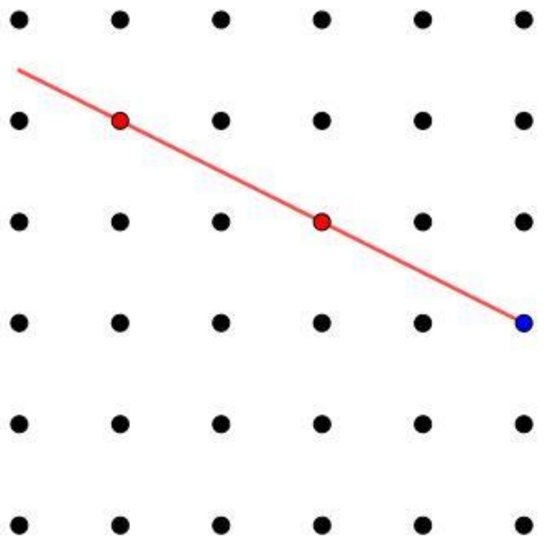
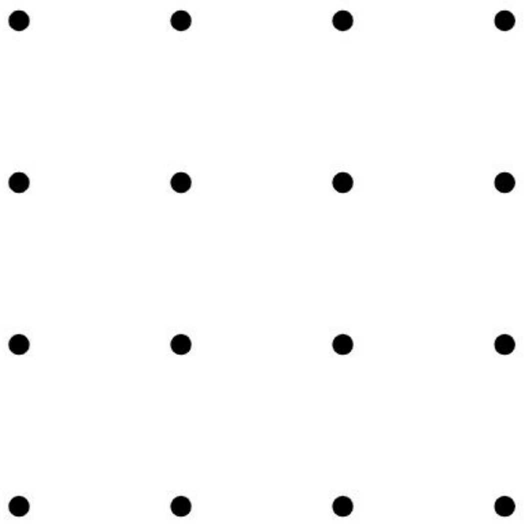
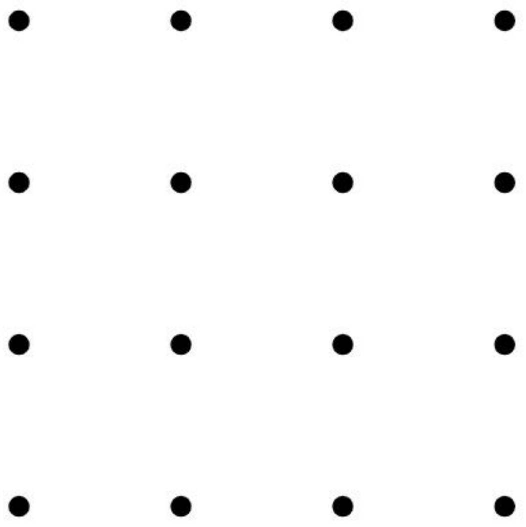
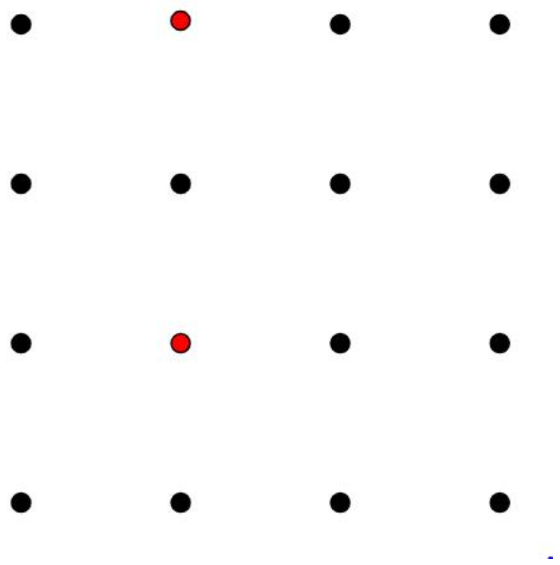
Jeu de société 2

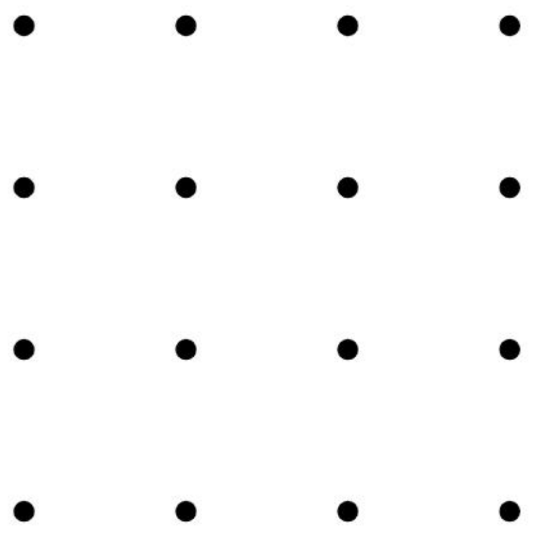
Bob a inventé un nouveau jeu de société. Il dispose sur