Jeton dans un tableau

2018-2019

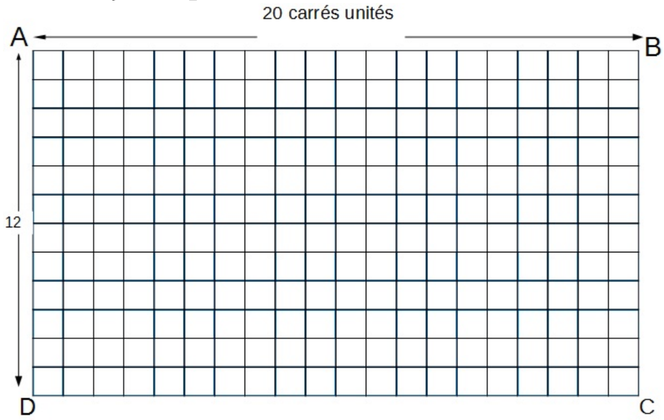
Nom, prénom et niveaux des élèves : Carnino Diane, Potard Igor et Coste Julie en classe de 2nde

Établissement : Lycée Blaise Pascal, Orsay

Enseignant(s) : Didier Missenard, Denis Julliot, Hélène Cochard, Cécile Damongeot

1 Présentation du sujet

Nous avons un rectangle ABCD avec AB = 20 et BC = 12 composé de carrés unités.
Avec un jeton placé sur le centre du carré du sommet A.



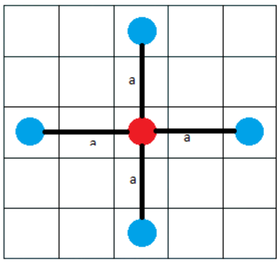
Le jeton se déplace de manière particulière (voir 2).Il peut par exemple se déplacer comme le cavalier aux échecs.
Nous nous posons la question de savoir s'il existe une suite de mouvements particuliers allant du carré de sommet A au carré de sommet B ?

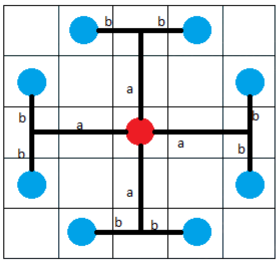
2 Déplacements

Les déplacements se caractérisent par la distance entre le centre de la case de départ et le centre de la case d'arrivée. Nous nous donnons 2 entiers a et b.
Nous avançons horizontalement ou verticalement de a cases puis perpendiculairement de b cases.Il est également possible de faire l'inverse.

2.1 Exemples de déplacements

Dans le premier carré a=2 et b=0. Dans le deuxième carré a=2 et b=1.





2.2 Conditions pour avancer

Nous avons des conditions pour pouvoir se déplacer.
Premièrement, il ne faut pas sortir du tableau.
Deuxièmement, il faut forcément se déplacer de milieu de case en milieu de case.
Dernièrement, il faut toujours que le jeton se déplace d'un a et d'un b identiques durant la suite de déplacements du point A au point B.

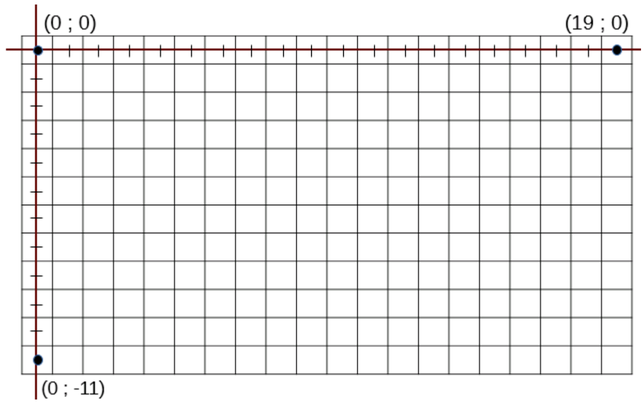
Ces trois conditions permettent d'être sûr de respecter le problème si elles sont remplies.

3 Mise en équation

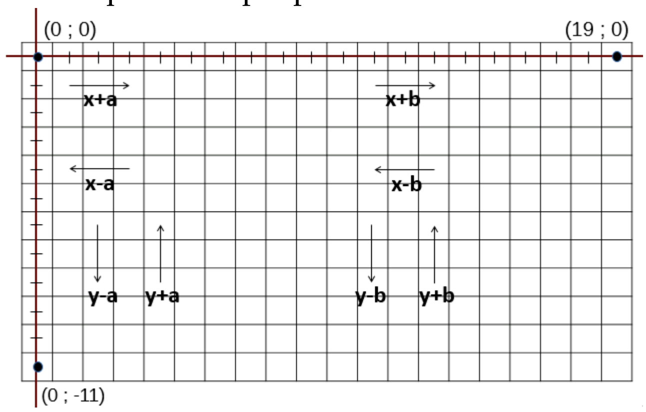
Pour résoudre notre problème nous l'avons transformé en équations à résoudre.

