Plan de table

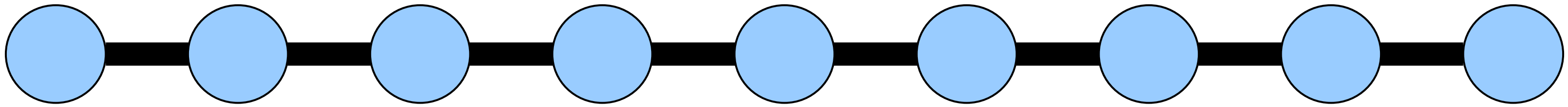
Le problème

Un maître d'hôtel, mathématicien amateur, a disposé 9 verres sur une table de réception de manière à ce qu'ils forment 10 alignements de 3 verres.

- Pouvez-vous trouver cette disposition ?
- Y a t-il plusieurs dispositions possibles ?
- Est-il possible d'avoir plus de 10 alignements ?

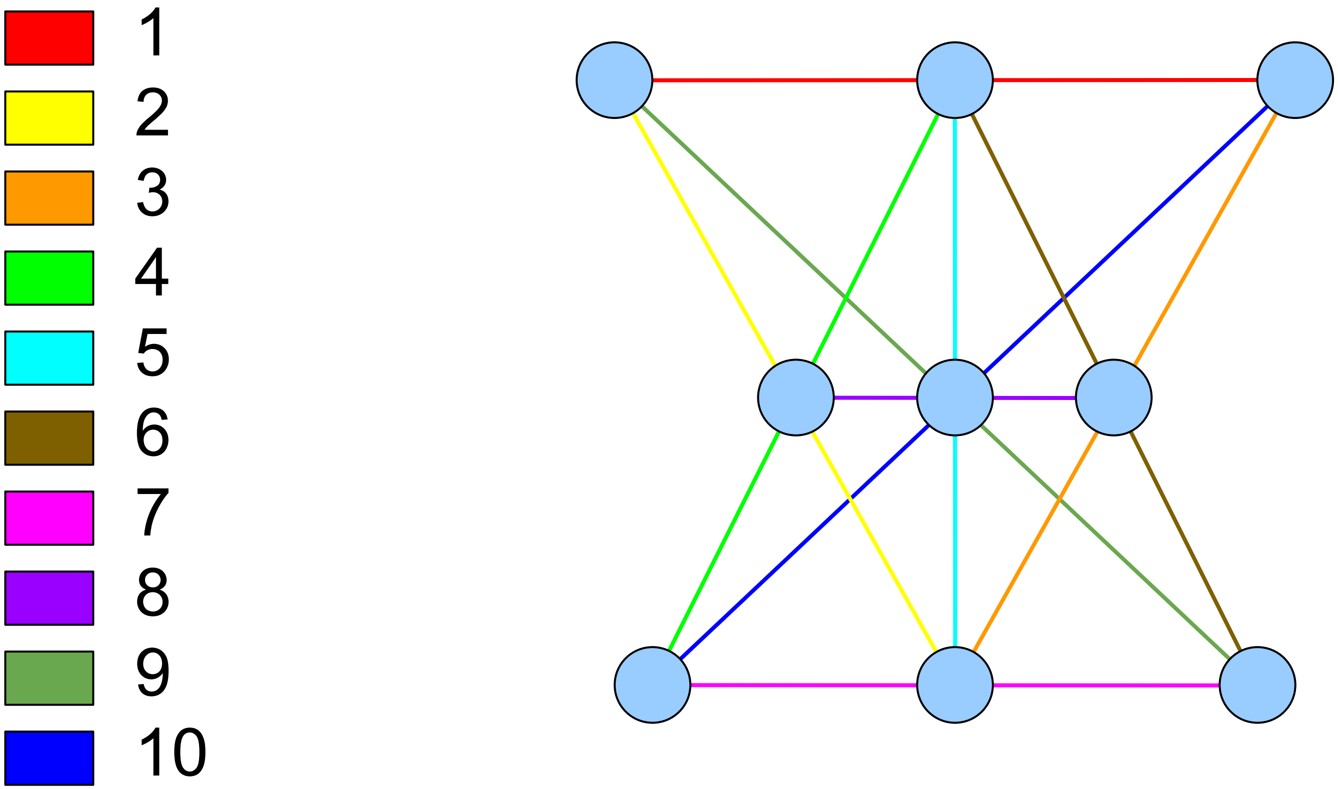
Une Précision

On ne veut pas d'alignements de plus de 3 verres



84 Alignements

Une première solution



Une première relation

- A le nombre total d'alignement, ici A=10
- On considère les verres comme des points. P le nombre de points, ici P=9
- Nous utiliserons le nombre d'alignement passant par un verre, $n1$; $n2$; $n3$ … nP