la table n^2 billes, où $n \geq 3$, en remplissant les coordonnées entières d'un carré de taille $n \times n$. Il explique les règles à Alice : tout d'abord, elle doit sélectionner un sous-ensemble de billes S. Puis, pour chaque couple de billes contenues dans S, elle doit retirer toutes les billes du carré qui sont sur la droite les reliant. Le but pour Alice est de choisir S tel qu'elle puisse retirer toutes les billes de la grille. Comme le jeu est trop facile (il suffit de prendre S l'ensemble de toutes les billes de la grille), Bob demande à Alice de choisir un ensemble S contenant le moins de billes possibles. Pouvez-vous l'aider ?

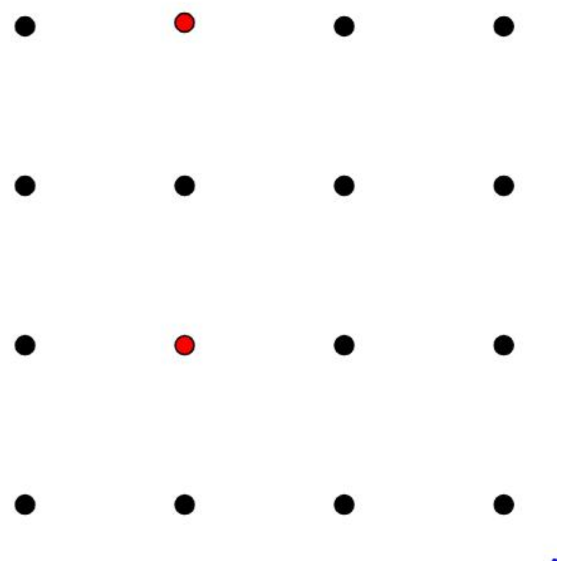


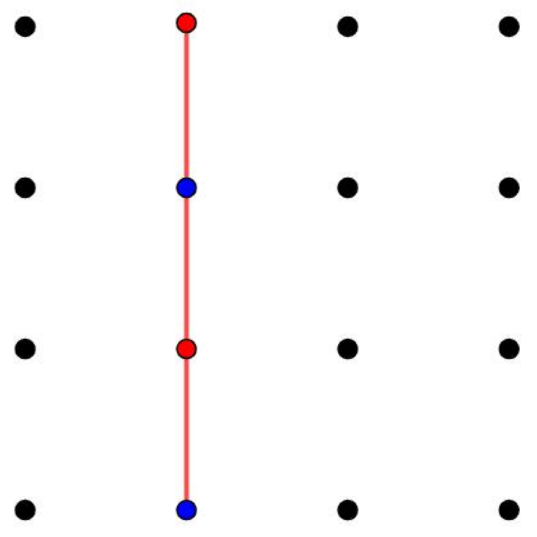


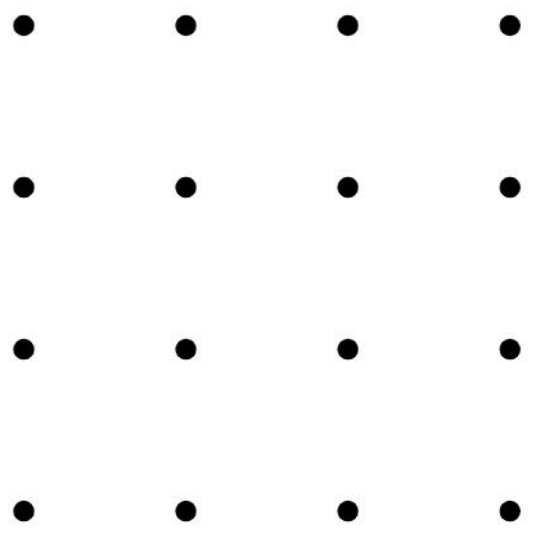


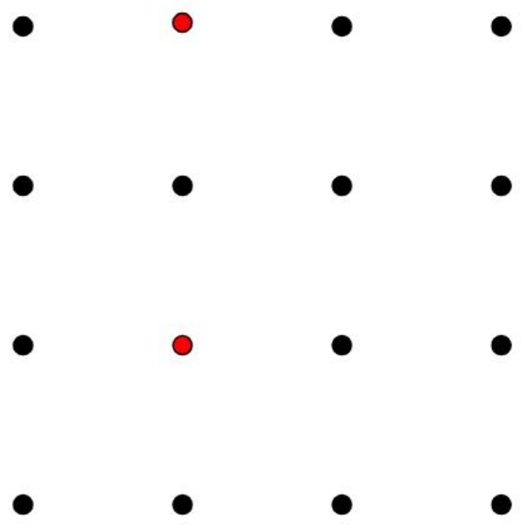


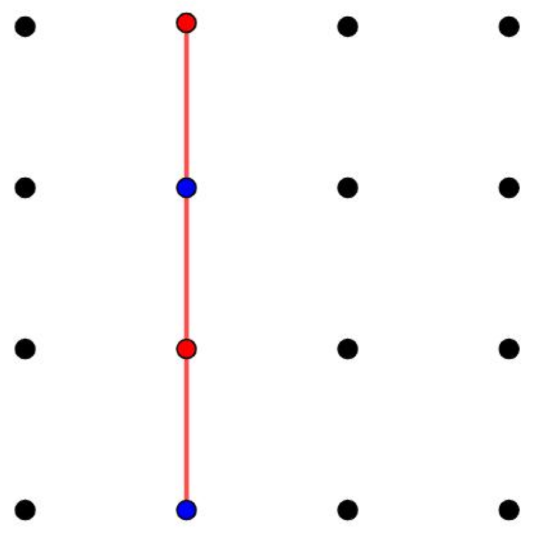


