Les nombres parfaits

2017-2018

Nom, prénom et niveaux des élèves : Nicolas Déhais et Jean de Sainte Marie, première S

Établissement : Lycée Blaise Pascal, Orsay

Enseignant(s) : Hélène Cochard, Denis Julliot, Didier Missenard.

Chercheur(s) : Romain Deseine.

Table des matières

1 Présentation du sujet

Un nombre n est dit parfait si et seulement si la somme de ses diviseurs (1 et n compris) vaut $2n$. On cherche à déterminer les conditions qui réalisent cette égalité.

2 Parfaits pairs

2.1 Comment trouver des nombres parfaits pairs

Pour tout n il existe une forme $2^{p-1}m$ avec m impair.

Si m est premier, la somme des diviseurs de n vaut

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{p-1} + 2^0 m + 2^1 m + \cdots + 2^{p-1} m$$

qui s'écrit aussi :

$$(2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{p-1})(1+m)$$

Si m est non premier et différent de 1, la somme des diviseurs vaut

$$(2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{p-1})(1 + m + d_1 + d_2 + \dots)$$

d_1, d_2, etc. étant les diviseurs de m, excepté 1 et lui-même.

Si m vaut 1, la somme des diviseurs vaut :

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{p-1} = (2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{p-1})(1 + m - 1)$$

Soit D tel que :

— Si m est premier alors D vaut 0

— Si m est non premier et différent de 1 alors D vaut la somme de ses diviseurs, excepté 1 et m

— Si m vaut 1 alors D vaut -1

Dans les 3 cas, la somme des diviseurs vaut alors :

$$(2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{p-1})(1 + m + D)$$

autrement dit :

$$(2^p - 1)(1 + m + D)$$

On cherche maintenant à trouver ce que vaut D en fonction de m quand n est parfait. On a donc :

$$\begin{aligned}(2^p - 1)(1 + m + D) = 2 \times 2^{p-1} m &\Leftrightarrow 2^p - 1 + 2^p m - m + D(2^p - 1) = 2^p m \\ &\Leftrightarrow D(2^p - 1) = -(2^p - 1) + m \\ &\Leftrightarrow D = -1 + \frac{m}{2^p - 1}\end{aligned}$$

donc m est un multiple de $2^p - 1$.

Il y a alors trois cas de figure :

— Si $2^p - 1 = 1$ alors $D = -1 + m$ (cas des nombres impairs sur lesquels on reviendra plus tard, cette égalité équivaut en effet à $p = 1$ et donc $2^{p-1} = 1$)
— Si $2^p - 1$ est un diviseur de m différent d'1 et m alors cela revient à affirmer que la somme des diviseurs différents d'1 et m est plus petite qu'un de ces diviseurs, ce qui est absurde
— Si $2^p - 1 = m$ alors $D = 0$, donc m est premier, donc :
Théorème 1. *Un nombre pair est parfait si et et seulement si il est de la forme*

$$2^{p-1}(2^p - 1)$$

avec $2^p - 1$ *premier.*

2.2 Nombres de Mersenne premiers

On appelle "nombre de Mersenne" tout nombre de la forme $2^p - 1$. Après avoir trouvé le théorème 1 nous avons cherché des moyens de vérifier si un nombre de Mersenne est premier plus vite qu'en utilisant la définition d'un nombre premier, qui nécessite de vérifier pour chaque premier inférieur à sa racine si il le divise ou non. Nous avons prouvé le

Théorème 2. *Si un nombre de Mersenne est premier alors l'exposant* p *de la puissance de 2 qui le suit est aussi premier.*

par le raisonnement suivant :
Pour tous les entiers naturels a et b, on a :

$$\begin{aligned}(a^0 + a^1 + ... + a^{b-1})(a-1) &= a^1 + ... + a^{b-1} + a^b - a^0 - a^1 - ... - a^{b-1} \\ &= a^b - 1\end{aligned}$$

Si on prend $a = 2$ et $b = p$, $a - 1 = 1$ et donc $a^b - 1$ est peut-être premier.

