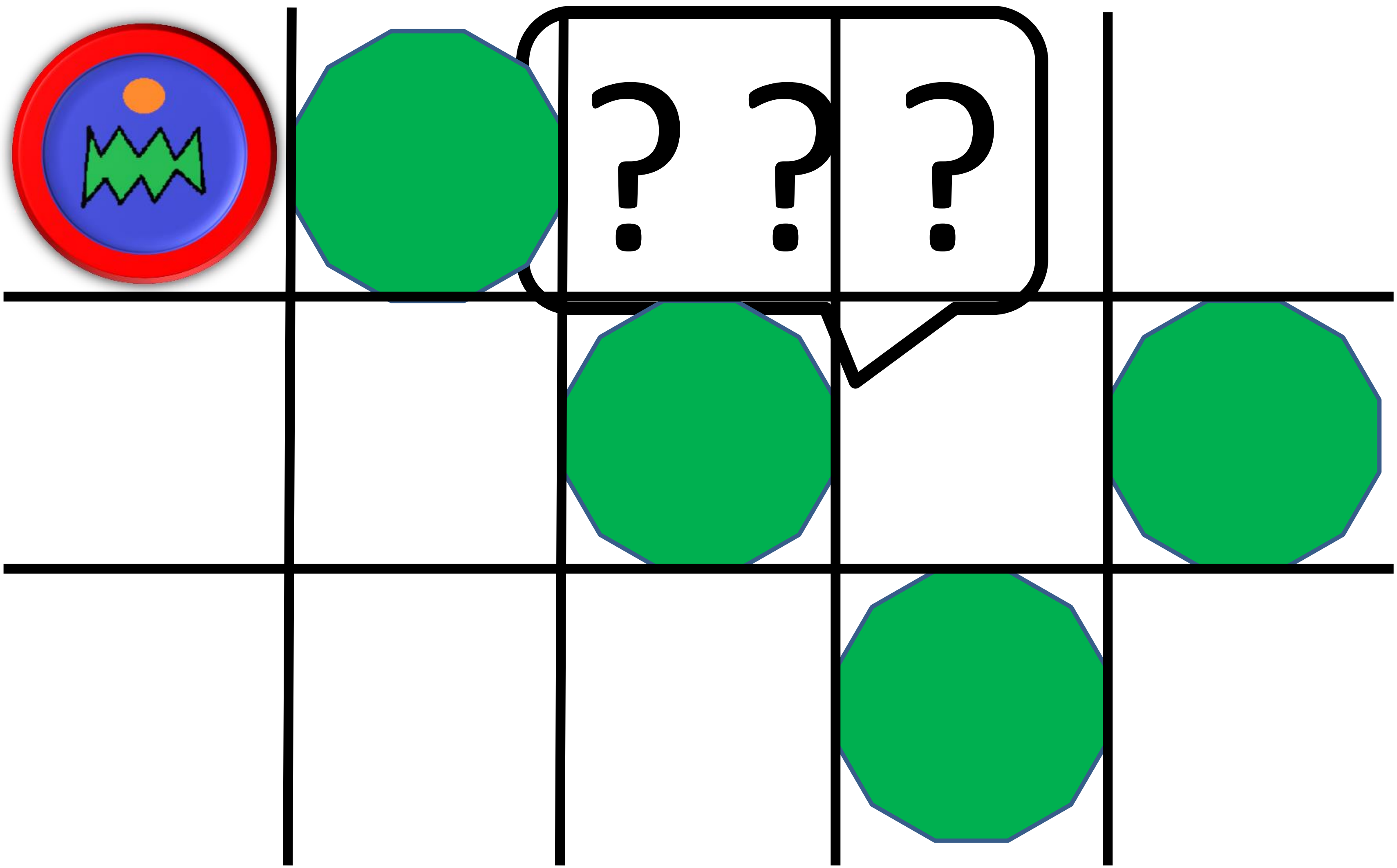
Sommaire

I . Présentation du problème

1. Définition du sujet

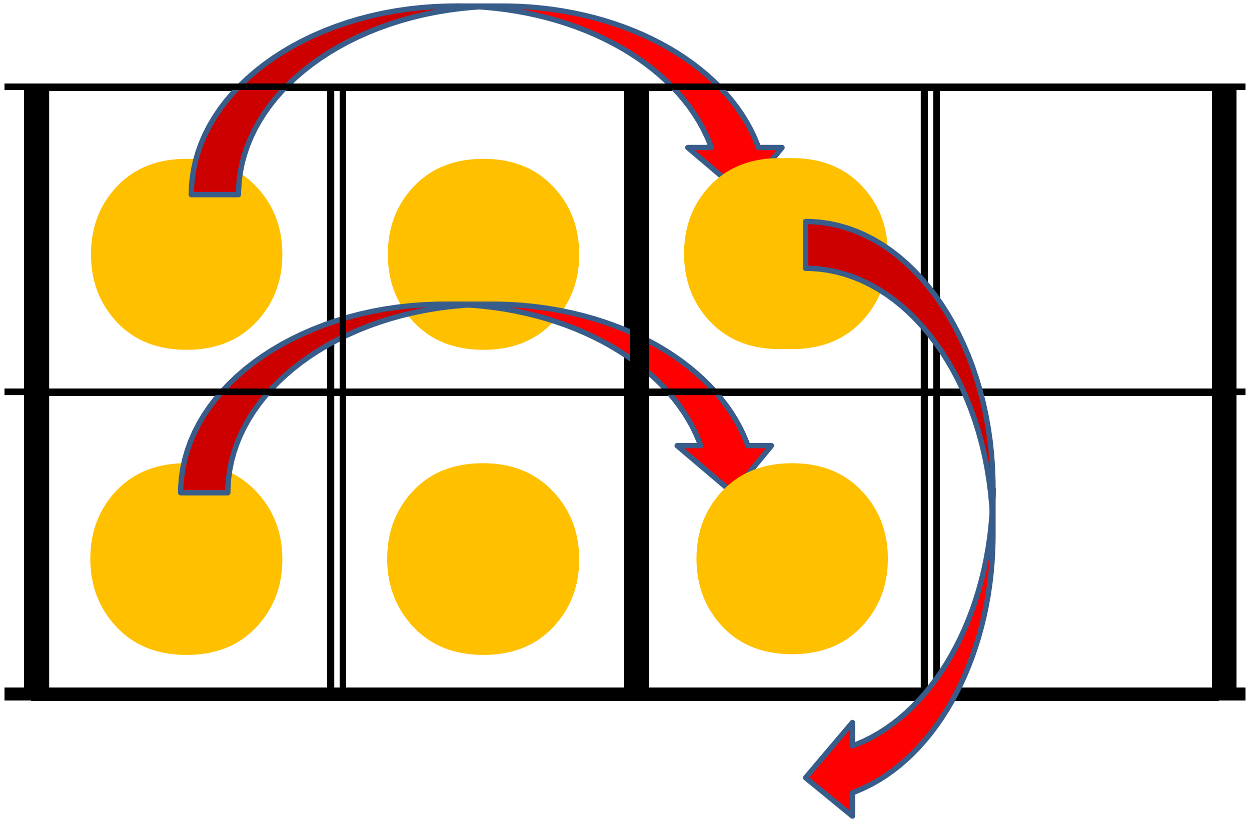
- On considère un tableau $n \times n$ dans un quadrillage infini. On met un jeton par case.

