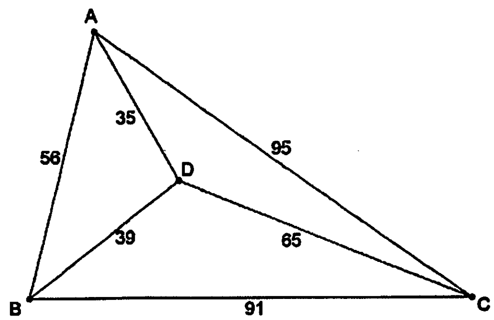
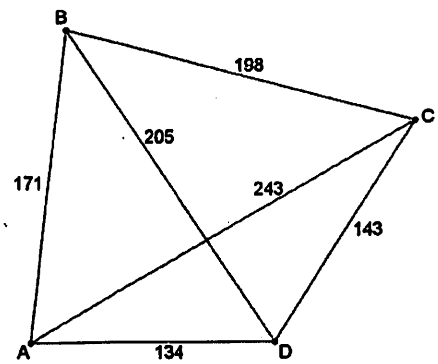
Sujets 2017-2018

Atelier Maths en Jeans du Lycée B. Pascal, Orsay

1 Quadrilatères entiers

Une partie du plan euclidien constituée par quatre points distincts A, B, C et D est dite *entière* lorsque les six distances mutuelles AB, AC, AD, BC, BD et CD sont des nombres entiers. Voici deux exemples (parmi tant d'autres !) :





Voici une liste (non exhaustive...) de questions que l'on peut se poser :

– Si A, B et C sont trois points alignés deux-à-deux distincts, avec AB, AC et BC entiers, peut-on toujours trouver un point D n'appartenant pas à la droite (AB) tel que la partie $\{A, B, C, D\}$ soit *entière* ?

– Comment produire (s'il en existe !), des quadrilatères $ABCD$ *entiers* particuliers : carrés, rectangles, quadrilatères non rectangles inscriptibles dans un cercle, parallélogrammes non rectangles, trapèzes non parallélogrammes, etc. ?

– À l'opposé, comment générer des configurations *entières* « quelconques » comme celles ci-dessus ?

2 Des pommes, des poires

Un paysan exploite un verger de forme triangulaire (ses côtés font respectivement 70,60 et50 mètres) planté de pommiers et bordé de poiriers régulièrement espacés . 1)Au moment de prendre sa retraite il souhaite le partager entre ses deux enfants . Pouvez-vous l'aider ? 2)Et s'il à trois enfants pouvez-vous encore l'aider ? 3)Que faire si le verger à une forme plus compliquée ?

3 Plan de table

Un maître d'hôtel, mathématicien amateur , a disposé 9 verres sur une table de réception de manière à ce qu' ils forment 10 alignements de 3 verres. 1) Pouvez-vous retrouver la disposition de la table ?
2) Aurait-il pu obtenir plus de 10 alignements ?
3) Et si l'on change le nombre de verres ?

4 des petits carrés

On se propose de mesurer l'aire (surface) d'une figure dans le plan par l'algorithme suivant :

— On place à l'intérieur le plus grand carré possible (qui soit contenu dans la figure de départ). On note son aire

— On place à l'intérieur de la figure restante (dont on a oté ce carré) à nouveau le plus grand carré possible. On additionne son aire a celle du carré précédent.

— On recommence

L'algorithme donne-t-il une bonne approximation (après un grand nombre d'opérations) de l'aire de la figure initiale ? Que se passe-t-il si on prend des triangles au lieu de carrés ?, des disques ?

5 Jetons dans tableau

Soit ABCD un tableau rectangulaire dans lequel $AB = 20$ et $BC = 12$. Ce tableau est subdivisé en 20×12 carrés unités. On se donne un entier strictement positif r. Un jeton peut se déplacer d'un jeton à un autre si et seulement si la distance entre les centre de ces deux carrés est exactement égale à $\sqrt{r}$ Est-il possible d'imaginer une suite de déplacements menant le carré de sommet A à celui de sommet de sommet B.

6 Fête des voisins

On dispose d'un tableau $n \times n$ et on place un nombre réel sur chaque case de son bord.
Est-il possible de remplir le reste du tableau de telle sorte que chaque case soit la moyenne des quatre adjacentes ? Et des 8 adjacentes ?
Peut-on faire la même chose avec des nombres entiers ?