En revanche, si il existe un nombre q qui divise p alors comme cette formule s'applique aussi à $a = 2^q$ et $b = p/q$ et donc $2^p - 1$ n'est pas premier.

Bien que cela ne permette pas de prouver qu'un nombre Mersenne est premier, cela permet d'éliminer quelques possibilités.

2.3 Quelques propriétés des nombres parfaits pairs

Voici quelques propriétés intéressantes (ou non) des nombres parfaits pairs.

2.3.1 Les derniers chiffres d'un nombre parfait pair

Si on s'intéresse uniquement aux derniers chiffres des puissances de 2 et des nombres de Mersenne permettant de former un nombre de la forme $2^{p-1}(2^p - 1)$, on obtient :
— $2 \times 3 = 6$
— $4 \times 7 = 28$
— $8 \times 15 \Rightarrow 2^p - 1$ non premier

— $16 \times 31 = *96$
— $32 \times 63 = **16$
— $64 \times 27 = **28$
— $28 \times 55 \Rightarrow 2^p - 1$ non premier
— $56 \times 11 = *16$
— $12 \times 23 = *76$
— $24 \times 47 = **28$
— $48 \times 95 \Rightarrow 2^p - 1$ non premier
— $96 \times 91 = **36$
— $92 \times 83 = **36$
— $84 \times 67 = **28$
— $68 \times 35 \Rightarrow 2^p - 1$ non premier
— $36 \times 71 = **56$
— $72 \times 43 = **96$
— $44 \times 87 = **28$
— $88 \times 75 \Rightarrow 2^p - 1$ non premier
— $76 \times 51 = **76$
— $52 \times 3 = *56$
— $4 \times 7 = 28$

Or après 4×7 on retombera inévitablement sur 8×15, et ainsi de suite, ce qui signifie que tous les nombres parfaits trouvés de cette manière se finiront par 6 ou 28.

On peut noter que la suite se répète toutes les 20 fois, ce qui signifie qu'on pourrait aussi dire que, d'après le théorème 2, $2^p - 1$ est non premier dans tous les cas où p est multiple de 2 ou 5, à savoir ceux où le nombre de Mersenne se finit par 31, 63, 23, 83, 67, 43 ou 03 (et c'est bien sûr le cas pour tout p non premier, mais seuls les p multiples de 2 et 5 finissent toujours par les mêmes chiffres). Cependant, cela n'est pas nécessaire à la démonstration que les nombres parfaits pairs se finissent tous par 6 ou 28 et le préciser au milieu de celle-ci n'aurait fait que la compliquer.

2.3.2 Les parfaits pairs sont triangulaires

Un nombre triangulaire est un nombre qui est la somme de tous les entiers de 1 jusqu'à n.

Tout nombre triangulaire est de la forme $\frac{n(n+1)}{2}$ et la réciproque est aussi vraie.

$\forall n = 2^p - 1$ où n est premier cela donne $\frac{(2^p-1)2^p}{2} = 2^{p-1}(2^p - 1)$

Donc tout nombre parfait $2^{p-1}(2^p - 1)$ est la somme des entiers de 1 à $2^p - 1$.

3 Nombres parfaits impairs

Pour les nombres parfaits impairs, l'objectif a été, comme pour les nombres de Mersenne premiers, d'éliminer quelques possibilités en montrant que certains nombres (impairs ou non) ne peuvent pas être parfaits. Voici les nombres "imparfaits" que nous avons trouvés.

3.1 Un carré parfait n'est jamais parfait !

La somme des diviseurs de tout nombre parfait impair n vaut $2n$, c'est-à-dire un entier pair. De plus comme n est impair tous ses diviseurs sont impairs, donc le somme est paire si et seulement si il y en a un nombre pair.

Or à tout nombre d qui divise n on peut associer un autre diviseur de n, à savoir $\frac{n}{d}$, et donc faire de cette façon des paires de diviseurs de n, sauf dans le cas de $\sqrt{n}$ puisque $\frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$.