- Les déplacements sont ceux du solitaire.



2. Résolution d’un cas simple

Le carré 2 x 2 :



II . Techniques de résolution

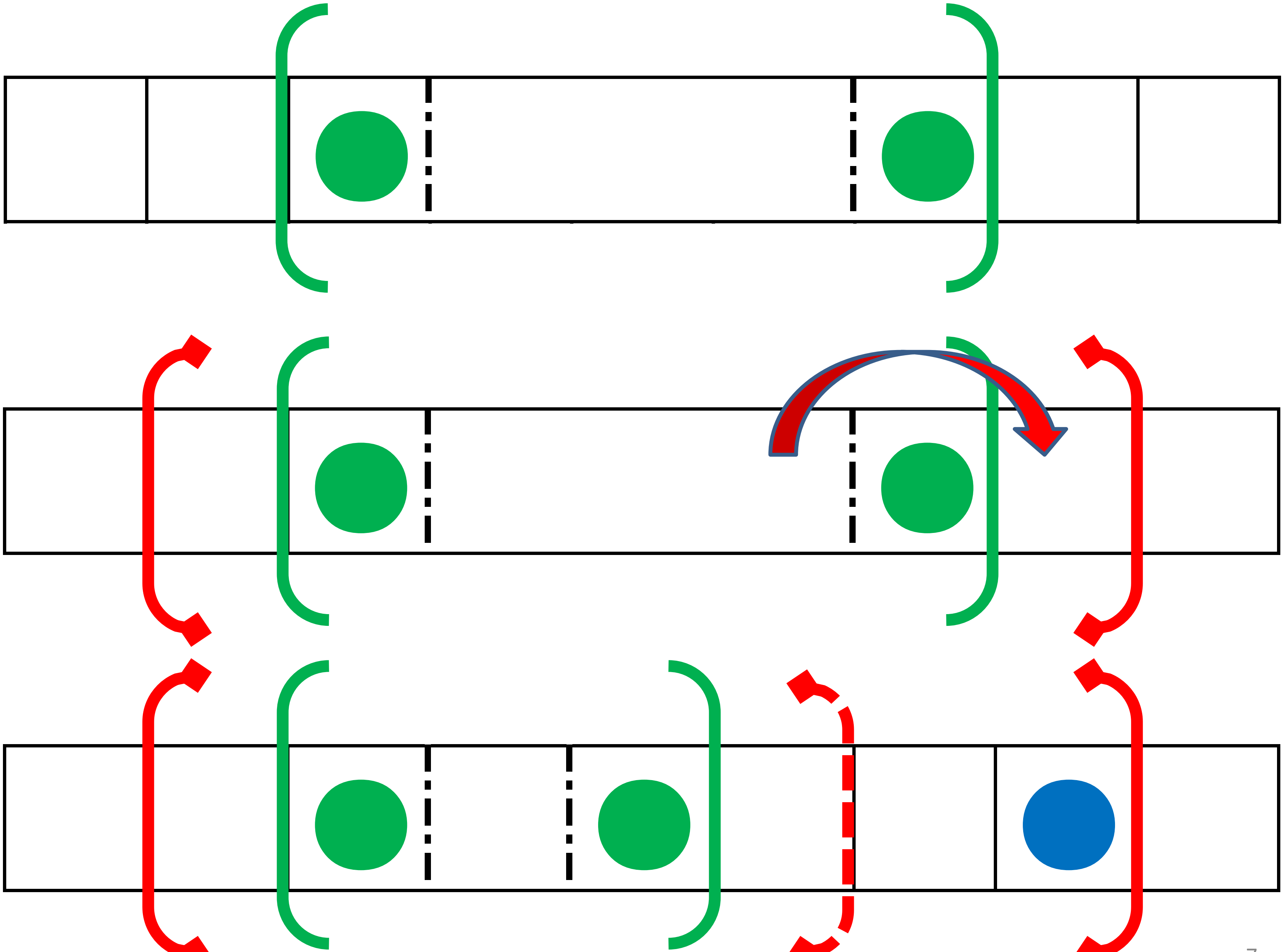
1 . La ligne de pions

Toutes les configurations possibles de la ligne ont été démontrées. Nous allons présenter une partie des résultats obtenus.

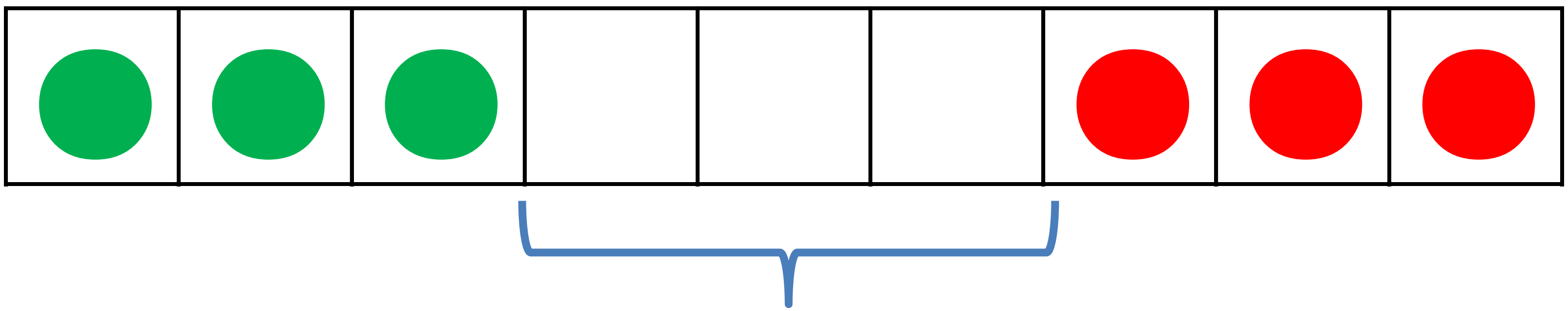
<u>Théorème :</u>

Soit un ensemble E de n pions sur la droite de jeu, cet ensemble ne peut, par ses propres moyens, s'étendre de plus d'une case vers l'extérieur pour tout $n \geq 1$.

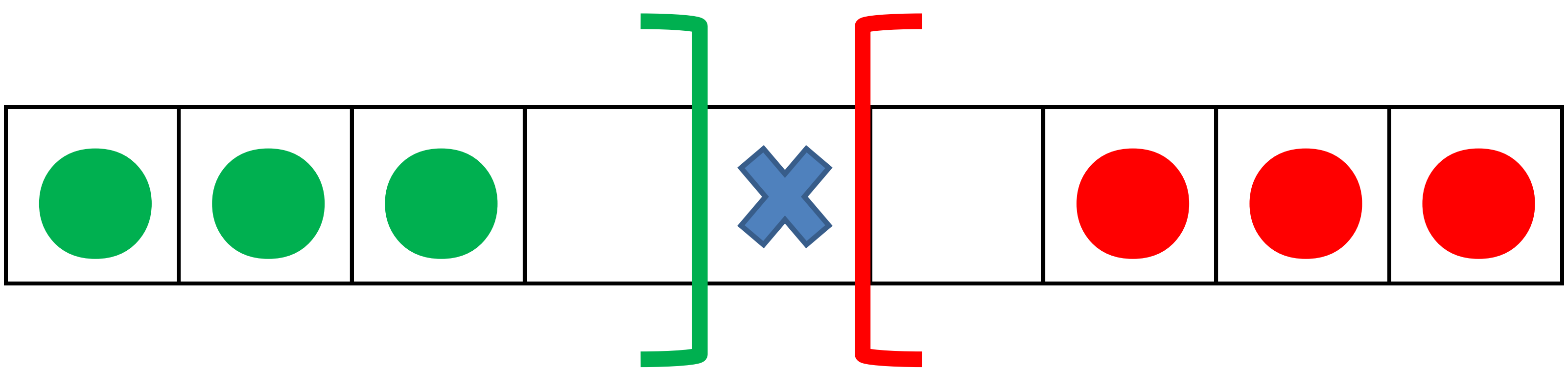
Démonstration par récurrence.

