Structures cachées partout.

Triangulations de polygones convexes.

Tout d'abord, clarifiez ce qu'est un polygone convexe. Connaissez-vous la définition générale de concavité/convexité ?

Voyons maintenant ce qu'est une triangulation. Considérez un polygone convexe quelconque, tel que le polygone à sept côtés du dessin. Une triangulation de polygone est la partition d'un polygone en un ensemble de triangles. Comme vous pouvez le voir sur le dessin, il peut y avoir plusieurs triangulations différentes pour un même polygone.

Vous devrez certainement vous familiariser avec cette nouvelle structure mathématique. Vous êtes libre de tester de nouvelles triangulations et de vous poser des questions. Voici quelques questions de compréhension.

- Est-il toujours possible de trianguler un polygone convexe ? Pourquoi ?
- Est-il toujours possible de trianguler un polygone quelconque ? Pourquoi ?
- Considérez un polygone convexe. Chaque triangulation a-t-elle le même nombre de triangles ? Qu'en est-il pour un polygone non convexe ? Justifiez vos réponses, donnez ces nombres de manière explicite ou trouvez des bornes supérieures/inférieures pour ces nombres.
- Considérez le nombre de triangulations différentes d'un polygone convexe à n côtés. Quelle est la relation entre ce nombre et le nombre de triangulations différentes du polygone régulier à n côtés ? Pourquoi ? Attention : considérez qu'un polygone est collé à un plan cartésien, c'est-à-dire qu'il n'est pas libre de tourner ou de se déplacer.
- Existe-t-il une relation entre le nombre de triangulations d'un polygone convexe régulier à n côtés et le nombre de triangulations de n'importe quel polygone à n côtés ? Si oui, laquelle ?
- Existe-t-il une relation entre le nombre de triangulations d'un polygone convexe à n côtés et le nombre de triangulations d'un polygone convexe à n+1 côtés ? Si oui, laquelle ?

Vous aurez certainement deviné que vous vous intéressez au nombre de triangulations d'un polygone convexe à n côtés. La question que vous vous posez est simplement : quel est le nombre de triangulations d'un polygone régulier à n côtés ?

Vous verrez qu'il n'est pas facile de répondre directement à cette question. Comme dans toute recherche mathématique, vous devriez commencer par calculer ce nombre à la main pour de petites valeurs de n. Ce faisant, vous ressentirez peut-être le besoin d'introduire une notation décrivant votre polygone et toutes les caractéristiques qui vous paraîtront particulièrement intéressantes. Faites-le, mais gardez à l'esprit qu'il est difficile de trouver une bonne notation qui ne soit pas trop lourde à manier : il est très probable que vous devrez revoir votre notation plus qu'une fois. Une bonne notation reflète une bonne compréhension, elle est complète mais concise au maximum.

Le dernier conseil que je vous donne est d'essayer de relier le nombre de triangulations d'un polygone à n côtés au nombre de triangulations de polygones à moins de n côtés.

ATTENTION : si vous parvenez à trouver une relation un à un entre les triangulations et des objets d'autres sections de cet atelier, vous pourrez transférer les résultats entre les deux !

Ordres de multiplication.

Supposons que vous vouliez multiplier 3 facteurs : disons par exemple que vous voulez calculer $2 \cdot 3 \cdot 5$. Grâce à l'associativité de la multiplication, vous sélectionnez successivement deux nombres voisins à multiplier ensemble, jusqu'à ce que vous obteniez le résultat. (Attention : vous ne changez pas l'ordre des facteurs !) Pour représenter ces précédences, vous mettez des parenthèses. Il y a exactement deux façons de mettre ces parenthèses : $(2 \cdot 3) \cdot 5$ et $2 \cdot (3 \cdot 5)$.

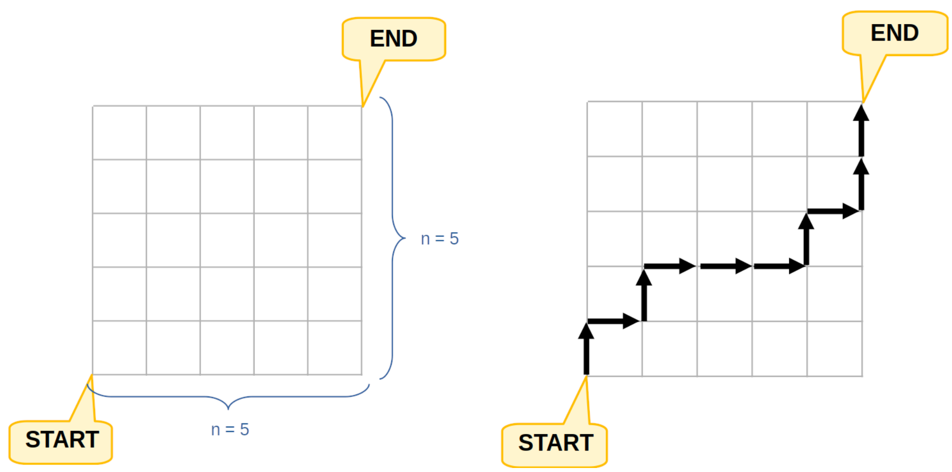
Voici l'objet de votre intérêt : le nombre de façons dont il est possible de parenthéser de cette façon une multiplication de n facteurs.

