1 Maladie génétique récessive

Une maladie génétique est une maladie due à une ou plusieurs anomalies sur un ou plusieurs chromosomes qui entraînent un défaut de fonctionnement de certaines cellules de l'organisme [1]. Pour schématiser, chaque chromosome d'un enfant est composé de deux allèles qui sont chacun transmis par leur parent. Prenons l'un d'eux et supposons que les deux allèles ne peuvent posséder que deux statuts : "S" pour sain et "M" pour malade. Il existe donc 4 couples d'allèles possibles : (S,S), (S,M), (M,S) et (M,M). Dans le cas d'une maladie génétique dite récessive, l'enfant n'est malade que s'il (ou elle) possède les deux allèles (M,M). S'il n'en possède qu'un seul (cas (S,M) ou (M,S)), il peut transmettre la maladie mais n'est pas malade (on parle de porteur sain). Lorsque deux adultes décident de faire un enfant, ils vont chacun transmettre l'un des gènes avec la même probabilité. Pour la suite, nous admettons qu'un enfant malade (M,M) ne peut pas lui même avoir d'enfant.

Expliquer pourquoi si la maladie n'était pas récessive (c'est-à-dire que les personnes ayant les couples (S,M) ou (M,S) seraient aussi malades), elle aurait disparu immédiatement. Quelles sont les configurations possibles de couples de parents pouvant avoir un enfant ? Pour chacune de ces configurations, quelles sont les chances qu'ils aient un enfant malade ? Si 5% des personnes qui peuvent avoir un enfant sont porteurs sains, en prenant deux personnes au hasard, quelle est la probabilité d'avoir un enfant malade ? Inversement, on estime qu'un enfant sur 3500 souffre de mucoviscidose (qui est une maladie génétique récessive), quelle est la proportion de porteurs sains dans la population ?

Supposons qu'à chaque génération, il y a autant d'enfants que d'adultes pouvant procréer et prenons une population de 100 personnes dont 10 sont des porteurs sains et admettons de plus, on forme exactement 50 couples différents qui vont chacun avoir 2 enfants. Quelles sont les combinaisons possibles ? Est-ce que nous pouvons n'avoir que des malades ? Quelle est la probabilité que la maladie disparaisse (c'est-à-dire qu'il n'y aura plus que des (S,S) à la génération suivante) ?

Si on réitère le procédé pour la génération suivante (en ne conservant que les personnes pouvant avoir des enfants) et ainsi de suite, quelle est la probabilité que la maladie disparaisse ? Que la population finisse par n'avoir que des malades ?

2 Produit de nombres

Prenons un nombre entre 10 et 99 (par exemple 77) et multiplions les deux chiffres qui le compose ($7 \times 7 = 49$). Si nous avons encore un nombre entre 10 et 100, nous recommençons jusqu'à n'obtenir qu'un seul chiffre :

$$77 \to 49 \to 36 \to 18 \to 8. \tag{1}$$

Dans notre exemple, le chiffre 77 mène à 8, on dira alors que 77 est un *antécédent* de 8 et que 8 est la *finalité* de 77 (ici, 8 est également la finalité de 49, 36 et 18). Enfin, on parlera de *chaîne* pour parler de la suite de chiffres obtenue (comme dans le cas de l'équation (1)).

Est-on sûr que que chaque nombre possède une finalité ? Ou est-ce qu'une chaîne peut avoir des nombres qui sont toujours plus grands ? Ou alors, un nombre qui va créer un cycle (c'est-à-dire qu'à un moment, on retombe sur un chiffre déjà présent dans la chaîne) ? Est-ce que tous les chiffres possèdent un antécédent ? Est-ce qu'il y a des chiffres qui reviennent plus souvent que d'autres comme *finalité* ?

Peut-on avoir une idée de la *finalité* d'un nombre au premier coup d'oeil ? Par exemple, les nombres pairs (ou alors impair) sont-ils les antécédents des mêmes chiffres ? Quelles sont les conditions pour obtenir 5 comme finalité ?

Et peut-on généraliser les conclusions précédentes à tous les nombres plus grands que 10 ?