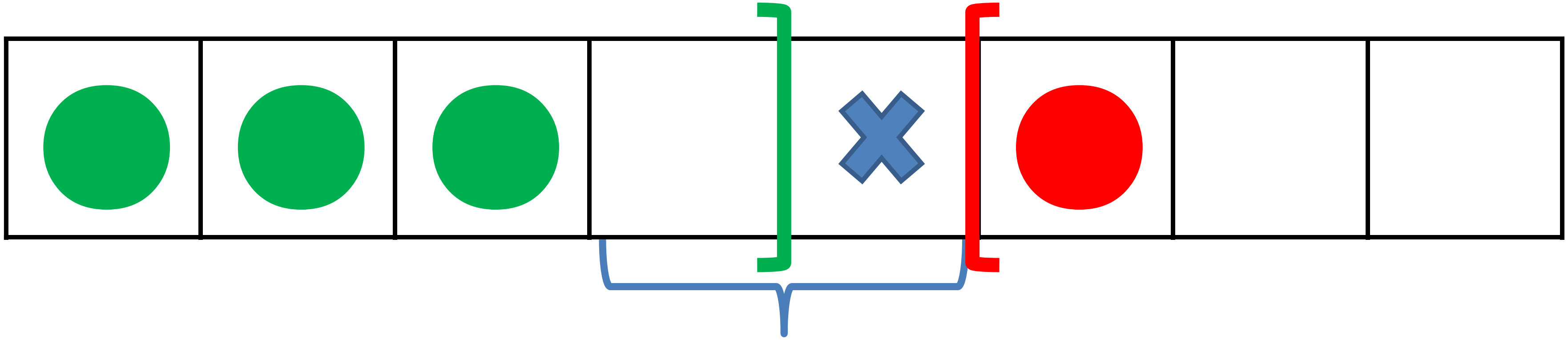


Configuration IMPOSSIBLE dans un solitaire gagnant.

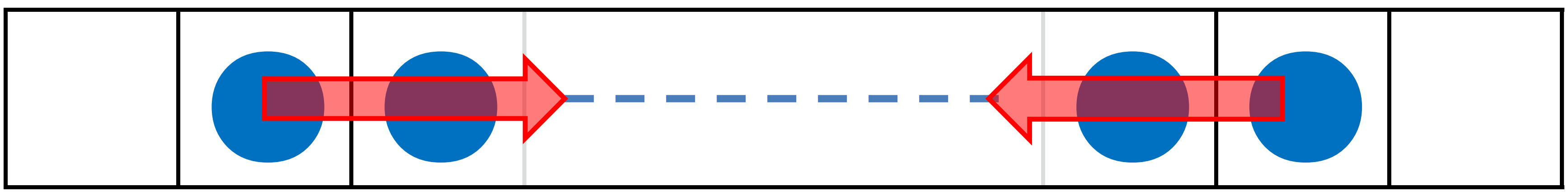


Solitaire perdant si il existe au moins 3 cases vides consécutives.



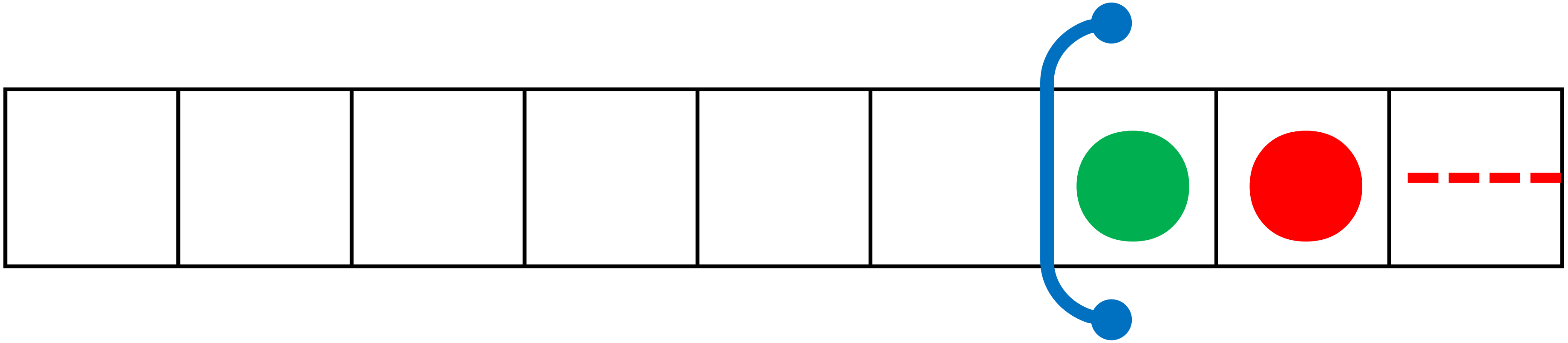


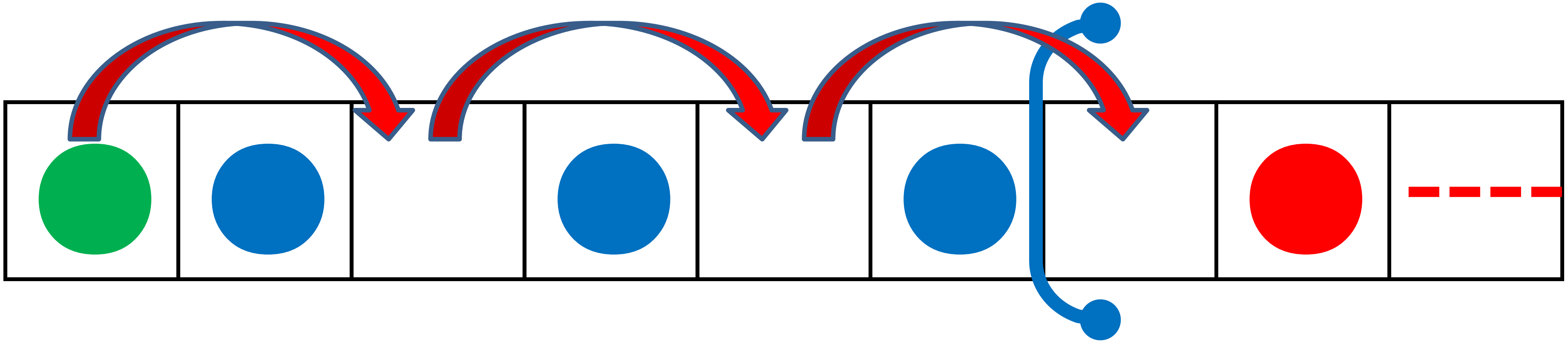
Impossibilité vérifiée pour
2 cases vides si un
ensemble est composé
d'un pion.



