Les nombres parfaits

Nicolas Déhais

Lycée Blaise Pascal

Congrès Maths en jeans

Plan

1. Les nombres parfaits pairs
   - Quelles conditions pour un nombre parfait pair ?
   - Les nombres de Mersenne premiers
2. Quelques propriétés des nombres parfaits...
   - ... dans le cas des parfaits pairs
   - ... qui permettent d'éliminer des nombres impairs

Qu'est-ce qu'un nombre parfait ?

Un nombre n est dit parfait si la somme de ses diviseurs, 1 et lui-même compris, vaut $2n$.

Qu'est-ce qu'un nombre parfait ?

Un nombre n est dit parfait si la somme de ses diviseurs, 1 et lui-même compris, vaut 2n.
Par exemple, 6 est parfait car $1+2+3+6=12=2\times 6$

Qu'est-ce qu'un nombre parfait ?

Un nombre n est dit parfait si la somme de ses diviseurs, 1 et lui-même compris, vaut 2n.
Par exemple, 6 est parfait car $1+2+3+6=12=2\times 6$
Les 4 plus petits nombres parfaits (trouvés grâce à un programme Python) sont 6, 28, 496 et 8128.

Plan

Une façon d'écrire tous les nombres

Théorème

Tout entier est le produit d'une puissance de 2 et d'un nombre impair.

Nous pouvons donc écrire tout entier n sous la forme $2^{p-1}m$, m étant un nombre impair.

Somme des diviseurs

Si $m = 1$ la somme des diviseurs vaut :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{p-1}$$

Somme des diviseurs

Si $m = 1$ la somme des diviseurs vaut :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{p-1}$$

Si m est un nombre premier on trouve :

$$(2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{p-1})(1 + m)$$

Somme des diviseurs

Si $m = 1$ la somme des diviseurs vaut :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{p-1}$$

Si m est un nombre premier on trouve :

$$(2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{p-1})(1 + m)$$

Sinon :

$$(2^0 + 2^1 + ... + 2^{p-1})(1 + m + d_1 + d_2 + ...)$$

d_1, d_2, etc. étant les diviseurs de m, sauf 1 et m

Réunir les trois formules

Soit un nombre D qu'on définit de la façon suivante :

- Si $m=1$ alors $D=-1$

Réunir les trois formules

Soit un nombre D qu'on définit de la façon suivante :

- Si $m = 1$ alors $D = -1$
- Si m est premier alors $D = 0$

Réunir les trois formules

Soit un nombre D qu'on définit de la façon suivante :

- Si $m = 1$ alors $D = -1$
- Si m est premier alors $D = 0$
- Si m a des diviseurs alors $D = d_1 + d_2 + \dots$

Réunir les trois formules

Soit un nombre D qu'on définit de la façon suivante :

- Si $m = 1$ alors $D = -1$
- Si m est premier alors $D = 0$
- Si m a des diviseurs alors $D = d_1 + d_2 + \dots$

De cette façon dans tous les cas la somme des diviseurs vaut alors :

$$(2^0 + 2^1 + ... + 2^{p-1})(1 + m + D)$$

L'équation des nombres parfaits

On remplace $2^0+2^1+\ldots+2^{p-1}$ par 2^p-1.

L'équation des nombres parfaits

On remplace $2^0+2^1+...+2^{p-1}$ par 2^p-1.On cherche donc les solutions de l'équation suivante :

$$\begin{aligned}(2^p-1)(1+m+D)=2\times 2^{p-1}m &\Leftrightarrow 2^p-1+2^pm-m+D(2^p-1)=2^pm\\ &\Leftrightarrow D(2^p-1)=-(2^p-1)+m\\ &\Leftrightarrow D=\frac{m}{2^p-1}-1\end{aligned}$$

Les solutions paires

$$D = \frac{m}{2^p - 1} - 1$$

donc :

- Si $2^p - 1 = 1$ alors n est impair

Les solutions paires

$$D = \frac{m}{2^p - 1} - 1$$

donc :

- Si $2^p - 1 = 1$ alors n est impair
- Si $2^p - 1$ est un diviseur de m autre que 1 ou m alors $\frac{m}{2^p-1}$ est aussi un diviseur de m, or il est plus grand que D, ce qui est impossible.