7 une salade de pâtes

L'autre jour, monsieur Buittomi s'apprêtait à faire cuire des spaghettis lorsque l'un d'entre eux tomba par terre et se cassa en trois. Pendant la cuisson, il prit les trois morceaux et essaya de faire un triangle avec. Quelle est la probabilité que les trois morceaux se soient cassés de telle sorte qu'il puisse le faire ? Et si le spaghetti s'était cassé en quatre morceaux, quelle est la probabilité qu'il puisse faire encore un triangle ? Un quadrilatère quelconque ?
De même pour un nombre n quelconque de fractures.

8 Un nouvel opérateur

Monsieur et madame Johnson aiment bien créer de nouveaux opérateurs. Madame propose de créer un opérateur $\circ$ de telle sorte que pour tout entier a et b, nous ayons :

$$a \circ a = a + 2, \quad a \circ b = b \circ a \quad \text{et} \quad \frac{a \circ (a+b)}{a \circ b} = \frac{a+b}{b}.$$

Monsieur Johnson dit alors :
- Je pense que pour tout entier a et b, le nombre $a \circ b$ n'est pas forcément un entier.
- Je ne crois pas, répondit Madame, tu confonds avec la condition que $\frac{a \circ (a+b)}{a \circ b} = \frac{a+b}{a}$. En revanche, je pense qu'ils sont tous positifs.
- Je ne suis pas sûr de ça. Cela dépend du signe de a et de b.

Que pensez-vous de cette discussion ?
Êtes-vous capable de calculer la valeur de $a \circ b$ quelque soit les valeurs a et b qu'on vous donne ?

9 Les tours de Hanoï.

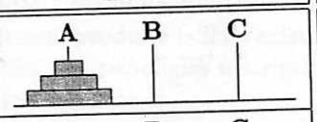
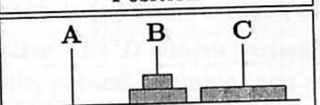
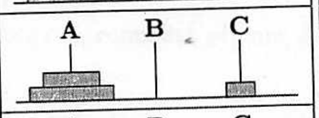
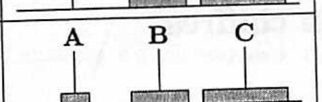
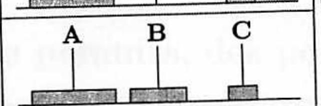
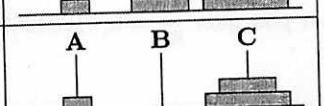
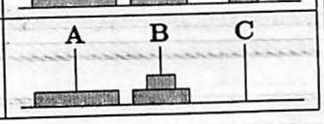
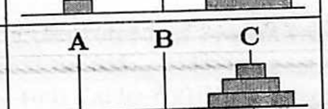
Le mandarin N. Claus (de Siam) nous raconte qu'il a vu, dans ses voyages pour la publications des écrits de l'illustre Fer-Fer Tam Tam, dans le grand temple de Bénarès, au-dessous du dôme qui marque le centre du monde, trois aiguilles de diamant, plantées dans une dalle d'airain, hautes d'une coudée et grosses comme le corps d'une abeille. Sur une de ces aiguilles Dieu enfila, au commencement des siècles, soixante-quatre disques d'or pur, le plus large reposant sur l'airain, et les autres, de plus en plus étroits, superposés jusqu'au sommet. C'est la tour sacrée de Brahma. Nuit et jour, les prêtres se succèdent sur les marches de l'autel, occupés à transporter la tour de la première aiguille de diamant sur la troisième, sans s'écarter des règles strictes su temple de Bénarès, et qui ont été imposées par Brahma. Quand tout sera fini, la tour et les brahmes tomberont, et se sera la fin des mondes !

Mais quelles sont donc ses règles du temple de Bénarès imposées par Brahma lui même ? Nous avons de la chance une version française existe, la voici : Considérons trois piquets, notés **A**, **B** et **C**, et un nombre fini de disques de tailles différentes que l'on suppose placés initialement par taille décroissante sur le piquet **A**. Le but est ici de transférer cette tour de disques du piquet **A** au piquet **C** en respectant les règles suivantes :

— un seul disque peut être déplacé à la fois,

— un disque ne peut être placé sur un disque de taille plus petite.