3.1 Codification des mouvements

Pour pouvoir mettre nos déplacements dans les équations, nous les avons codifiés.
Pour cela nous avons mis le rectangle ABCD dans un repère.



L'axe des abscisses est parallèle à AB.L'axe des ordonnées est parallèle à BC.
Voici dans le repère tous les déplacements possibles décomposés par contre il ne faut pas oublier qu'ils vont par paire!



Lorsque les déplacements sont horizontaux on les appelle x car ils sont parallèles à l'axe des abscisses(x).
S'ils vont vers la droite alors on ajoute a ou b à x. Inversement, s'ils vont vers la gauche alors on soustrait a ou b à x.
Lorsque les déplacements sont verticaux on les appelle y car ils sont parallèles à l'axe des ordonnées(y).
S'ils vont vers le haut alors on ajouta a ou b à y. Inversement, s'ils vont vers le bas alors on soustrait a ou b à y.

p déplacements	q déplacements	r déplacements	s déplacements
x + a y + b	x + a y - b	x - a y + b	x - a y - b
t déplacements	u déplacements	v déplacements	w déplacements
x + b y + a	x + b y - a	x - b y + a	x - b y - a

Nous avons donc rassemblé tous les déplacements par pairs possibles dans ce tableau. Comme vous pouvez le voir, nous avons donné un nom à chacune de ces pairs.Ces noms nous ont permis de former nos équations. Ici, les valeurs p,q,r,s,t,u,v et w représentent les nombres de déplacements et non les déplacements en eux-mêmes.

3.2 Les équations

En plaçant le rectangle dans un repère nous pouvons déterminer les coordonnées des centres des cases. Le but est que le jeton arrive sur la case de coordonnées (19;0).

Le but est d'arriver à x = 19.
Donc cela revient à parcourir horizontalement une distance de 19 cases. Il y a (p+q-r-s) déplacements de longueur a et (t+u-v-w) déplacements de longueur b.
Nous obtenons donc l'équation a (p+q-r-s) + b (t+u-v-w) = 19.

Le but est d'arriver à y = 0.
Pareillement nous avons verticalement (t-u+v-w) déplacements de longueur a et (p-q+r-s) déplacements de longueur b.
On obtient :
a (t-u+v-w) + b (p-q+r-s) = 0.

Pour résoudre (pfff...) le problème, nous devons résoudre ce système d'équations (bonne chance...) :

$$\begin{cases} a(p+q-r-s) + b(t+u-v-w)=19 \\ a(t-u+v-w) + b(p-q+r-s)=0 \end{cases}$$

Pour simplifier les équations, nous avons remplacé les déplacements entre parenthèses
(p+q-r-s) par m,
(t+u-v-w) par n,

(t-u+v-w) par m'
et (p-q+r-s) par n'. Donc voici nos équation : am + bn = 19 et am' + bn' = 0 ou am' = - bn'.

Nous savons que chaque séquence trouvée à la main à une équation qui lui correspond. Et qu'une équation résolue correspond à une séquence. Mais il peut y avoir beaucoup d'équations car il y beaucoup de paramètres.

3.3 Exemple

Par exemple voici une équation que nous avons réussi à résoudre grâce à de nombreuses hypothèses. Grâce aux résultats des équations nous avons trouvé sa séquence de déplacements dans le rectangle.
Pour résoudre notre équation, il faut choisir a et b. Nous avons travaillé avec des exemples où a et b étaient premier entre-eux. Donc nous avons choisi a = 4 et b = 3. Cela nous donne à résoudre
4m + 3n = 19 nous avons testé m = 4 et n = 1. Pour 4m' = -3n' nous avons choisi m' = 3 et n' = 4 En résumé nous avons m = 4, n = 1 , m' = 3 et n' = -4.
Donc on peut dire que :
p + q - r – s = 4 = m
t – u + v - w = 3 = m'
t + u - v - w = 1 = n
p - q + r - s = -4 = n'
Nous avons remarqué que 2 de nos équations avaientt le même résultat en ne regardant que la valeur absolue. Nous en avons fait une seule équation et l'avons résolue. Donc p + q - r - s = - p + q - r + s
2p = 2s
p = s
Grâce à ce résultat nous pouvons voir dans l'équation que p et s s'annulent donc il nous reste q-r=4. Donc q=4+r. Nous avons utilisé un système d'équation pour résoudre les 2 équations restantes.