Les solutions paires

$$D = \frac{m}{2^p - 1} - 1$$

donc :

- Si $2^p - 1 = 1$ alors n est impair
- Si $2^p - 1$ est un diviseur de m autre que 1 ou m alors $\frac{m}{2^p-1}$ est aussi un diviseur de m, or il est plus grand que D, ce qui est impossible.
- Si $2^p - 1 = m$ alors $D = \frac{m}{m} - 1 = 0$

Les solutions paires

$$D = \frac{m}{2^p - 1} - 1$$

donc :

- Si $2^p - 1 = 1$ alors n est impair
- Si $2^p - 1$ est un diviseur de m autre que 1 ou m alors $\frac{m}{2^p-1}$ est aussi un diviseur de m, or il est plus grand que D, ce qui est impossible.
- Si $2^p - 1 = m$ alors $D = \frac{m}{m} - 1 = 0$

Donc un nombre pair est premier si et seulement si il est de la forme $2^{p-1}(2^p - 1)$ avec $2^p - 1$ premier.

Plan

1. Les nombres parfaits pairs
   - Quelles conditions pour un nombre parfait pair ?
   - Les nombres de Mersenne premiers

2. Quelques propriétés des nombres parfaits...
   - ... dans le cas des parfaits pairs
   - ... qui permettent d'éliminer des nombres impairs

Qu'est-ce qu'un nombre de Mersenne ?

Définition

Un nombre de Mersenne est un nombre de la forme $2^p - 1$

Qu'est-ce qu'un nombre de Mersenne ?

Définition

Un nombre de Mersenne est un nombre de la forme $2^p - 1$

On veut connaître les conditions pour qu'un nombre de Mersenne soit premier, afin de savoir plus facilement si un nombre pair de la forme $2^{p-1}(2^p - 1)$ est parfait.

Primalité de l'exposant

Pour tous les entiers naturels a et b, on a :

$$\begin{aligned}(a^0+a^1+\ldots+a^{b-1})(a-1) &= a^1+\ldots+a^{b-1}+a^b-a^0-a^1-\ldots-a^{b-1}\\ &= a^b-1\end{aligned}$$

Si on prend $a=2$ et $b=p$, $a-1=1$ et donc a^b-1 est peut-être premier.

Primalité de l'exposant

Pour tous les entiers naturels a et b, on a :

$$\begin{aligned}(a^0 + a^1 + \ldots + a^{b-1})(a-1) &= a^1 + \ldots + a^{b-1} + a^b - a^0 - a^1 - \ldots - a^{b-1} \\ &= a^b - 1\end{aligned}$$

Si on prend $a = 2$ et $b = p$, $a - 1 = 1$ et donc $a^b - 1$ est peut-être premier. En revanche, si il existe un nombre q qui divise p alors comme cette formule s'applique aussi à $a = 2^q$ et $b = p/q$ et donc $2^p - 1$ n'est pas premier.

Plan

Ils se terminent tous par 6 ou 28

Si on s'intéresse uniquement aux derniers chiffres des puissances de 2 et des nombres de Mersenne permettant de former un nombre de la forme $2^{p-1}(2^p - 1)$, on obtient :

Ils se terminent tous par 6 ou 28

Si on s'intéresse uniquement aux derniers chiffres des puissances de 2 et des nombres de Mersenne permettant de former un nombre de la forme $2^{p-1}(2^p-1)$, on obtient :

- $2 \times 3 = 6$
- $4 \times 7 = 28$
- $8 \times 15 \Rightarrow$m non premier
- $16 \times 31 = *96$
- $32 \times 63 = **16$
- $64 \times 27 = **28$
- $28 \times 55 \Rightarrow$m non premier
- ...
- $52 \times 3 = *56$
- $4 \times 7 = 28$

Ils se terminent tous par 6 ou 28

Si on s'intéresse uniquement aux derniers chiffres des puissances de 2 et des nombres de Mersenne permettant de former un nombre de la forme $2^{p-1}(2^p-1)$, on obtient :

- $2 \times 3 = 6$
- $4 \times 7 = 28$
- $8 \times 15 \Rightarrow$m non premier
- $16 \times 31 = *96$
- $32 \times 63 = **16$
- $64 \times 27 = **28$
- $28 \times 55 \Rightarrow$m non premier
- ...
- $52 \times 3 = *56$
- $4 \times 7 = 28$

Comme cette suite de derniers chiffres ne peut que se répéter, tous les nombres parfaits se finiront par 6 ou 28.