Par exemple, pour trois disques, on peut déplacer la tour du piquet **A** au piquet **C** en effectuant **7** mouvements comme illustré ci-dessous.

Mouvement	Position	Mouvement	Position
Position initiale		4 : **A** vers **C**	
1 : **A** vers **C**		5 : **B** vers **A**	
2 : **A** vers **B**		6 : **B** vers **C**	
3 : **C** vers **B**		7 : **A** vers **C**	

Nous allons ici déterminer le nombre de mouvement minimal $\mathbf{T(n)}$ pour déplacer une tour de $\mathbf{n}$ disques du piquet **A** au piquet **C**.

Pour $\mathbf{n} = \mathbf{0}$, on peut supposer $\mathbf{T(0) = 0}$ et pour un unique disque, je vais vous aider, je trouve $\mathbf{T(1) = 1}$. À votre tour maintenant, combien valent $\mathbf{T(2)}$ et $\mathbf{T(3)}$?

Généraliser ce résultat pour trouver $\mathbf{T(n)}$ et dire dans combien de temps arrivera la fin des mondes sachant qu'il faut un jour aux prêtres pour transporter un disque d'or d'une aiguille à une autre ?

10 Nombres parfaits.

Mais qu'est ce donc un nombre parfait ?

Un nombre parfait est un nombre dont la somme de ses diviseurs est égales à deux fois ce nombre.

Par exemple, $\mathbf{6}$ est un nombre parfait. En effet les diviseurs de $\mathbf{6}$ sont $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$ et $\mathbf{6}$; et on a $\mathbf{12 = 1 + 2 + 3 + 6}$. Pouvez vous trouver le prochain nombre parfait ?

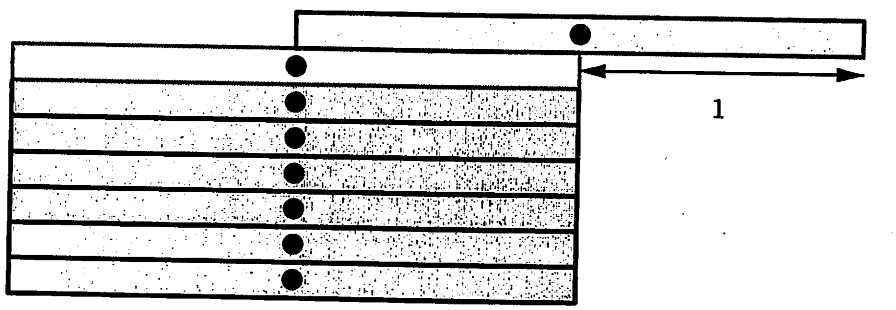
Nous allons ici essayer de caractériser les nombres parfaits pairs (on se sait toujours pas si des nombres parfaits impairs existent).

11 Une tour de cartes qui penchent vers l'infini.

Considérons une tour de $\mathbf{n+1}$ cartes à jouer et faisons un petit jeu : jusqu'où peut on pousser les cartes (vers la droite, par exemple) sans faire tomber la tour ?

Commençons par modéliser le problème, on suppose que toutes les cartes ont la même masse, la même longueur égale à $\mathbf{2}$ unités et que le centre de la tour se trouve à zéro (le côté droit se trouve donc à $\mathbf{1}$).

Par exemple, si on déplace une seule carte, on devine qu'on peut la pousser jusqu'à ce qu'elle soit en équilibre, à moitié sur la carte en dessous et à moitié dans le vide, comme illustré si dessous.



Le problème est donc de déterminer la longueur du surplomb maximal $\mathbf{E(n)}$ d'une tour de $\mathbf{n+1}$ cartes après que l'on ait poussé les cartes sans faire tomber la tour.

Pour $\mathbf{n = 0}$, on peut supposer $\mathbf{E(0) = 1}$ et pour $\mathbf{n = 1}$, d'après l'exemple ci-dessus, on obtient $\mathbf{E(1) = 1}$. Combien valent $\mathbf{E(2)}$ et $\mathbf{E(3)}$?

Généraliser ce résultat pour trouver $\mathbf{E(n)}$ et dire si en effet on peut construire, au moins mathématiquement, une tour qui penchent vers l'infini.

12 Une suite de chiffres.

Pouvez vous expliquer pourquoi $\frac{1}{81} = 0,012345679012345679\ldots$?