3 La guerre des Gaules

Deux villages gaulois Rififix et Pacifix sont voisins depuis toujours mais ne peuvent pas se supporter. Chaque année, pour chaque village, on observe que :

— chaque habitant du village a un enfant avec probabilité p_e,

— chaque habitant a une probabilité p_{mn} de mourir naturellement,

— chaque habitant a une probabilité p_t^R (pour le village Rififix, resp. p_t^P pour le village Pacifix) d'être tué par le village adverse. On admettra que si l'année d'avant, il y a N_R habitants dans le village Rififix et N_P dans le village Pacifix alors $p_t^R = \frac{cN_R}{N_R+N_P}$ et $p_t^P = \frac{cN_P}{N_R+N_P}$ avec $c \in]0;1[$.

Que va-t-il se passer si les deux villages continuent à se faire la guerre ?
Que se passera-t-il si le village Pacifix décide d'être moins agressif que le village Rififix (c'est-à-dire que c dépend du village avec $c_P < c_R$) pour se concentrer sur une meilleure natalité (c'est-à-dire que $p_e^P > p_e^R$) ?

4

Ça prend trop de place !

Le diamètre d'un disque est une notion bien connue. En fait, toutes les parties planes bornées T possèdent un diamètre $\delta(T)$: c'est la plus grande distance entre deux points de T (plus exactement, cette définition convient pour les parties T qui contiennent leur bord, mais la nuance n'est pas importante pour la suite).

Quel est le diamètre d'un triangle ? D'un rectangle ? D'un polygone régulier à n côtés ? D'une partie de plan en forme de haricot ?

On voudrait transporter une planche, de forme non précisée, mais elle ne rentre pas dans le coffre de la voiture. Garder la planche entière ne nous intéresse pas particulièrement. On propose alors de la couper en deux.

Cela suffit-il toujours pour que le diamètre des deux morceaux soit plus petit que le diamètre initial ?

Et si on la coupe en trois ? En quatre ? Bref, que dire du nombre de morceaux en lesquels on peut couper une planche de forme quelconque pour que le diamètre des morceaux soit plus petit que celui de la planche d'origine ?

Peut-on donner le nombre minimal de morceaux qui convienne pour toutes les planches ?

Pour ce nombre minimal, y a-t-il une valeur optimale du rapport $\dfrac{\delta(\text{morceaux})}{\delta(\text{planche})}$?

5

Quel est le nombre suivant ?

Il existe bien des manières de définir des suites de nombres (u_n). Cela peut se faire par des formules explicites :

$$2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82, 101, \ldots \quad \text{(pouvez-vous trouver } u_n \text{ en fonction de } n\text{ ?)},$$

ou par des règles indiquant comment calculer u_n à partir du terme précédent u_{n-1}, voire des deux précédents :

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots \quad \text{(pouvez-vous exprimer } u_n \text{ en fonction de } u_{n-1} \text{ et } u_{n-2}\text{ ?)},$$

ou par des moyens plus compliqués. Voici une règle qui produit des suites (u_n) définie pour $n \geqslant 1$, dont le comportement est parfois étonnant :

$$\forall n \geqslant 2,\ u_n = u_{u_{n-1}} + u_{n-u_{n-1}}.$$

Les indices dans le membre de droite sont eux-mêmes calculés à partir des termes de la suite.

On peut commencer par explorer le cas où l'on choisit $u_1 = 1$. Est-il possible de calculer u_2, u_3, $u_4, \ldots$?

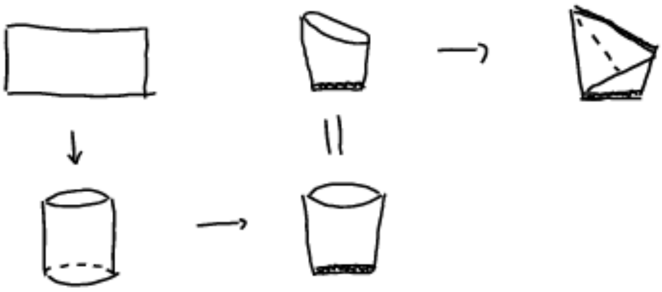
Si on fixe un certain nombre de valeurs initiales u_1, u_2, $\ldots$ qui sont des nombres entiers naturels, est-il toujours possible de calculer tous les termes suivants ?