En additionnant les nombres d'une paire, on obtient donc un résultat pair, donc en additionnant toutes les paires, le résultat est encore pair. Si on ajoute à la somme des paires le diviseur $\sqrt{n}$ qui n'est en paire avec aucun autre diviseur, on obtient donc une somme impaire.

Un carré parfait impair ne peut donc jamais être parfait.

NB : un carré pair non plus puisque tout parfait pair vaut $2^{p-1}m^1$, où $m = 2^p - 1$ est un nombre premier impair, et a donc une puissance impaire dans sa décomposition en nombres premiers, ce qui exclut la possibilité qu'un tel nombre soit un carré parfait.)

3.2 La puissance d'un seul nombre premier

Soit a^b un nombre premier où a est un nombre premier et b un entier naturel quelconque. On a alors :

$$2a^b = a^0 + a^1 + ... + a^{b-1} + a^b \Leftrightarrow a^b = a^0 + a^1 + ... + a^{b-1} = \frac{a^b - 1}{a - 1}$$

Or comme a est premier il est forcément supérieur ou égal à 2, donc :

$$\frac{a^b - 1}{a - 1} \leq a^b - 1 < a^b$$

L'égalité précédente implique alors $a^b < a^b$, ce qui est impossible.

3.3 Le produit parfait de deux nombres premiers

On cherche des nombres parfaits étant le produit d'exactement deux nombres premiers p et q tels que $p < q$, autrement dit $p + 1 \leq q$. Un tel nombre vérifierait donc l'égalité suivante :

$$2pq = 1 + p + q + pq \Leftrightarrow pq = (1 + p) + q$$

Un de ces deux termes est donc supérieur ou égal à la moitié de pq. Comme un nombre premier est forcément supérieur ou égal à 2 il est impossible d'avoir $q > \frac{pq}{2}$ car cela impliquerait $p < 2$.

Cependant $q \geq p + 1$ donc $q \geq \frac{pq}{2}$.

On a donc $q = \frac{pq}{2}$, donc $p = 2$ et $q = 3$, ce qui donne $pq = 6$, autrement dit : 6 est le seul nombre parfait possédant 4 diviseurs, à savoir 1, 2, 3 et 6.

3.4 Les produits parfaits de deux puissances de nombres premiers

Après avoir trouvé la solution du problème pour les produits de deux nombres premiers et pour la puissance d'un seul premier, nous nous sommes demandé ce qui se passerait si on multipliait deux puissances de nombres premiers, autrement dit avec un nombre $a_1^{b_1} a_2^{b_2}$ où a_1 et a_2 sont des nombres premiers et b_1 et b_2 des entiers naturels. (On peut remarquer que les nombres parfaits pairs que nous avons trouvés sont tous de cette forme puisque ce sont des puissances de 2 multipliées par un nombre premier de Mersenne.)

On a alors

$$2a_1^{b_1} a_2^{b_2} = \frac{a_1^{b_1+1}-1}{a_1-1} \times \frac{a_2^{b_2+1}-1}{a_2-1}$$

On voit alors que $\frac{a_1^{b_1+1}-1}{a_1-1}$ ne peut pas être multiple de a_1, et inversement $\frac{a_2^{b_2+1}-1}{a_2-1}$ ne peut pas être multiple de a_2, ce qui signifie que $\frac{a_1^{b_1+1}-1}{a_1-1}$ multiplie $a_2^{b_2}$, et inversement que $\frac{a_2^{b_2+1}-1}{a_2-1}$ multiplie $a_1^{b_1}$.

On peut donc décomposer cette équation en deux égalités moins importantes (on considère que c'est $\frac{a_2^{b_2+1}-1}{a_2-1}$ qui est divisible par 2 plutôt que l'autre fraction) :

$$\frac{a_1^{b_1+1}-1}{a_1-1} = a_2^{b_2}$$

$$\frac{a_2^{b_2+1}-1}{a_2-1} = 2a_1^{b_1}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{a_2^{b_2+1}-1}{a_2-1} = 2a_1^{b_1} &\Leftrightarrow \frac{a_2\frac{a_1^{b_1+1}-1}{a_1-1}-1}{a_2-1} = 2a_1^{b_1} \\
&\Leftrightarrow a_2\frac{a_1^{b_1+1}-1}{a_1-1} - 1 = 2a_1^{b_1}(a_2-1) \\
&\Rightarrow a_2\frac{a_1^{b_1+1}-1}{a_1-1} \equiv 1 \mod a_1
\end{aligned}$$