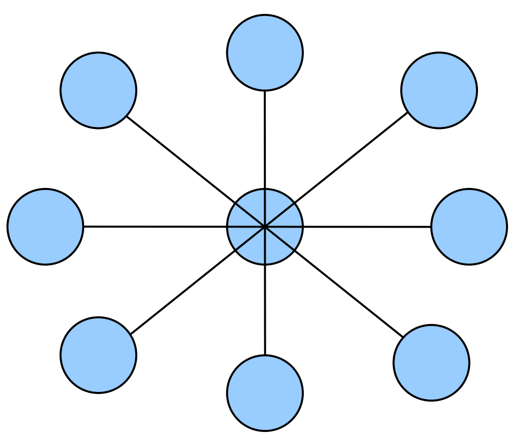
Dans notre situation : $n1+n2+...+nP = 3A$
Donc ici $n1+n2+…+n9 = 30$

Une deuxième relation

Soit un verre et n le nombre d'alignements auxquels il appartient

$$n \leqslant \frac{P-1}{2}$$

Donc ici $n \leqslant \frac{9-1}{2} = 4$



Conséquences

- Soit K le nombre maximum d'alignements passant par un point.

$n_1+n_2+...+n_P \leqslant PK$

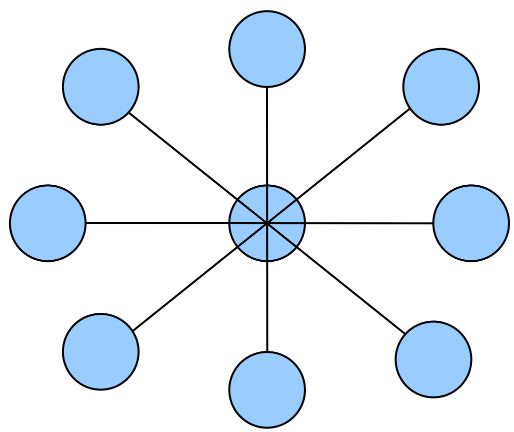
D'où $3A \leqslant PK$

$A \leqslant PK/3$

Donc, pour P=9 comme K=4 , $A \leqslant 12$

- Pour tout point M pour lequel n=4, les 4 alignements passant par M

comprennent les 8 autres points.



Donc tout autre point est aligné avec M

Résolution : cas d'un point "à 1"

Soit un M point compris dans <u>un</u> seul alignement

Donc, tous les points "à 4" doivent appartenir à l'alignement auquel appartient M.

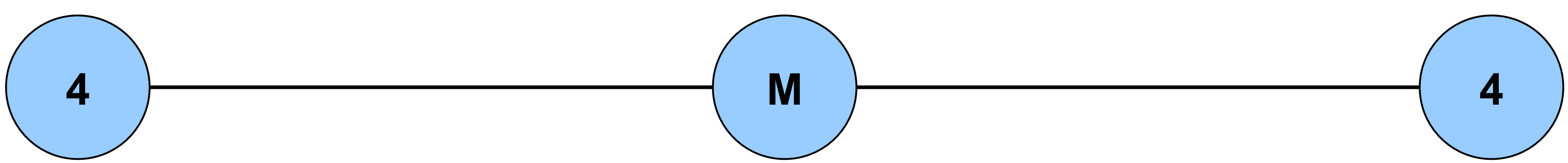
Or, il ne peut pas il y avoir plus de 3 points dans un alignement.

Dans ce cas, il ne peut y avoir plus de 2 points "à 4"

