Sujet Maths en Jean 2014

11 septembre 2014

1 Tournois de tennis

Huit joueurs de tennis s'affrontent en quart de finale pour gagner la coupe. On suppose que chaque joueur i a une compétence c_i positive et on supposera que s'il affronte le joueur j, il gagnera son match avec probabilité $p_{ij} = \frac{c_i}{c_i+c_j}$.
En moyenne, quelles est la probabilité pour chaque joueur de gagner le tournoi ?
Si on suppose que les p_{ij} sont des probabilités quelconques, que deviennent les résultats ?
Et si on généralise à des tournois plus grands ?

2 Chaîne alimentaire

Dans un parc, il y a une population de lions et de gazelles. En admettant qu'il y a N_L lions et N_G gazelles au début de chaque année, nous admettons qu'on observe :

- pour chaque gazelle, une nouvelle naissance avec probabilité p_e^G,
- pour chaque lion, une nouvelle naissance avec probabilité p_e^L,
- chaque gazelle a une probabilité $p_m^G \frac{1+N_L}{1+N_L+N_G}$ de mourir (soit naturellement, soit mangée par un lion),
- chaque lion a une probabilité $\frac{N_L}{N_L+N_G}$ de mourir (soit naturellement, soit par manque de nourriture).

Que se passera-t-il si les lions sont trop gourmands (p_m^G élevé) ? Si les gazelles font beaucoup d'enfants (p_e^G élevé) ? Ou les lions (p_e^L élevé) ?
On décide d'introduire dans le parc une nouvelle espèce d'animaux, la liozelle, qui mange des lions mais qui est mangée par des gazelles (sûrement une expérience du gouvernement qui a mal tournée...). Que va-t-il se passer ?

3 Dames chinoises

Deux adversaires s'opposent dans un jeu simplifié de dames chinoises. Chacun possède quatre pions disposés comme sur la figure 1.

A	B			1	3
C	D			2	4

FIGURE 1 – Figure pour l'exercice 3

Chacun leur tour, les joueurs choisissent de sauter leur tour ou de jouer un pion, soit en l'avançant d'une case adjacente (gauche, droite, bas, haut), soit en sautant par dessus un pion (allié ou adverse) à condition que la case de derrière soit vide. Vous avez les lettres et votre adversaire les chiffres.
A la première partie, votre adversaire joue de la façon suivante : il commence par avancer le pion 1, puis le pion 2, le 3, le 4 et à nouveau le 1 et ainsi de suite. S'il n'y a pas de pion devant lui, il avance simplement. S'il y a un seul pion, il le saute. S'il y a deux pions, il joue le suivant et continue le cycle. Enfin, si tous les pions sont bloqués, il décide de ne pas jouer.
Proposer une stratégie optimale pour le battre.
A la deuxième partie, votre adversaire s'aperçoit qu'il est plus rentable de commencer son cycle par le pion 3. Pouvez-vous le battre ?
Que se passe-t-il si le joueur garde la même stratégie mais en choisissant au hasard, à chaque étape, le pion parmi les pions pouvant avancer ?
Existe-t-il une stratégie optimale en toute circonstance ? Une stratégie pire que toutes les autres ?
Que se passe-t-il si vous jouer à deux sur un vrai plateau de dames chinoises ? Et à six joueurs ? En supposant que chacun joue pour soi ? En supposant que les autres joueurs se liguent contre vous ?

4 Lever un crayon

Parmi les figures 2, on peut dessiner certaines en ne levant jamais le crayon, d'autres en levant une ou deux fois le crayon exactement.

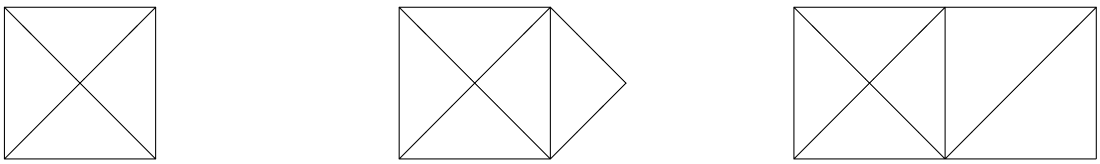

Figure 2 – Figure pour l'exercice 4

Comment savoir, au premier regard, combien de fois sera-t-on obligé de lever le crayon pour reproduire une figure ?