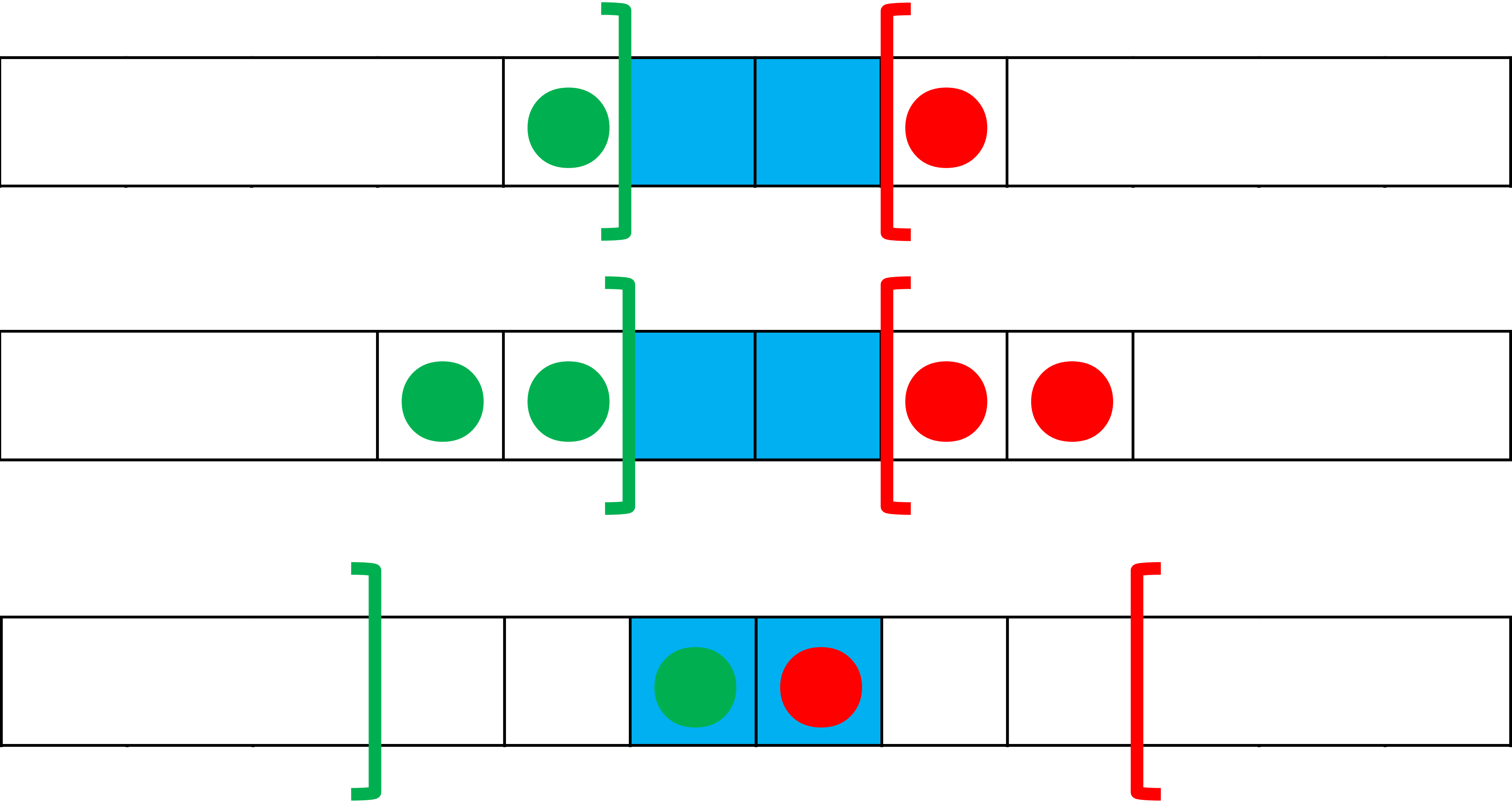
Les extrémités terminent le solitaire, dans l'espace et dans le temps.

Il existe un unique moyen de déplacer un pion toujours dans une même direction avec plusieurs fois une case vide.
Nous l'appellerons « configuration bout de chaîne » car elle peut être ajoutée à l'extrémité de l'ensemble des pions sans modifier l'issue du solitaire.

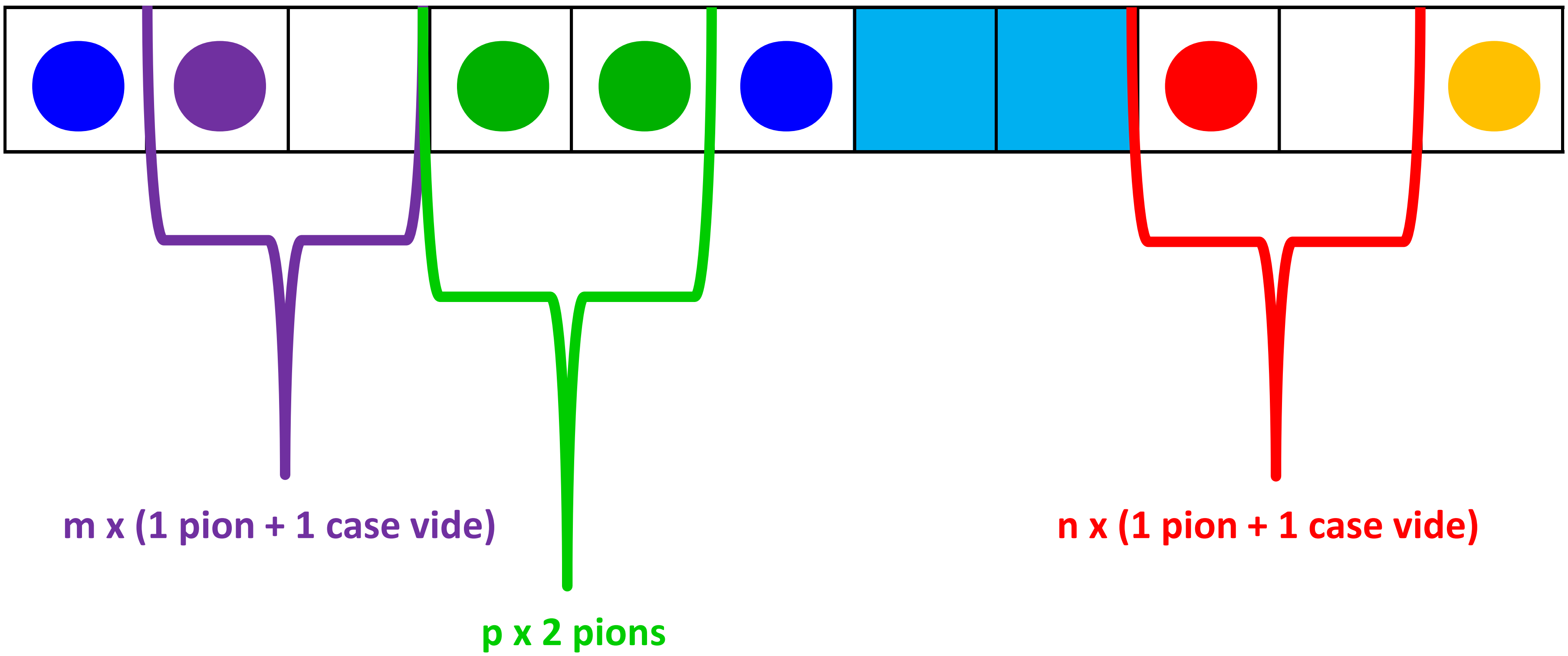




Intéressons nous aux configurations gagnantes à 2 cases vides consécutives.

