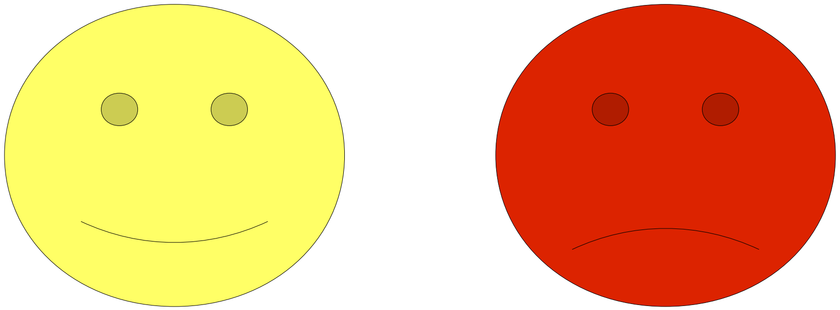
# Heureux ou Malheureux ?



I. Définition du problème
II. Les nombres heureux
III. Les nombres malheureux
IV. Elargissement
V. Conclusion

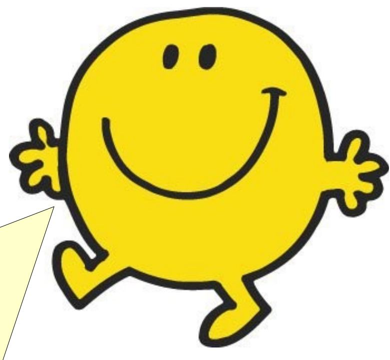
# I. Définition du problème

$$a + b = n$$

$$a \times b = n \times k$$

**Avec a et b entiers positifs et différents de 0**

# Exemples de nombres heureux



On choisit le nombre 9.

$3 + 6 = 9$

$3 \times 6 = 18$

18 est divisible par 9, nombre de départ.

Donc 9 est heureux.

De même, 12 est heureux :

$6 + 6 = 12$

$6 \times 6 = 36$

36 est divisible par 12.

# Exemples de nombres malheureux

On choisit le nombre 3.

1 + 2 = 3

1 x 2 = 2

2 n'est pas divisible par 3,

3 est malheureux.

De même, 5 est malheureux :

Deux possibilités :

1 + 4 = 5

1 x 4 = 4

2 + 3 = 5

2 x 3 = 6

Ni 4 ni 6 ne sont divisibles par 5, donc 5 est malheureux.

# II. Les Nombres Heureux

## A) Le carré d'un nombre entier

Exemple :

$$9 = 3^2$$

$$\underbrace{3^2}_{n} = \underbrace{3}_{a} + \underbrace{(3^2 - 3)}_{b\,=\,n-a}$$

$$a \times b = 3 \times (3^2 - 3)$$

$$= \underbrace{3^2}_{n} \times \underbrace{(3 - 1)}_{k}$$

Démonstration :

$$n = d^2$$

$$\underbrace{d^2}_{n} = \underbrace{d}_{a} + \underbrace{(d^2 - d)}_{b\,=\,n-a}$$

$$a \times b = n \times k$$

$$a \times b = d \times (d^2 - d)$$

$$= d^2 \times d - d^2$$

$$= \underbrace{d^2}_{n} \times \underbrace{(d - 1)}_{k}$$

# B) Multiples du carré d'un entier

Exemple :

$$12 = 3 \times 2^2$$

$$3 \times 2^2 = 3 \times [\, 2 + (2^2 - 2) \,]$$

$$= \underbrace{3 \times 2}_{a} + \underbrace{3 \times (2^2 - 2)}_{b}$$

$$a \times b = 12 \times k$$

$$a \times b = 3 \times 2 \times [\, 3 \times (2^2 - 2) \,]$$

$$= \underbrace{3 \times 2^2}_{n} \underbrace{(\, 3 \times 2 - 3)}_{k}$$

Démonstration :

$$n = q \times d^2$$

$$q \times d^2 = q \times [\, d + (d^2 - d) \,]$$

$$= \underbrace{q \times d}_{a} + \underbrace{q \times (d^2 - d)}_{b}$$

$$a \times b = n \times k$$

$$a \times b = q \times d \times [\, q \times (d^2 - d) \,]$$

$$= \underbrace{q \times d^2}_{n} \, (\underbrace{q \times d - q}_{k})$$

# II. Les nombres malheureux

## Décomposition en facteurs premiers

Tout nombre peut s'écrire sous la forme de produits de facteurs premiers.

$$N = f_1^{a1} \times f_2^{a2} \times f_3^{a3} \times \ldots \times f_n^{n}$$

Exemple : $200 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$

$$= 2^3 \times 5^2$$

# A. Nombre premier

$13 = n$

$a + b = 13$

$\Rightarrow a<13$ et $b<13$

$13 \times k = a \times b$

13 divise $a \times b$

Il ne divise ni a, ni b car $a<p$ et $b<p$

Donc il ne divise pas $a \times b$. Absurde.