5 Une salade de pâtes

L'autre jour, monsieur Buittomi s'apprêtait à faire cuire des spaghettis lorsque l'un d'entre eux tomba par terre et se cassa en trois. Pendant la cuisson, il prit les trois morceaux et essaya de faire un triangle avec. Quelle est la probabilité que les trois morceaux se soient cassés de telle sorte qu'il puisse le faire ?
Et si le spaghetti s'était cassé en quatre morceaux, quelle est la probabilité qu'il puisse faire encore un triangle ? Un quadrilatère quelconque ?
De même pour un nombre n quelconque de fractures.

6 Un nouvel opérateur

Monsieur et madame Johnson aiment bien créer de nouveaux opérateurs. Madame propose de créer un opérateur $\circ$ de telle sorte que pour tout entier a et b, nous ayons :

$$a \circ a = a + 2, \quad a \circ b = b \circ a \quad \text{et} \quad \frac{a \circ (a+b)}{a \circ b} = \frac{a+b}{b}.$$

Monsieur Johnson dit alors :
- Je pense que pour tout entier a et b, le nombre $a \circ b$ n'est pas forcément un entier.
- Je ne crois pas, répondit Madame, tu confonds avec la condition que $\frac{a \circ (a+b)}{a \circ b} = \frac{a+b}{a}$. En revanche, je pense qu'ils sont tous positifs.
- Je ne suis pas sûr de ça. Cela dépend du signe de a et de b.

Que pensez-vous de cette discussion ?
Êtes-vous capable de calculer la valeur de $a \circ b$ quelque soit les valeurs a et b qu'on vous donne ?

7 Indicateurs

En Mathématiques (et plus généralement en sciences) les chercheurs, quand ils ont obtenu des résultats, les publient sous forme d'articles dans des journaux spécialisés. Ces articles, en général reposent ou utilisent des résultats antérieurs d'autres chercheurs qui les ont publiés antérieurement, et donc citent ces résultats. Pour chaque chercheur "A", on dispose donc (dans une base de donnée accessible) de la liste des articles qu'il a publié et de la liste des travaux des chercheurs "B" qui citent les articles du chercheur "A". Ce travail bibliométrique permet donc de disposer pour chaque chercheur "A" du nombre d'article qu'il a publié N_A, et pour chacun des articles du chercheur A du nombre de fois que cet article a été cité.

Une grande ambition technocratique a été, récemment, de pouvoir évaluer l'activité des chercheurs au moyen de chiffres (cela évite de lire les articles !). A cette fin, pour chaque chercheur, trois chiffres sont facile à construire :

- Le nombre total d'article qu'il a publié, N_A
- Le nombre total de fois ou il a été cité, c'est à dire la somme du nombre de fois ou chacun de ses artricles ont été cités, C_A.
- Le facteur "H" : le plus grand nombre H tel que l'auteur possède au moins H articles tous cités au moins H fois

Par exemple, si le chercheur "A" a publie 1 article qui a éte cite 12 fois, un qui a été cité 4 fois, un cité 3 fois et 6 cités 1 fois, alors $N_A = 9, C_A = 12+4+3+1+1+1+1+1+1 = 25$ et $H_A = 3$ car il a bien 3 articles cités au moins 3 fois mais pas 4 articles cités au moins 4 fois.

Depuis 2 ans, le ministère de la recherche Italien a décidé d'évaluer les chercheurs et de les répartir en deux catégories : Les chercheurs de 1ère classe et ceux de 2eme classe. L'algorithme est le suivant : on calcule pour chaque mathématicien (Italien) les indices N, C, H. Le ministère calcule ensuite les moyennes nationales des indices N, C et H des mathématiciens (Italiens), notées $N_{moy}, C_{moy}, H_{moy}$. Le ministère décide alors que le chercheur A est de 1ere classe si parmis ses trois indices N, C, H, au moins deux sont supérieurs à la moyenne correspondante.

Un mathématicien a alors fait un petit calcul et a fait remarquer que ce système était un peu absurde puisque rien n'empèchait que l'ensemble des mathématiciens Italiens soient de 1ere classe ! Etes-vous d'accord ?

A la suite de cette remarque, le critère a changé et on demande maintenant qu'au moins deux indices parmis 3 soient supérieurs (strictement) à la médiane. On rappelle que la médiale d'une suite finie de nombre est le plus petit nombre m tel qu'au moins la moitié des nombre de l'ensemble est inférieur à m. Par exemple la médiane de

$$\{(0, 0, 1, 3, 4, 4, 5, 8, 8, 7, 6\}$$

est 4.

- Ce nouveau critére résoud-il le problème ?
- Quelle est la proportion maximale de mathématiciens de 1ere classe ?
- que se passerait-il si on prenait une inégalité large ?