Je vous conseille d'utiliser la méthode de recherche suivante. Commencez par le calculer à la main pour les petites valeurs de n. Après avoir tenté de trouver une valeur explicite, vous pouvez aussi essayer de relier ce nombre (pour n facteurs) au nombre de façons dont il est possible de parenthéser des multiplications avec moins de facteurs (avec strictement moins de n facteurs).

ATTENTION : si vous parvenez à trouver une relation un à un entre les ordres de multiplication et des objets d'autres sections de cet atelier, vous pourrez transférer les résultats entre les deux !

Chemins sur une grille.

Supposez que vous marchez sur une grille carrée $n \times n$ allant du START, situé au coin sud-ouest, à END, situé au coin nord-est. Supposons que vous ne puissiez faire que des pas vers le nord ($\uparrow$) ou l'est ($\longrightarrow$). Pour fixer les idées, sur le côté gauche du dessin ci-dessous se trouve une grille de 5×5 avec les points de START et END, et sur le côté droit un tel chemin.



Dans le cadre d'une première étude de ce modèle, vous répondez aux questions suivantes.

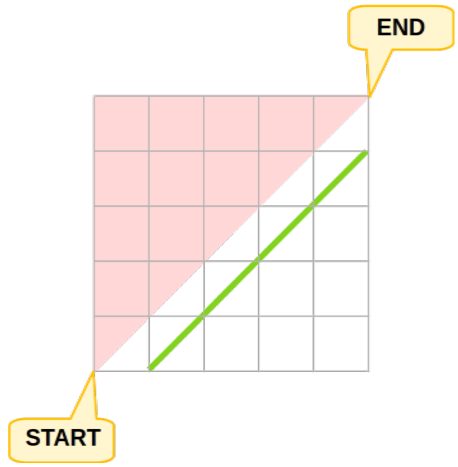
- Combien existe-t-il de chemins de ce type dans une grille $n \times n$ pour $n = 1, 2$? Vous les énumérerez à la main et dessinerez ces chemins.
- Combien existe-t-il de chemins de ce type dans une grille $n \times n$ pour n qualconque?
- Combien existe-t-il de chemins de ce type dans une grille $n \times k$ pour n et k qualconque?

Vous vous intéressez maintenant à un type particulier d'itinéraires START-END : ceux contenus dans la moitié nord-ouest de la grille, surlignée en rose dans le dessin ci-dessous. Vous pouvez également caractériser ces chemins comme étant ceux qui ne touchent jamais la première diagonale inférieure, dessinée en vert.

Votre question est simplement la suivante : combien y a-t-il de chemins de ce type ? Comme toujours, je recommande de calculer ce nombre à la main pour les petites valeurs de n.

Ensuite, vous pouvez essayer de trouver ce numéro de manière explicite. Si vous le faites et que vous voulez un indice : il peut être plus facile de compter le nombre de mauvais chemins et de considérer comme point d'intérêt la première fois qu'un mauvais chemin touche la première diagonale inférieure.

Il est également possible d'établir un lien entre ce nombre et le nombre de chemins de ce type dans des grilles plus petites. Si vous essayez de trouver cette relation, je vous conseille de classer les chemins en fonction de la dernière (ou de la première) fois qu'ils touchent la diagonale principale.



ATTENTION : si vous parvenez à trouver une relation un à un entre les bons chemins et des objets d'autres sections de cet atelier, vous pourrez transférer les résultats entre les deux !

Des candidats étonnamment équilibrés.

Un village de $2n$ habitants doit élire un maire. Il y a deux candidats : Vera North et John East. L'improbable se produit : les candidats sont parfaitement à égalité, chacun ayant exactement n voix.

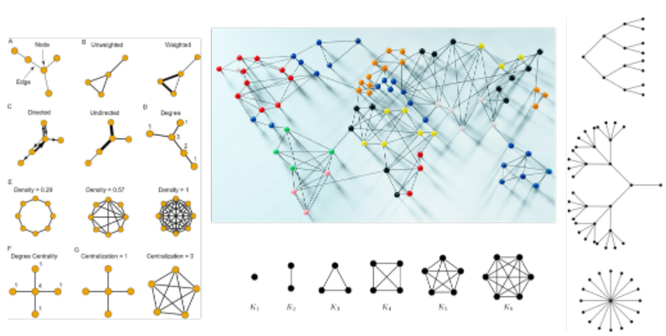
Au moment du scrutin, un opérateur sort un vote de l'urne à la fois et lit le nom à haute voix, créant ainsi une séquence de $2n$ votes. Vous vous intéressez aux séquences telles que, à tout moment de la lecture, Vera North apparaît toujours à égalité ou devant John West. Par exemple, dans un village de 4 habitants, les séquences NNEE et NENE présentent cette caractéristique, alors que les séquences EENN, NEEN, ENNE et ENEN ne la présentent pas.

