
Exercice 3 (**Composer un système de serrurerie**). Une clé est composée de cinq crans qui ont chacune une profondeur parmi 10 possibilités. On peut donc représenter une clé par un code

$$(x_1, \dots, x_5) \text{ où } x_i \in \{0, \dots, 9\}.$$

Le nombre x_i représente la profondeur du i -ième cran. D'autre part, une serrure est équipée d'un système de goupilles qui servent à filtrer les profondeurs des crans. On peut représenter une serrure par une suite

$$(F_1, \dots, F_5) \text{ où } F_i \subset \{0, \dots, 9\} \text{ est un ensemble à 1 ou 2 éléments.}$$

Chaque ensemble F_i s'interprète comme un filtre qui laisse passer une ou deux profondeurs du i -ième cran.

La serrure (F_1, \dots, F_5) est déverrouillée par les clés de la forme (x_1, \dots, x_5) où, pour tout i , $x_i \in F_i$.

Un serrurier dispose d'un organigramme des droits d'accès (la liste des utilisateurs, la liste des portes et qui a accès à quoi) et doit composer un jeu de clés et de serrures. On donne deux exemples d'organigrammes:

1. Les chambres d'un hôtel: chaque client a une clé qui ouvre la porte de sa chambre (et rien d'autre) mais le personnel a une clé qui ouvre toutes les portes.
2. Le laboratoire de mathématiques d'Orsay: il y a les bureaux individuels, la salle de discussion, la salle de stockage, le local informatique. Parmi les utilisateurs, on distingue les mathématiciens, les gestionnaires, les informaticiens et les agents d'entretien. Chaque mathématicien peut accéder à son bureau et à la salle de discussion. Chaque gestionnaire peut accéder à *tous* les bureaux des gestionnaires, à la salle de discussion et à la salle de stockage. Les informaticiens ont accès à tout. Les agents d'entretien ont accès à tout sauf au local informatique.

Comment le serrurier doit-il s'y prendre pour minimiser le nombre de filtres différents à usiner?