Donc 13 est malheureux.

Démonstration

$p = n$

$a + b = p$

$\Rightarrow a<p$ et $b<p$

$p \times k = a \times b$

p divise $a \times b$

Il ne divise ni a, ni b car $a<p$ et $b<p$

Donc il ne divise pas $a \times b$. Absurde.

Donc les nombres premiers sont malheureux.

# B. Multiples de nombres premiers différents

$3 \times 5 = p_1 \times p_2 = n$

$a \times b = n \times k$

$a \times b = 3 \times 5 \times k$

3 divise a ou 3 divise b

$a + b = p_1 \times p_2$

3 divise $3 \times 5$ , 3 divise a

Donc 3 divise b !

Où est 5 ?

Démonstration

$$p_1 \times p_2 = n$$

$$a \times b = n \times k$$

$$\Leftrightarrow a \times b = p_1 \times p_2 \times k$$

$p_1$ divise a ou $p_1$ divise b

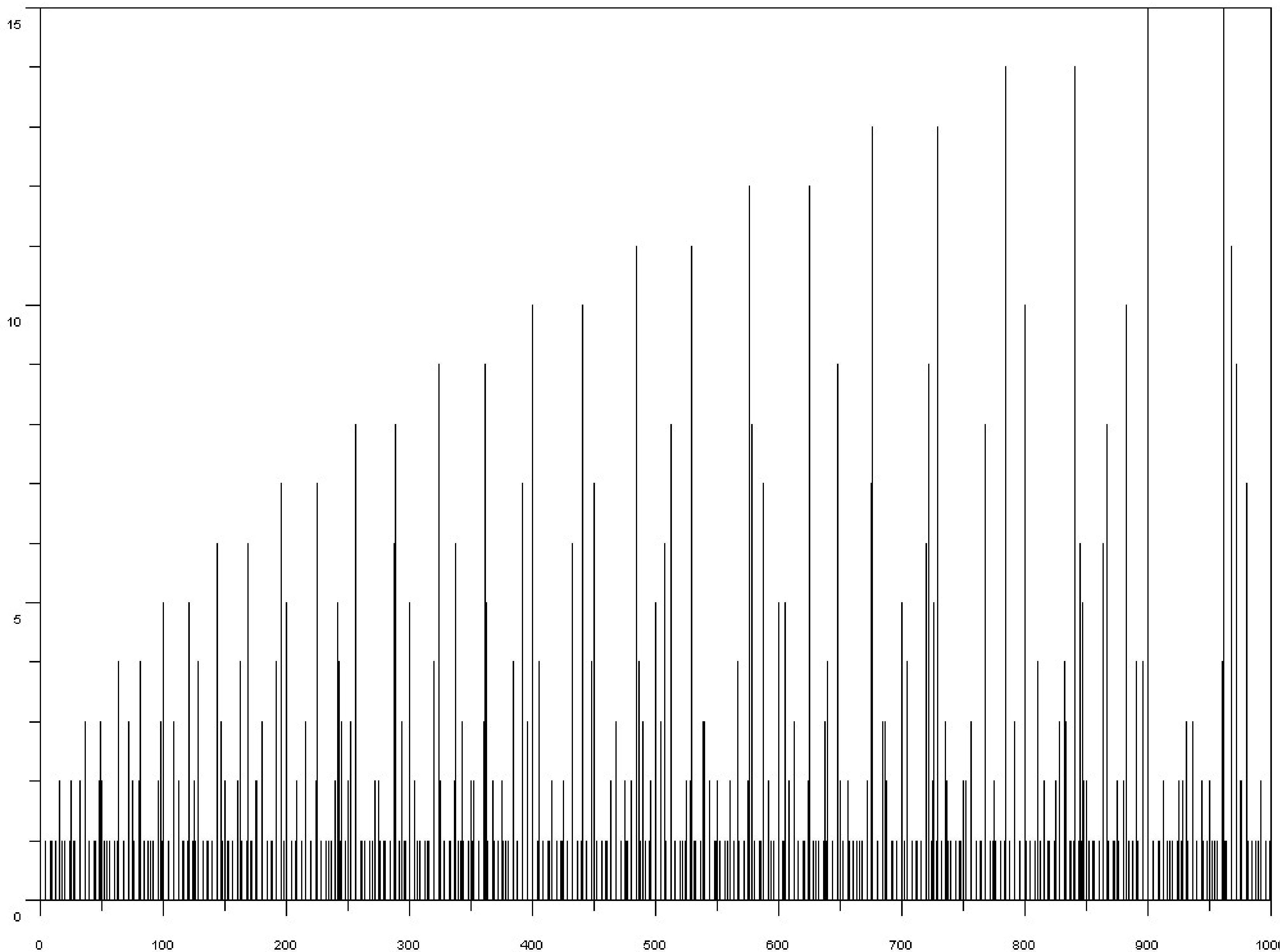
$$a + b = p_1 \times p_2$$

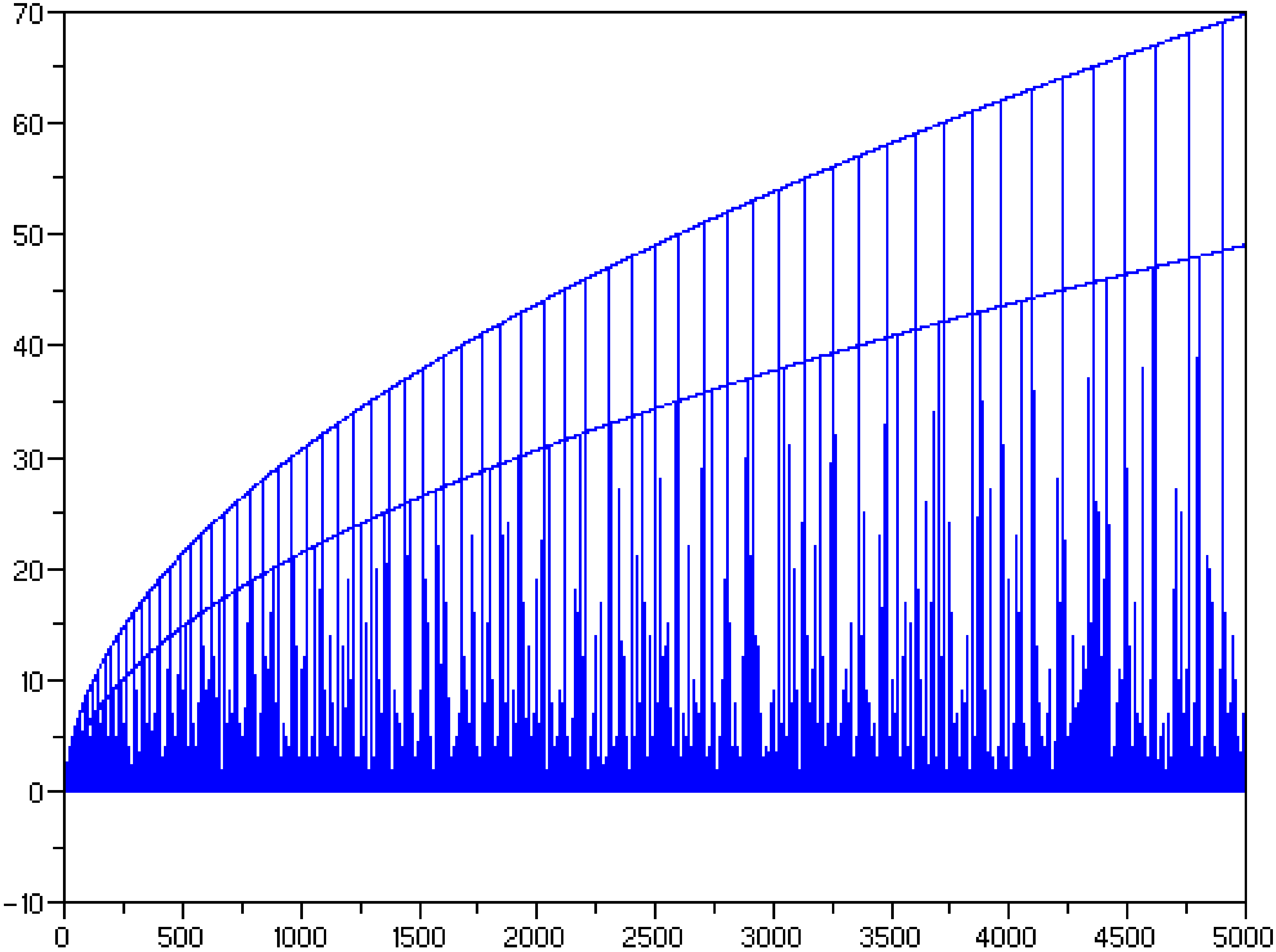
$p_1$ divise a

Donc $p_1$ divise b !

Où est $p_2$ ?

# V. **Élargissement**





70
60
50
40
30
20
10
0
−10
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
4500
5000

# VI. <u>Conclusion</u>

**Tous les nombres carrés ou multiples de carrés sont heureux !**

**Tous les nombres premiers ou produits de nombres premiers différents sont malheureux...**