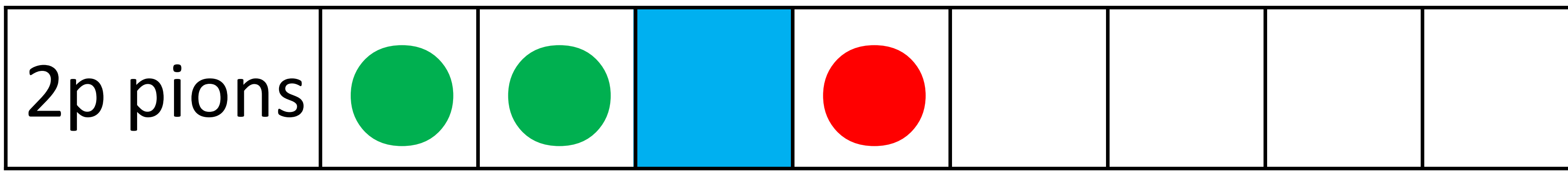


Il existe une seule configuration pour deux cases vides consécutives que voici :

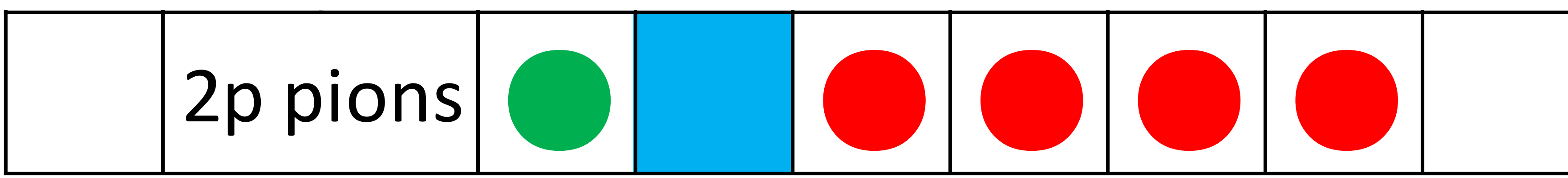


La configuration du solitaire gagnant à une case vide dépend du nombre de pions consécutifs dans le premier ensemble donné :