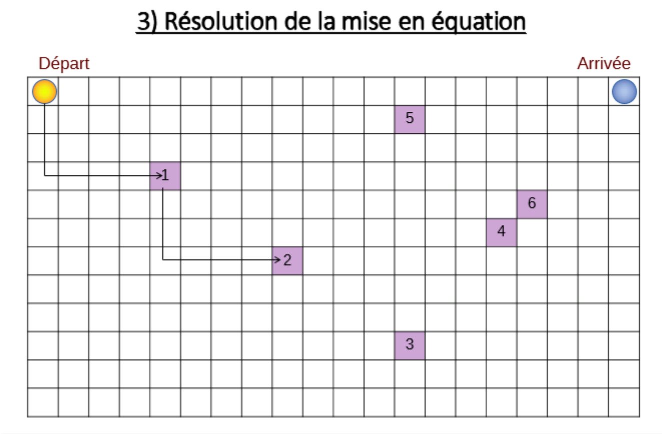
$$\begin{cases} t+u-v-w=1 \text{ (L1)} \\ t-u+v-w=3 \text{ (L2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t+u-v-w=1 \text{ (L1)} \\ 2t-2w=4 \text{ (L1+L2)} \end{cases}$$

t - w = 2
t = w + 2

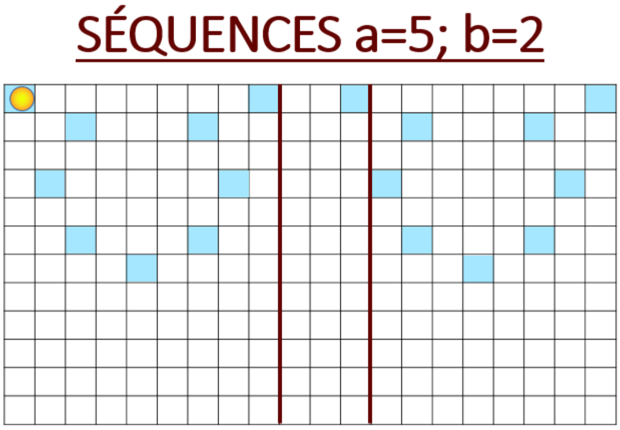
Nous allons remplacer t par w+2 dans t + u - v – w = 1
Donc 2 + w + u - v - w = 1
u = v – 1
v = u + 1

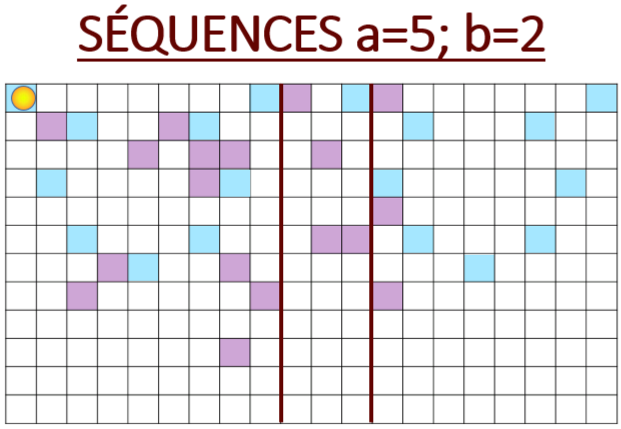
Il faut se souvenir que les valeurs p, q, r, s, t, u, v et w représentent les nombres de déplacements, pas les déplacements en eux-mêmes.
Nous disons que p = s = 1
Nous émettons l'hypothèse que r=1, donc nous avons 1 déplacement de r. Nous savons que q = r + 4 donc q = 5 c'est-à-dire que nous avons 5 déplacements de q. Nous savons que les déplacements q et r s'annulent donc en tout il reste 4 déplacements de q.
Nous avons émis une deuxième hypothèse W = 1. Comme t = w + 2. Donc t = 3.Les déplacements de w et t sont opposés donc il reste 2 déplacements de t.
Nous avons dû émettre une troisième hypothèse qui est u = 1. Nous savons v = u + 1 donc v = 2. Les déplacements v et u sont opposés donc il nous reste 1 déplacement de v.
Nous avons rassemblé tous les mouvements que l'on a trouvé grâce aux équations ce qui nous a permis de découvrir cette suite de mouvements assez courte pour aller du milieu du carré du sommet A au milieu du carré du sommet b. Cependant, nous savons qu'il y a plusieurs solutions et que celle-ci n'est que l'une d'elles.



4 Séquences

En faisant des essais à la main, nous avons eu l'idée de couper le rectangle en plusieurs parties, 3 pour être exacte. Les deux parties sur les cotés du rectangle sont de mêmes tailles et celle centrale est de la taille restante.
Pour réussir à tracer un chemin nous avons créé une séquence sans sortir de la première partie que nous pouvons recopier dans la dernière partie grâce à leur taille similaire. Après nous avons utilisé tout le rectangle pour compléter la séquence de la partie centrale.





Vous pouvez donc voir dans cet exemple que les deux parties extérieures du tableaux ont la même séquence (cases bleues). Dans la deuxième image les cases violettes représentent la séquence de la partie centrale.

5 Conclusion

En conclusion, nous pouvons dire que dans un rectangle de ces dimensions il existe des suites de mouvements particuliers pour aller du point A au point B. Mais pour les trouver malgré nos équations il faut faire des hypothèses ou tester.
Après il faudrait tester avec des rectangles de différentes tailles pour essayer d'affiner la méthode de recherche.