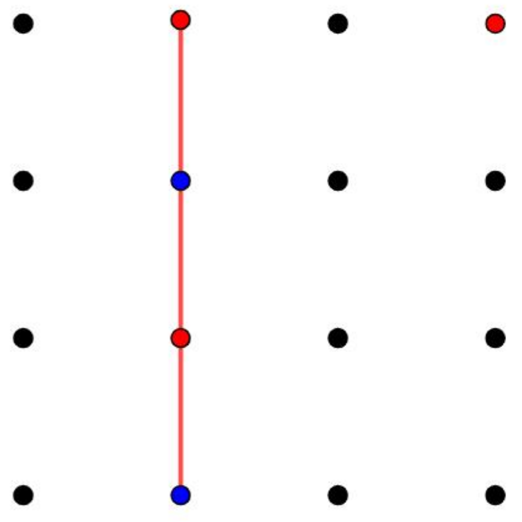


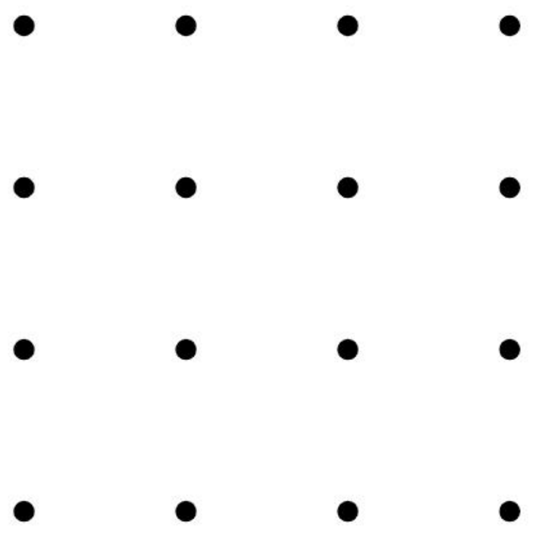
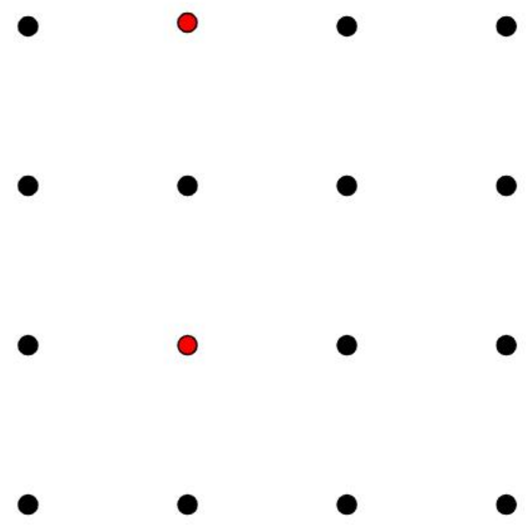
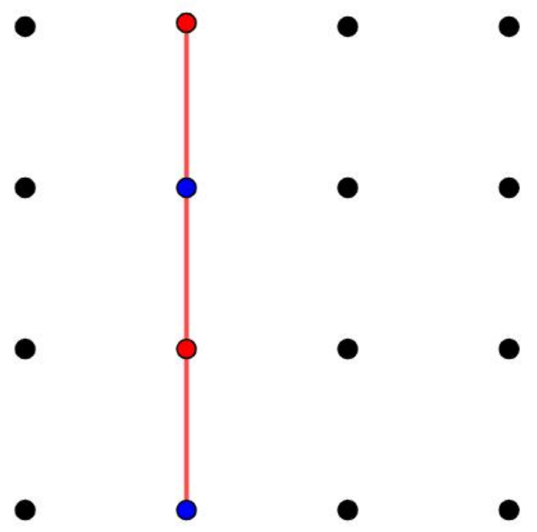
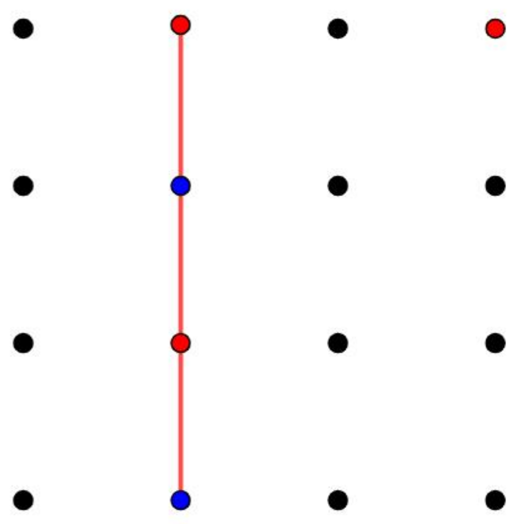
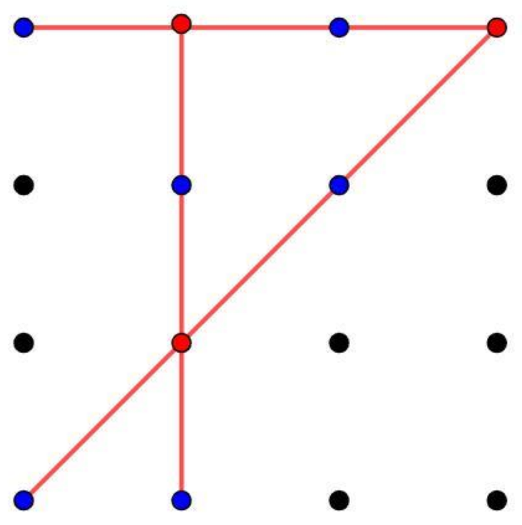