Or, (4+4+1+6x3)/3 = 9 < 10

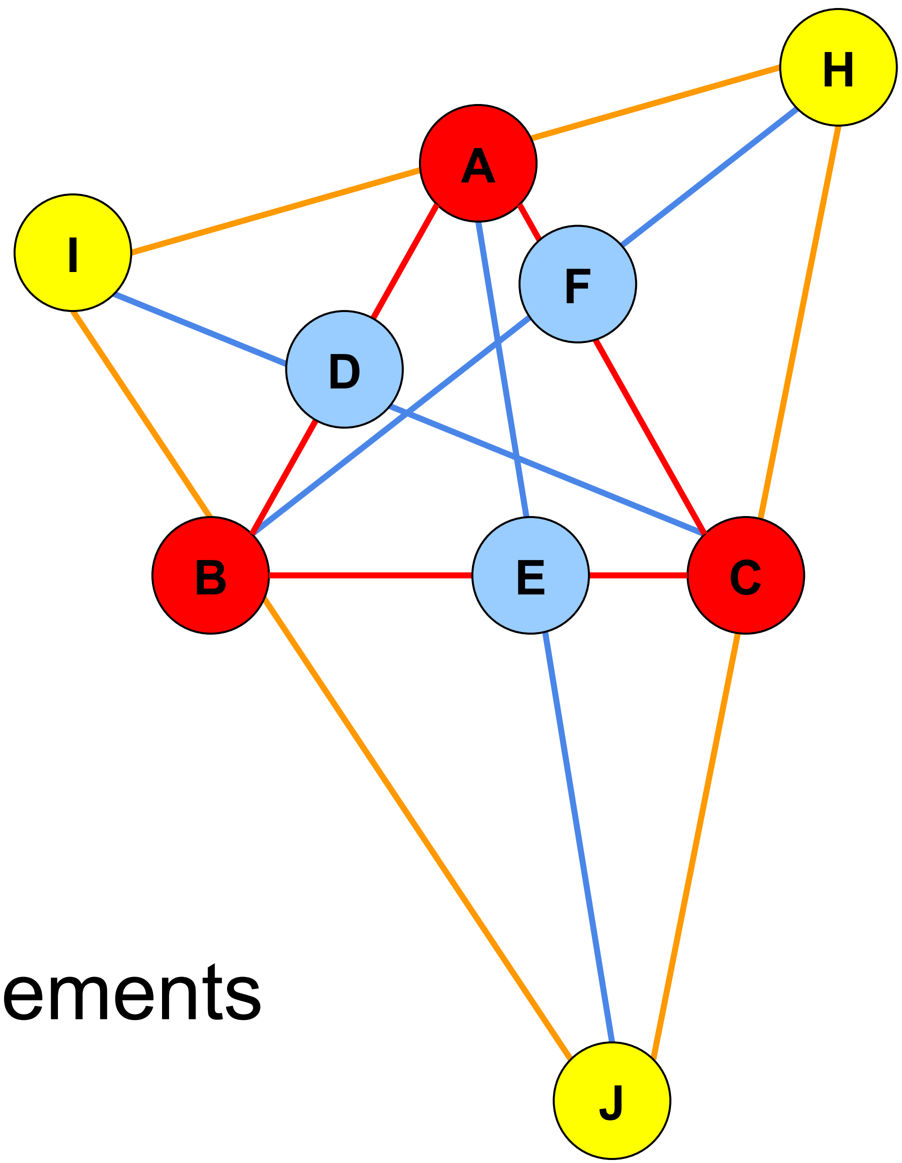
Or, A= $\sum_{i=0}^{9} n_i$ / 3

Donc, dans ce cas, A=9 < 10



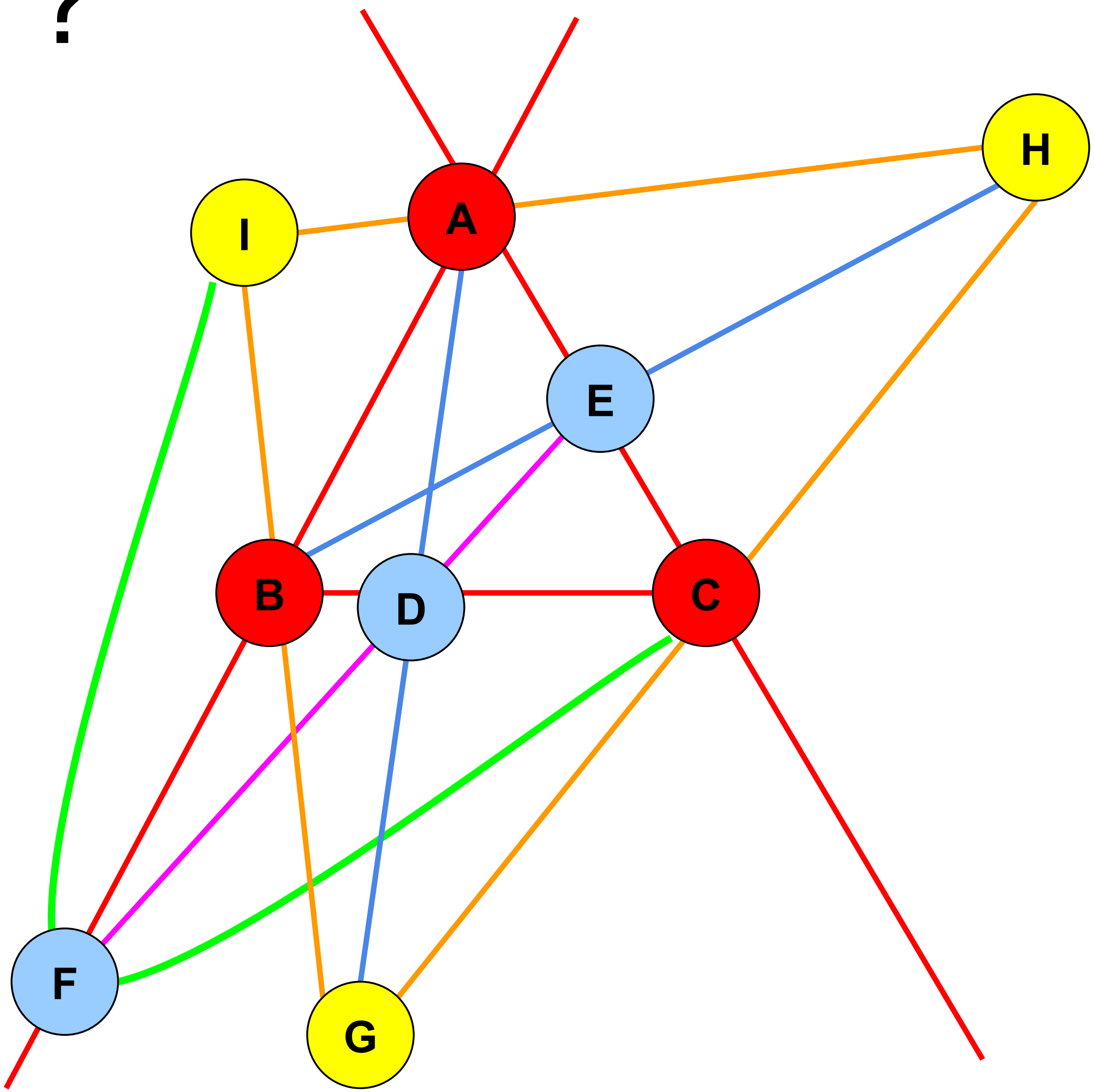
Donc pour A$\geqslant$10, tout point appartient à au moins 2 alignements