① 2q pions + 1 case vide + 1 pion

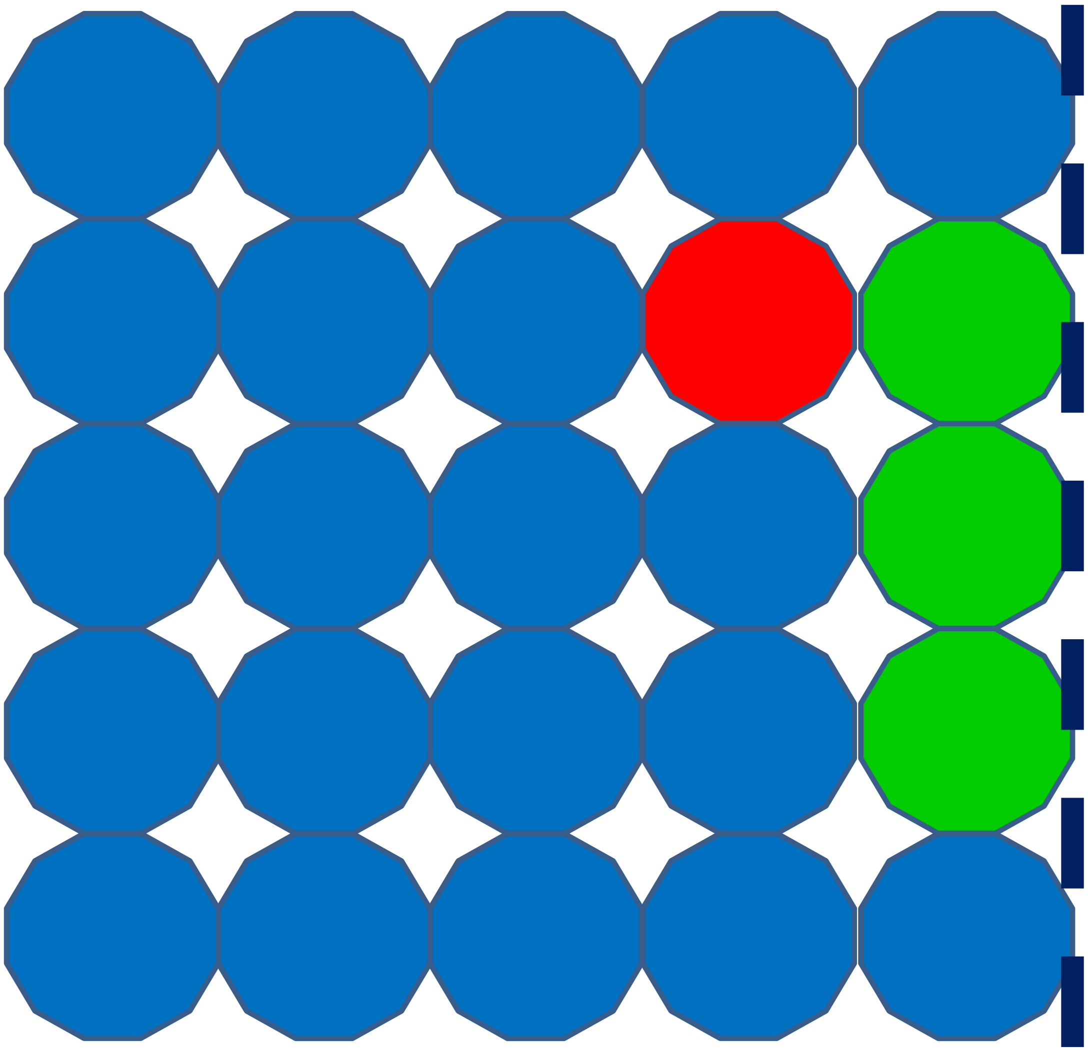


② (2q + 1) pions + 1 case vide + 4 pions

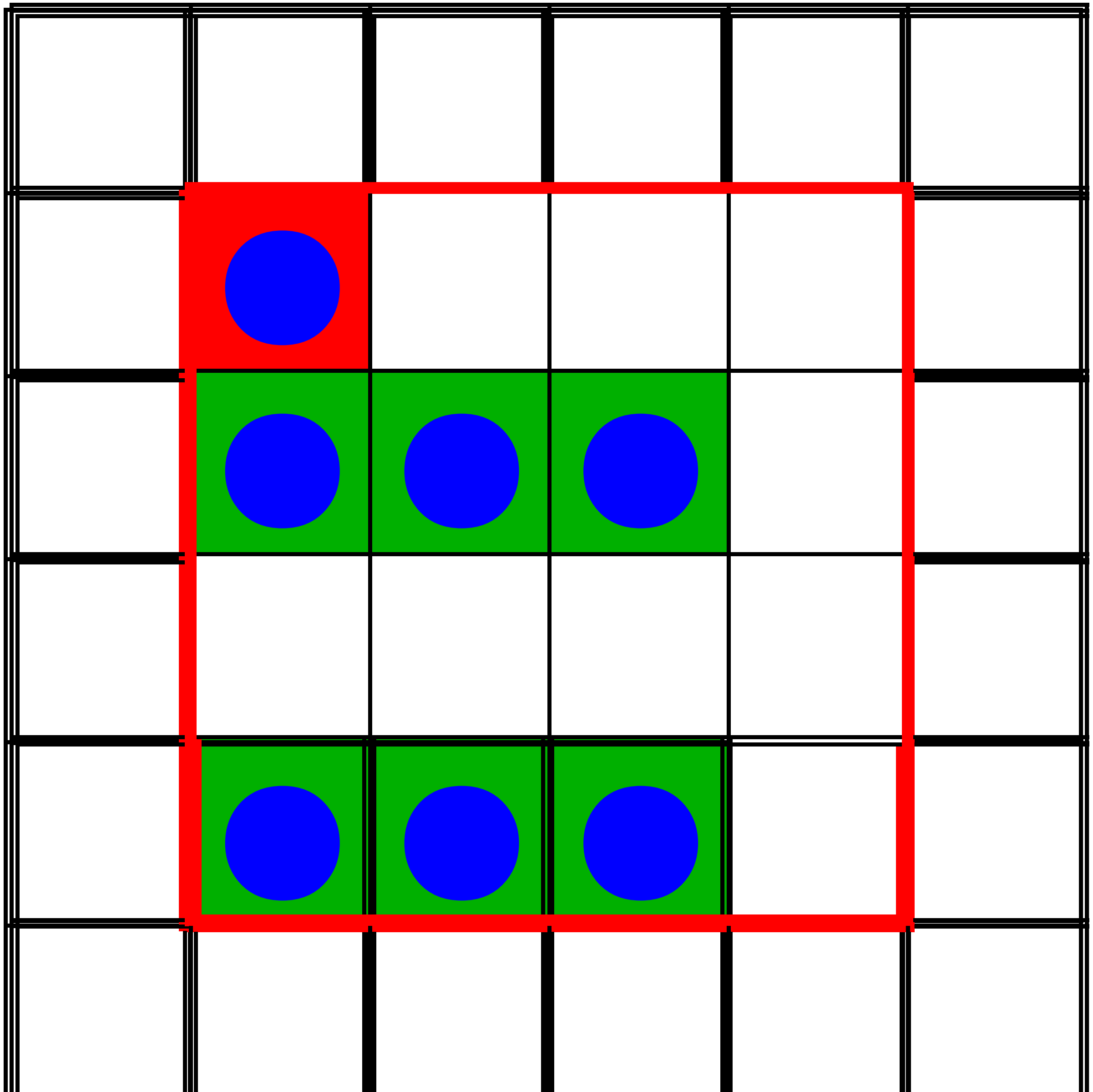


2. Les carrés qui marchent

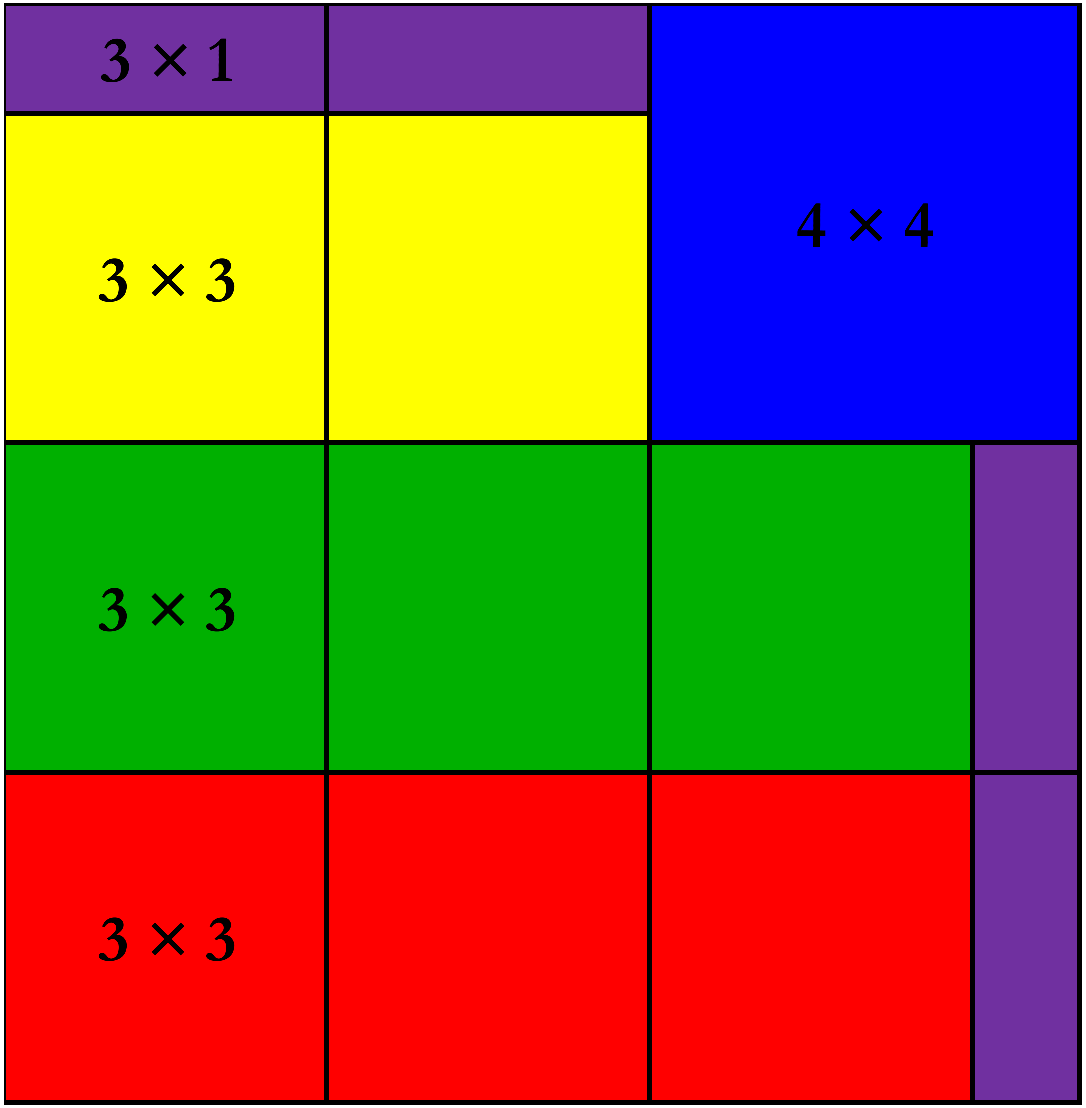
L'idée est de retirer des pions sans éparpiller le reste des pions sur le quadrillage