Or comme $\frac{a_1^{b_1+1}-1}{a_1-1}$ est la somme des diviseurs de $a_1^{b_1}$, qui sont tous multiples de a_1 à l'exception de 1, on a donc $\frac{a_1^{b_1+1}-1}{a_1-1} \equiv 1 \mod a_1$ et donc $a_2 \equiv 1 \mod a_1$

De plus, on a aussi :

$$
\begin{aligned}
\frac{a_1^{b_1+1}-1}{a_1-1} = a_2^{b_2} &\Leftrightarrow \frac{a_1 \frac{1}{2}\frac{a_2^{b_2+1}-1}{a_2-1}-1}{a_1-1} = a_2^{b_2} \\
&\Leftrightarrow a_1 \frac{1}{2}\frac{a_2^{b_2+1}-1}{a_2-1} - 1 = a_2^{b_2}(a_1-1) \\
&\Leftrightarrow a_1 \frac{a_2^{b_2+1}-1}{a_2-1} - 2 = 2a_2^{b_2}(a_1-1) \\
&\Rightarrow a_1 \frac{a_2^{b_2+1}-1}{a_2-1} \equiv 2 \mod a_2
\end{aligned}
$$

Or comme $\frac{a_2^{b_2+1}-1}{a_2-1}$ est la somme des diviseurs de $a_2^{b_2}$, qui sont tous multiples de a_2 à l'exception de 1, on a donc $\frac{a_2^{b_2+1}-1}{a_2-1} \equiv 1 \mod a_2$ et donc $a_1 \equiv 2 \mod a_2$.

On a alors deux cas de figure :

— Si $a_1 > a_2$ alors on a $a_2 = k_1 a_1 + 1$ où k_1 est un entier qui ne peut pas être strictement positif (sinon on aurait $a_1 < a_2$). De plus, comme 1 est inférieur à a_1 et a_2, k_1 ne peut pas être inférieur ou égal à -1, sinon a_2 serait négatif. Donc $k_1 = 0$ et donc $a_2 = 1$ donc ce n'est pas un nombre premier.

— Par le même raisonnement si $a_1 < a_2$ alors $a_1 = 2$ donc $a_1^{b_1} a_2^{b_2}$ est pair.

Tout nombre parfait impair (s'il en existe) devra donc être le multiple d'au moins trois nombres premiers distincts.

4 Conclusion

Le problème des nombres parfaits remonte à Pythagore, mais il n'a toujours pas été résolu pour les nombres impairs. Cela dit, il semble que connaître la réponse à la question de l'existence ou non de parfaits impairs n'aurait que peu de conséquences sur nos connaissances mathématiques, mais ce serait un bel exploit étant donné le temps durant lequel il a résisté aux mathématiciens qui s'y sont essayé. De plus, la résolution de vieux problèmes tels que celui-ci permet parfois la mise au point de méthodes novatrices pour les résoudre, comme ce fut par exemple le cas pour la preuve par Andrew Wiles du grand théorème de Fermat qui permit de réunir plusieurs domaines des mathématiques en apparence totalement éloignés.

En revanche, celui des nombres de Mersenne premiers est toujours d'actualité, puisque depuis 1992 le plus grand nombre premier connu a toujours été un nombre de Mersenne (cela s'explique par l'existence de tests de primalité beaucoup plus rapides que les tests normaux mais qui ne fonctionnent qu'avec les nombres de Mersenne). Ainsi, le plus grand premier connu actuellement, trouvé par le projet GIMPS (*Great Internet Mersenne Prime Search*, un logiciel de calcul partagé qui cherche des nombres premiers de Mersenne) en janvier 2018, est $2^{77232917}-1$, le plus grand nombre parfait connu est donc $2^{77232916}(2^{77232917}-1)$.