3 Points à 4 non-alignés donnent au plus 9 alignements



9 alignements

3 points à 3 peuvent-ils être alignés ?



On en déduit

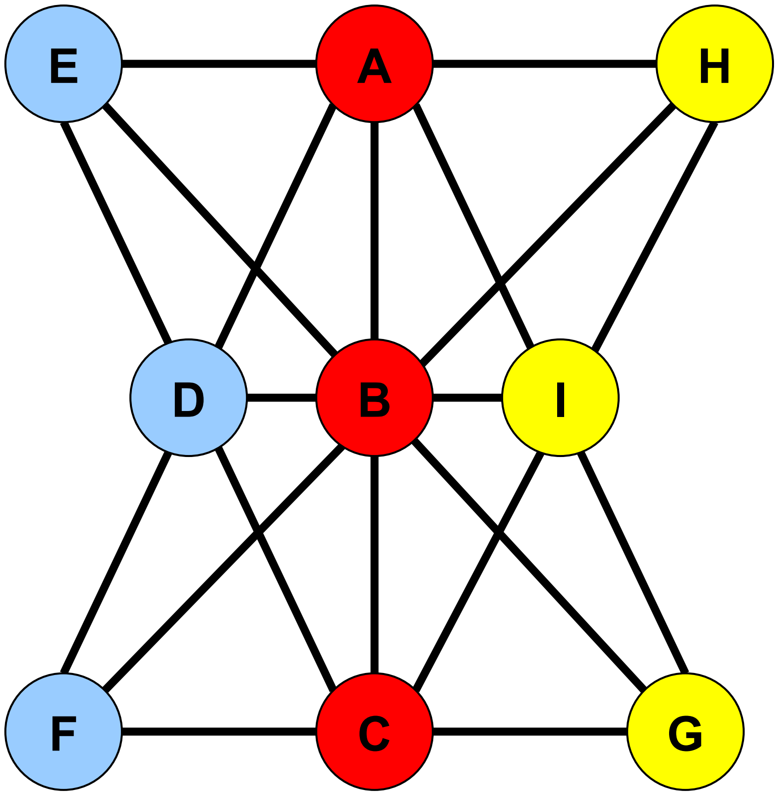
- Donc les points à 4 sont forcément alignés dans les configuration de plus de 9 alignements

- Comme on ne peut pas aligner 4 points on a pas plus de 3 points à 4 alignements

- On a donc au maximum 3x4+6x3=30

Donc au maximum 10 alignements

La seule figure ?



Merci de votre attention

Il y a-t-il d'autres configurations imaginables

On cherche a obtenir au moins 10 alignements donc avec des points à :

- 2
- 3
- 4

On a donc au moins 3 points à 4 car $2x4+7x3=29<30$