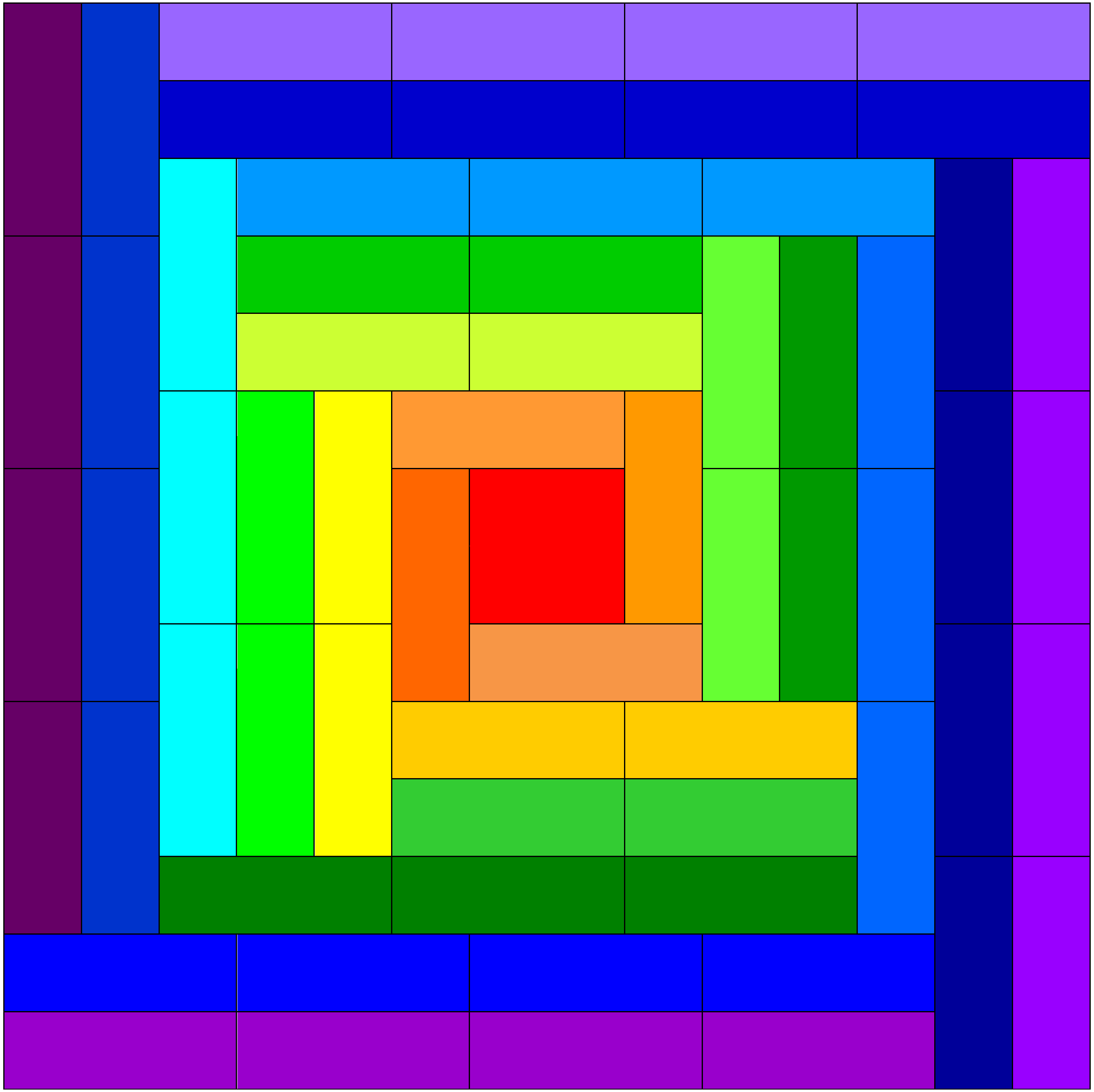


Peut-on, à l'aide de ce simple enchaînement, terminer un solitaire carré ?
Testons avec le carré 4 × 4 :



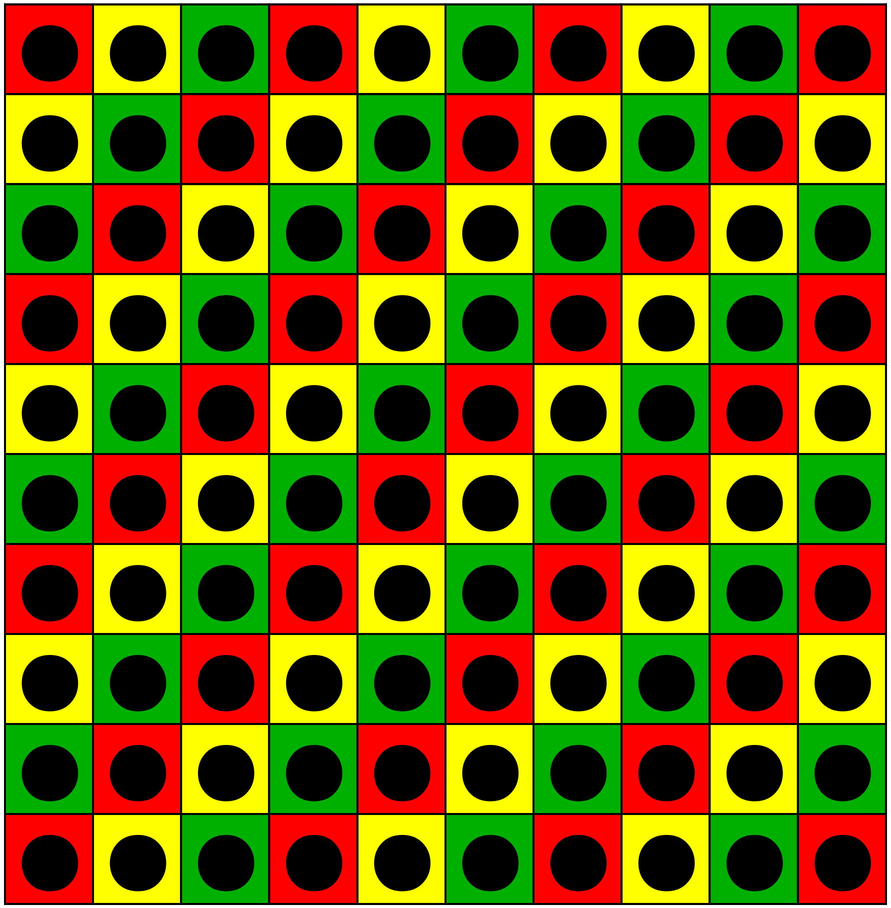
Cette méthode permet d’enlever les lignes 3×1 et les carrés 3×3.
Ainsi nous savons résoudre tous les carrés de côté $n = 3k + 1$ et $n = 3l + 2$, k et l des entiers naturels.





