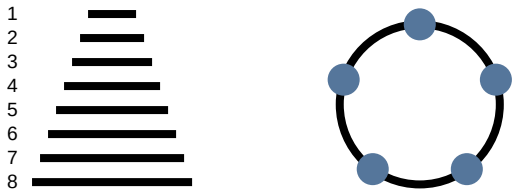
Quelques sujets MATh.en.Jeans

Camille Labourie

Exercice 1. (Les pivots des Kerguelen) Les hivernants des îles Kerguelen s'ennuient en attendant le retour du *Marion Dufresne*, le navire de ravitaillement. Le chef de district, inquiet de l'engourdissement général, a mis au point un jeu de réflexion pour les occuper. Il a réparti cinq socles en cercle et, sur l'un d'entre eux, a disposé 8 disques de tailles croissantes (de haut en bas, le disque 1, le plus petit, puis le disque 2, etc. jusqu'au disque 8, le plus grand).



Le but du jeu est de transférer cet empilement d'un socle à un autre en respectant une règle. Pour $0 \leq m \leq 8$, on dit qu'un socle sert de *m-pivot* s'il supporte les disques 1 à m répartis par ordre croissant: le disque 1 en haut, puis le disque 2,..., jusqu'au disque m (et éventuellement d'autres disques en dessous du disque m). On convient que n'importe quel socle sert de 0-pivot. Chaque mouvement procède ainsi: un m-pivot étant fixé, le disque $m+1$ peut se déplacer en suivant les traits de la Figure 1.

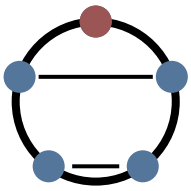


Figure 1: En haut le m-pivot, les traits horizontaux indiquent les déplacement possibles du disque $m+1$.

Est-il possible de transférer un 8-pivot d'un socle à un autre? Ce jeu sera-t-il suffisant pour occuper les hivernants jusqu'au prochain passage du *Marion*?

Exercice 2 (W ou le souvenir d'enfance, de George Perec).

Il y aurait, là-bas, à l'autre bout du monde, une île. Elle s'appelle W.

La tradition fait remonter à un certain Wilson la fondation et le nom même de l'île. Cela n'a pas une très grande importance. Ce qui est vrai, ce qui est sûr, ce qui frappe dès l'abord, c'est que W est aujourd'hui un pays où le sport est Roi, une nation d'athlètes où le Sport et la vie se confondent en un magnifique effort.

Les athlètes de W sont groupés dans quatre villages. Les Olympiades, qui ont lieu une fois par an, viennent de désigner un champion. Chaque jour le champion peut passer la nuit dans le village de son choix à condition de jouer son titre contre un athlète local. *Mais, à W, les institutions sont là pour rappeller que la victoire est une grâce et non un droit. Il faut savoir que le hasard fait aussi partie de la règle.* Les arbitres ont déja décidé à Am Stram Gram de l'issue de tous les matchs possibles jusqu'à l'an prochain. Chacun des jours suivant les Olympiades, il y a 4×4 situations possibles: le champion ayant passé la nuit au village i se rendra au village j (il est possible que $i = j$). Les arbitres ont sélectionné pour chaque jour w situations qui donneront lieu à la victoire du champion (et pour les autres, sa défaite). Le champion a-t-il une chance de conserver son titre jusqu'aux prochaines Olympiades?

Exercice 3 (Composer un système de serrurerie). Une clé est composée de cinq crans qui ont chacune une profondeur parmi 10 possibilités. On peut donc représenter une clé par un code

$$(x_1, \ldots, x_5) \text{ où } x_i \in \{0, \ldots, 9\}.$$

Le nombre x_i représente la profondeur du i-ième cran. D'autre part, une serrure est équipée d'un système de goupilles qui servent à filtrer les profondeurs des crans. On peut représenter une serrure par une suite

$$(F_1, \ldots, F_5) \text{ où } F_i \subset \{0, \ldots, 9\} \text{ est un ensemble à 1 ou 2 éléments.}$$

Chaque ensemble F_i s'interprète comme un filtre qui laisse passer une ou deux profondeurs du i-ième cran.

La serrure $(F_1, \ldots, F_5)$ est déverrouillée par les clés de la forme $(x_1, \ldots, x_5)$ où, pour tout i, $x_i \in F_i$.

Un serrurier dispose d'un organigramme des droits d'accès (la liste des utilisateurs, la liste des portes et qui a accès à quoi) et doit composer un jeu de clés et de serrures. On donne deux exemples d'organigrammes:

1. Les chambres d'un hôtel: chaque client a une clé qui ouvre la porte de sa chambre (et rien d'autre) mais le personnel a une clé qui ouvre toutes les portes.

2. Le laboratoire de mathématiques d'Orsay: il y a les bureaux individuels, la salle de discussion, la salle de stockage, le local informatique. Parmi les utilisateurs, on distingue les mathématiciens, les gestionnaires, les informaticiens et les agents d'entretien. Chaque mathématicien peut accéder à son bureau et à la salle de discussion. Chaque gestionnaire peut accéder à *tous* les bureaux des gestionnaires, à la salle de discussion et à la salle de stockage. Les informaticiens ont accès à tout. Les agents d'entretien ont accès à tout sauf au local informatique.

Comment le serrurier doit-il s'y prendre pour minimiser le nombre de filtres différents à usiner?

Exercice 4 (Jouer au morpion sur des surfaces, sujet proposé par Gabriel Pallier)**.** On s'intéresse aux stratégies du jeu de morpion classique (quadrillage 3×3). Le premier joueur a-t-il une stratégie pour gagner à tous les coups? le second joueur peut-il arriver à une partie nulle? On se pose ensuite les même questions pour un jeu de morpion obtenu en "recollant" les bords de différentes façons que l'on précisera.