Commencez maintenant votre travail de recherche. Décrivez en détail la ou les propriétés qui caractérisent ces séquences. Calculez ce nombre à la main pour de petites valeurs de n. Trouvez ce nombre de manière explicite ou essayez de le mettre en relation avec le nombre de séquences liées à des villages plus petits.

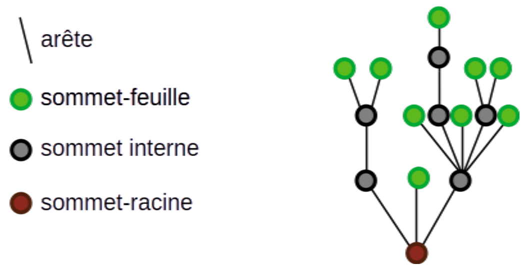
ATTENTION : si vous parvenez à trouver une relation un à un entre ces séquences et des objets d'autres sections de cet atelier, vous pourrez transférer les résultats entre les deux !

Arbres avec un nombre fixe d'arêtes.

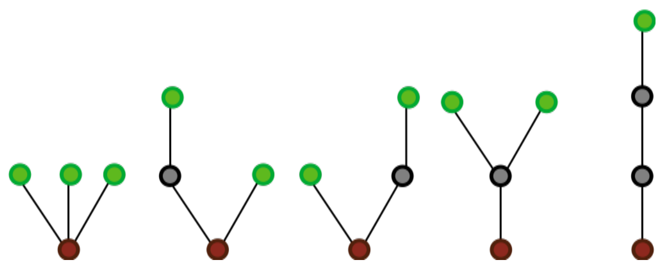
Sans entrer dans une définition stricte, un graphe est un ensemble de sommets (que l'on peut imaginer comme des points), dont certains sont reliés entre eux par une ligne, appelées arêtes. La position exacte de ces points et de ces lignes ne nous intéresse pas. L'illustration ci-dessous présente différents graphes.



Vous allez étudier un type de graphe particulier : les arbres enracinés. Il s'agit de graphes présentant deux caractéristiques supplémentaires : ils ne contiennent pas de cycles (ou, de manière équivalente, il n'y a qu'un seul chemin sur les arêtes possible pour aller d'un sommet à un autre) et l'un de leurs sommets est étiqueté comme étant la racine. En général, ils sont dessinés avec le sommet-racine en bas, à partir duquel toutes les arêtes se développent vers le haut : comme un véritable arbre. Les sommets situés à l'extrémité de l'arbre sont appelés feuilles : cette terminologie est représentée dans l'image ci-dessous.



Vous êtes intéressé par le nombre d'arbres enracinés ayant exactement n arêtes. Par exemple, il y a cinq arbres avec trois arêtes, comme vous le voyez dans l'exemple ci-dessous.



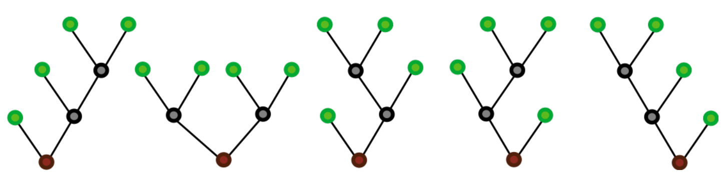
Commencez votre travail de recherche comme d'habitude. Calculez à la main ce nombre pour de petites valeurs de n, puis essayez de trouver ce nombre ou de le relier au nombre d'arbres ayant strictement moins de n arêtes.

ATTENTION : si vous parvenez à trouver une relation un à un entre les arbres à n arêtes et des objets d'autres sections de cet atelier, vous pourrez transférer les résultats entre les deux !

Arbres binaires avec un nombre fixe de feuilles.

La section précédente contient une introduction aux arbres en général : si vous ne l'avez pas encore lue, faites-le maintenant.

Vous allez maintenant étudier un type particulier d'arbre enraciné : l'arbre binaire enraciné. Ces arbres ont une caractéristique supplémentaire : chaque sommet qui n'est pas une feuille donne naissance à exactement deux nouveaux sommets. Vous vous intéressez au nombre d'arbres binaires enracinés qui ont exactement n feuilles. Par exemple, il y a exactement 5 arbres binaires enraciné avec 4 feuilles.



Commencez votre travail de recherche comme d'habitude. Calculez à la main ce nombre pour de petites valeurs de n, puis essayez de trouver ce nombre ou de le relier au nombre d'arbres binaires ayant strictement moins de n feuilles.

ATTENTION : si vous parvenez à trouver une relation un à un entre les arbres binaires à nombre fixe de feuilles et des objets d'autres sections de cet atelier, vous pourrez transférer les résultats entre les deux !