Si on choisit cette fois $u_1 = u_2 = 1$, que dire de la suite (u_n) ? (suites considérées par John Horton Conway).

Si la règle est maintenant $u_n = u_{n-u_{n-1}} + u_{n-u_{n-2}}$ (suites considérées par Douglas Hofstadter), c'est encore plus mystérieux. Examiner le cas de $u_1 = 3$, $u_2 = 2$ et $u_3 = 1$, puis le cas de $u_1 = u_2 = 1$, voire d'autres cas.

6 Emballage de lait

Dans les années 50 la marque suédoise Tetra Pak a connu un grand succès, notamment dû a son emballage de lait en forme de tétraèdre. Ces emballages étaient très pratiques pour la compagnie, car on pourrait facilement les obtenir en pliant et recollant un morceau rectangulaire de carton, comme suit :

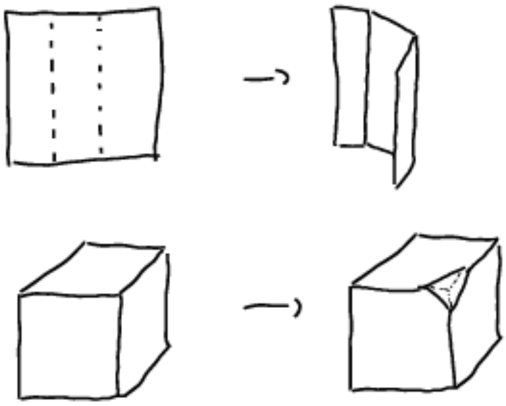


Récemment, la division de recherche de la compagnie a embauché un mathématicien afin de dégager des nouvelles formes pour des emballages carton. Évidemment, on vise à augmenter les revenus, donc on a intérêt à savoir quels formes d'emballage minimisent la proportion

$$\frac{\text{quantité de carton utilisé}}{\text{volume comporté}}$$

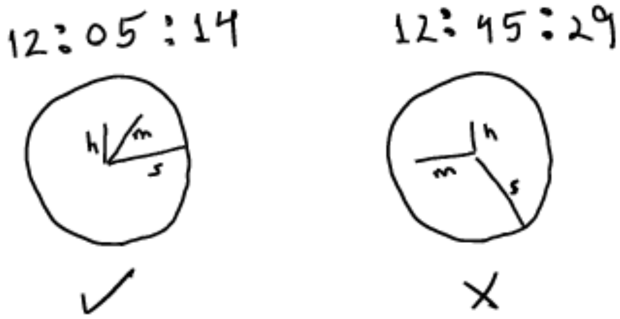
Le mathématicien veut aussi maximiser ses revenus. Sachant que l'emballage tétraédrique est un grand classique de la marque, il imagine que le CEO de la compagnie serait très content s'il pouvait répondre affirmativement (et mettre en oeuvre...) la question suivante : serait-il possible de déformer le tétraèdre, en brisant les quatre faces en facettes plus petites et en les pliant de façon convenable, de manière à augmenter le volume comporté tout en préservant une allure tétraédrique ?

Exemples de déformations :



7 Passe-temps

Le petit Marcel est un enfant très sensible et chaque soir il attend avec impatience que sa mère vienne donner son baiser. Souvent, Marcel est si impatient que, lorsqu'il attends, il ne quitte les yeux de l'horloge. Éventuellement il a remarqué un fait curieux : les trois aiguilles (heures, minutes et secondes) passent plus de temps dans une même moitié de l'horloge. Voici quelques exemples.



Quel est la proportion exacte du jour que les trois aiguilles passent dans une même moitié de l'horloge ? Et si l'on avait plus d'aiguilles, pour compter les millièmes, etc. ? Que se passe-t-il si l'on subdivise le temps de façon différente, par exemple en base 100 au lieu de base 60 ?