Ce sont des nombres triangulaires

Un nombre parfait est de la forme $2^{p-1}(2^p - 1)$.
On peut le réécrire comme $\frac{2^p(2^p-1)}{2}$.
Autrement dit tout nombre parfait vaut $\frac{n(n+1)}{2}$ avec $n = 2^p - 1$
Donc c'est la somme de tous les entiers naturels jusqu'à $2^p - 1$inclus.

Plan

Un carré parfait n'est jamais un nombre parfait !

On a trouvé précédemment l'égalité

$$D = \frac{m}{2^p - 1} - 1$$

Un carré parfait n'est jamais un nombre parfait !

On a trouvé précédemment l'égalité

$$D = \frac{m}{2^p - 1} - 1$$

$\frac{m}{2^p-1}$ et -1 étant des nombres impairs, on en déduit que D est pair.
Pour tout d qui divise m, il existe un autre diviseur de m qui est m/d, sauf dans le cas de $\sqrt{m}$ puisque $m/\sqrt{m} = \sqrt{m}$.

Un carré parfait n'est jamais un nombre parfait !

On a trouvé précédemment l'égalité

$$D = \frac{m}{2^p - 1} - 1$$

$\frac{m}{2^p-1}$ et -1 étant des nombres impairs, on en déduit que D est pair.
Pour tout d qui divise m, il existe un autre diviseur de m qui est m/d, sauf dans le cas de $\sqrt{m}$ puisque $m/\sqrt{m} = \sqrt{m}$.
Comme m est impair, tous ses diviseurs le sont, donc chaque paire de diviseurs a une somme paire.
En additionnant les sommes paires, on trouvera toujours un nombre pair, mais si m a une racine carrée entière, on trouvera une somme impaire, donc D n'est pas pair si m est un carré parfait.

6 est le seul produit de deux nombres premiers parfait

Soient a et b deux nombres premiers dont le produit ab est parfait, avec $a < b$, autrement dit $1 + a \leq b$

6 est le seul produit de deux nombres premiers parfait

Soient a et b deux nombres premiers dont le produit ab est parfait, avec $a < b$, autrement dit $1 + a \leq b$
Ssi ab est parfait alors :

$$1 + a + b + ab = 2ab \Leftrightarrow (1 + a) + b = ab$$

6 est le seul produit de deux nombres premiers parfait

Soient a et b deux nombres premiers dont le produit ab est parfait, avec $a < b$, autrement dit $1 + a \leq b$
Ssi ab est parfait alors :

$$1 + a + b + ab = 2ab \Leftrightarrow (1 + a) + b = ab$$

On a donc $b \geq ab/2$, et comme $a \geq 2$ on a aussi $b \leq ab/2$
d'où $b = ab/2$, $a = 2$, $b = a + 1 = 3$ et donc $ab = 6$

Les puissances d'un nombre premier ne sont jamais parfaites

Pour tout nombre parfait a^b avec a premier et $b \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$2a^b = a^0 + a^1 + ... + a^{b-1} + a^b \Leftrightarrow a^b = \frac{a^b - 1}{a - 1}$$

Les puissances d'un nombre premier ne sont jamais parfaites

Pour tout nombre parfait a^b avec a premier et $b \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$2a^b = a^0 + a^1 + ... + a^{b-1} + a^b \Leftrightarrow a^b = \frac{a^b - 1}{a - 1}$$

Sachant que a est premier on a donc $a - 1 \geq 1$ et donc $\frac{a^b-1}{a-1} \leq a^b - 1 < a^b$, ce qui contredit l'égalité.

Conclusion

Avec l'aide des critères trouvés pour savoir si un nombre pair est parfait ou non, plus de nombres parfaits peuvent être trouvés rapidement avec Python : 33 550 336, 8 589 869 056, 137 438 691 328, 2 305 843 008 139 952 128.

Conclusion

Avec l'aide des critères trouvés pour savoir si un nombre pair est parfait ou non, plus de nombres parfaits peuvent être trouvés rapidement avec Python : 33 550 336, 8 589 869 056, 137 438 691 328, 2 305 843 008 139 952 128. On ne connaît pas de nombres parfaits impairs, mais on n'a pas non plus de preuve qu'il n'en existe aucun. Cependant, il y a certaines catégories de nombres qui ne peuvent pas l'être.