III . Preuve de certaines impossibilités

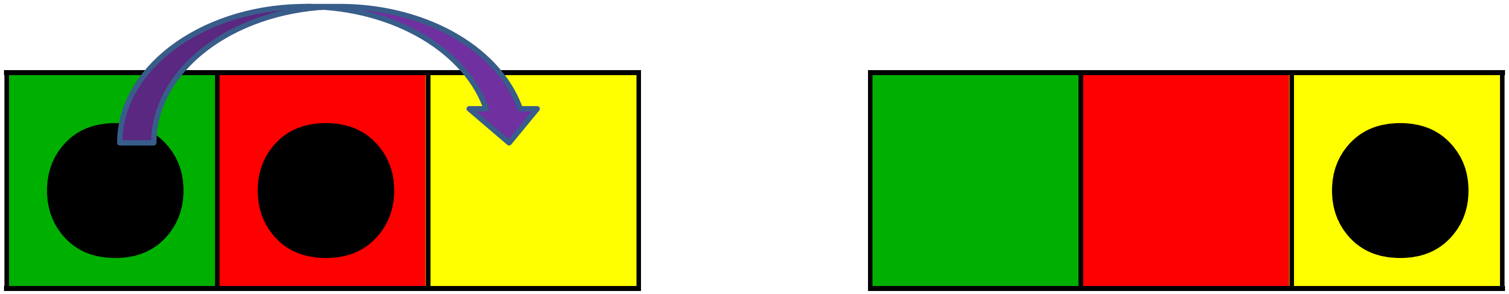
1 . Enfin des calculs !

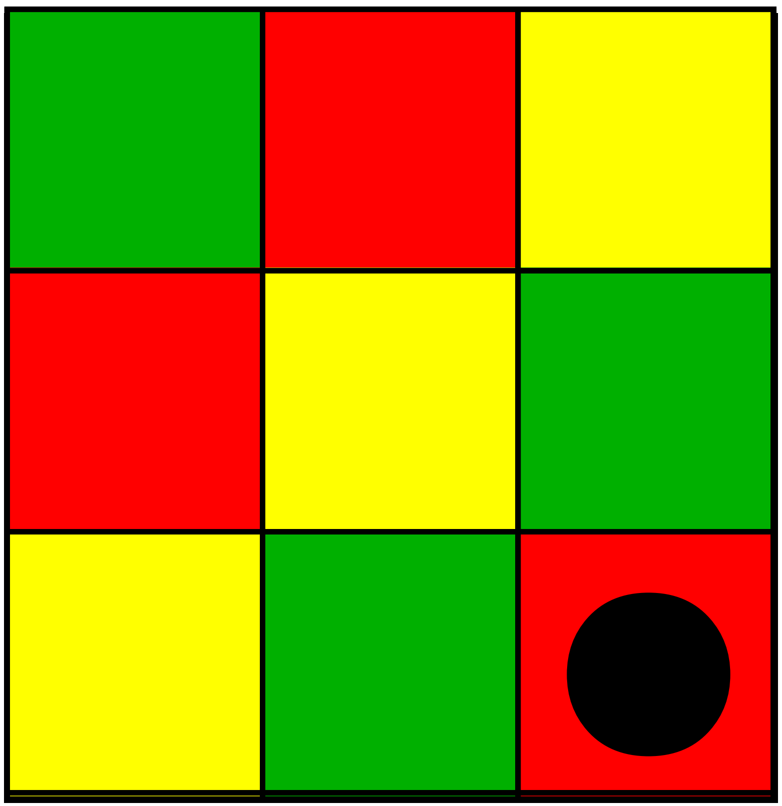


Les cases sont coloriées de 3 couleurs en diagonale.
Si un pion effectue un mouvement il passe au-dessus d'une case de couleur différente et atterrit sur une case d'une 3ème couleur.

On note :
R le nombre de cases rouges occupées par un pion
V celui des cases vertes
J pour les cases jaunes

2. Les carrés arrêtés



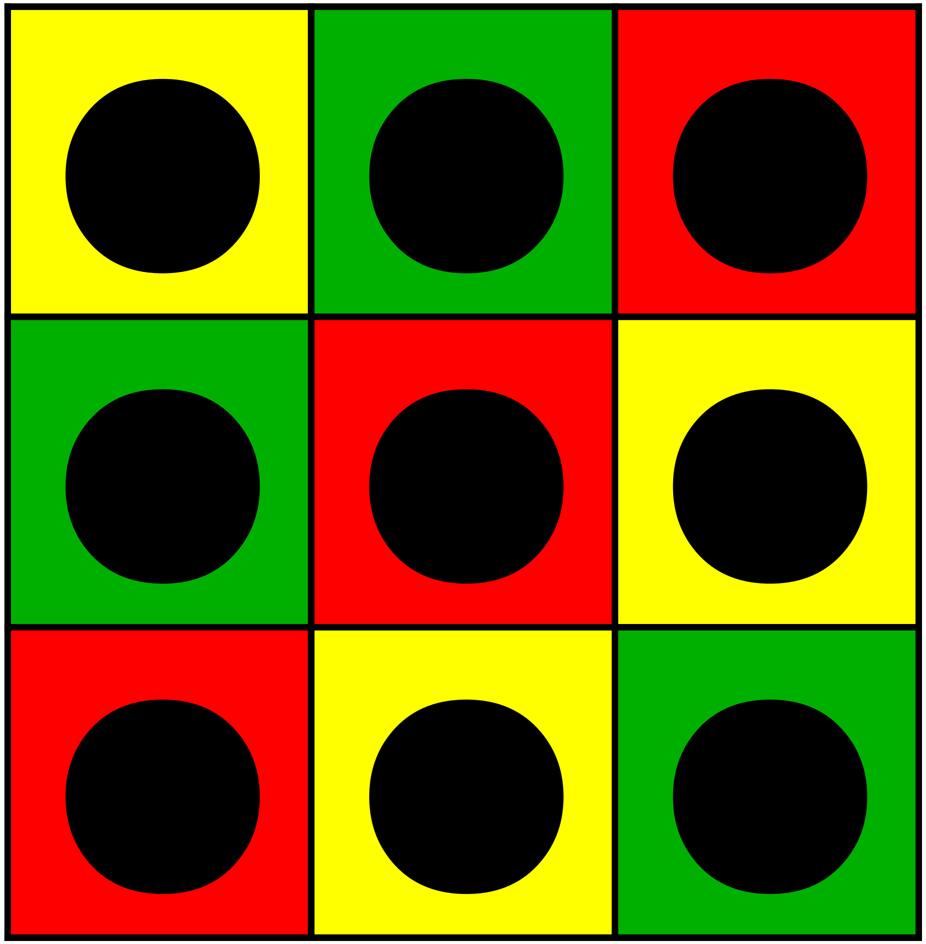


A t = 0

R = 0

V = 0

J = 0



$$\begin{cases} R = 3 \\ V = 3 \\ J = 3 \end{cases}$$

On souhaite obtenir

$$\begin{cases} R = 1 \\ V = 0 \\ J = 0 \end{cases}$$

ABSURDE !!!

IV . Les autres dimensions

En dimensions 2 et 3 nous savons enlever des lignes de 3 avec un pion adjacent donc, pour tout nombre n de pions non multiple de 3, nous sommes capables de gagner le solitaire si nous faisons les bons choix.

	reste dans la division euclidienne par 3		
n	0	1	2
n^2	0	1	1
n^3	0	1	2
n^4	0	1	1
n^5	0	1	2
n^6	0	1	1

En dimension quelconque :

- On a démontré que le solitaire ne peut être gagnant si $n \equiv 0$ [3].
- On conjecture, à l'aide des congruences, que pour tout n non multiple de 3 nous sommes capables de finir le solitaire.

Merci de votre attention

Merci à l’équipe encadrante

M. Missenard

M. Gabilly

M. Burq

M. Juliot

M. le gars qui vient occasionnellement et qui pose des questions non pertinentes

Cet exposé vous a été présenté par :

Josse Adrien

Letellier Hector