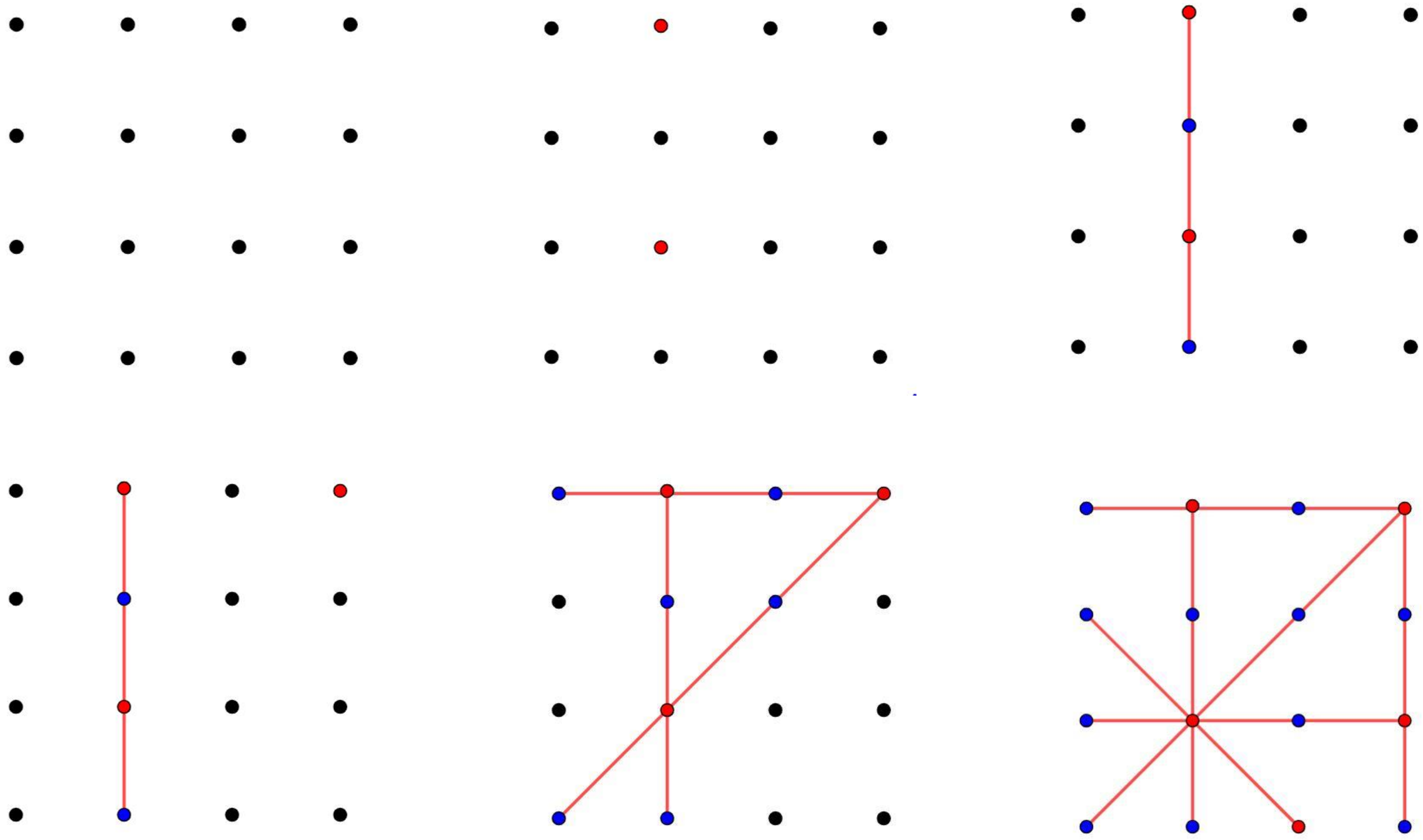




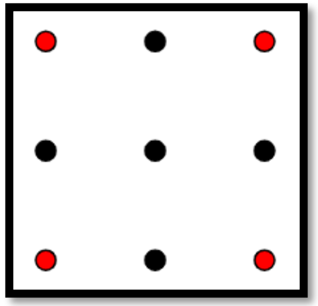
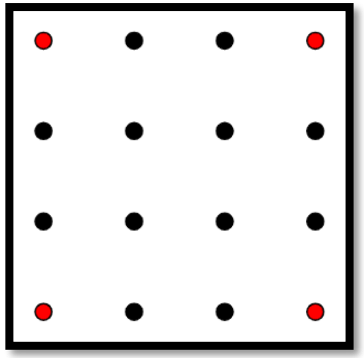
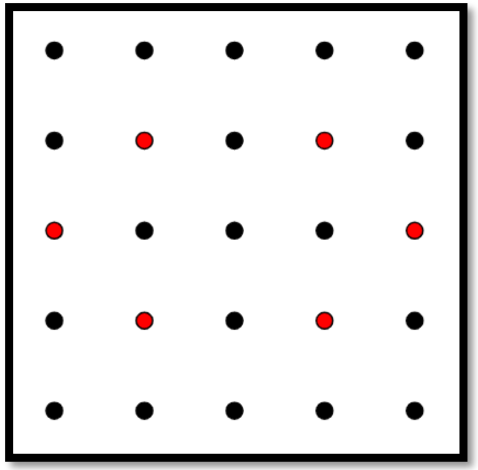
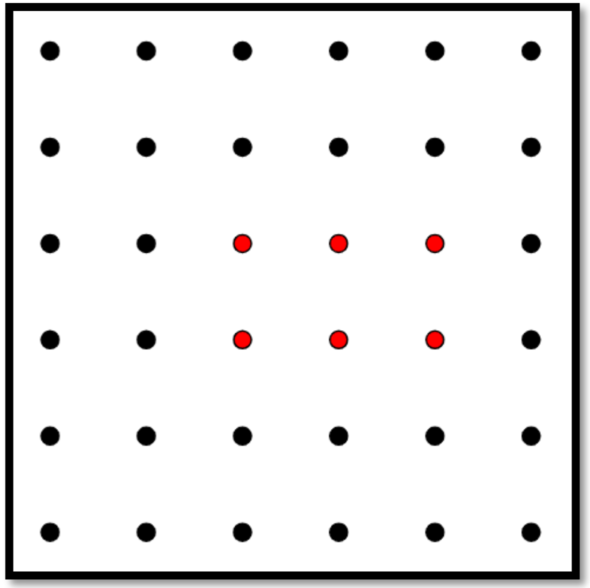
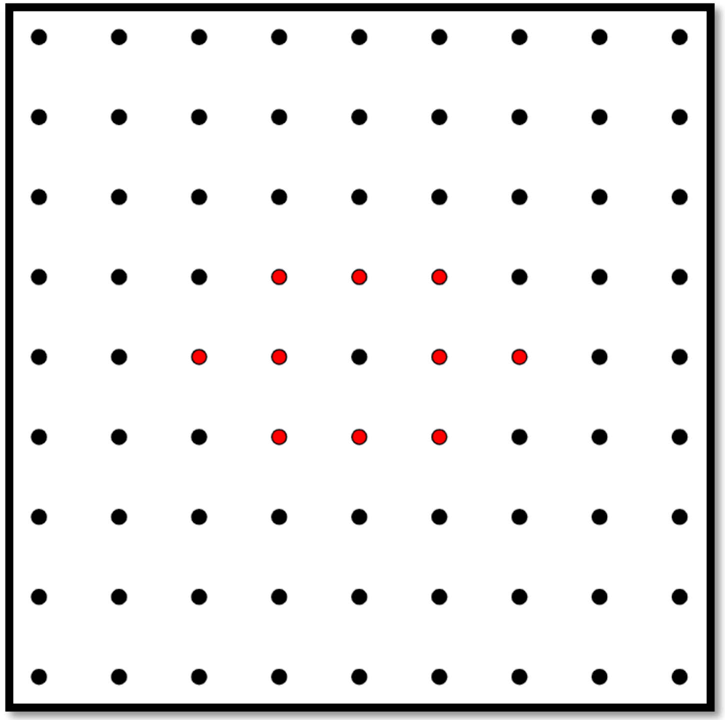
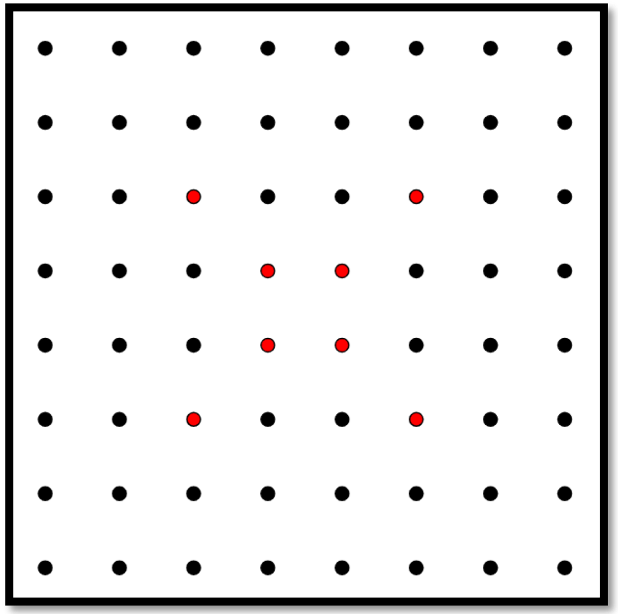
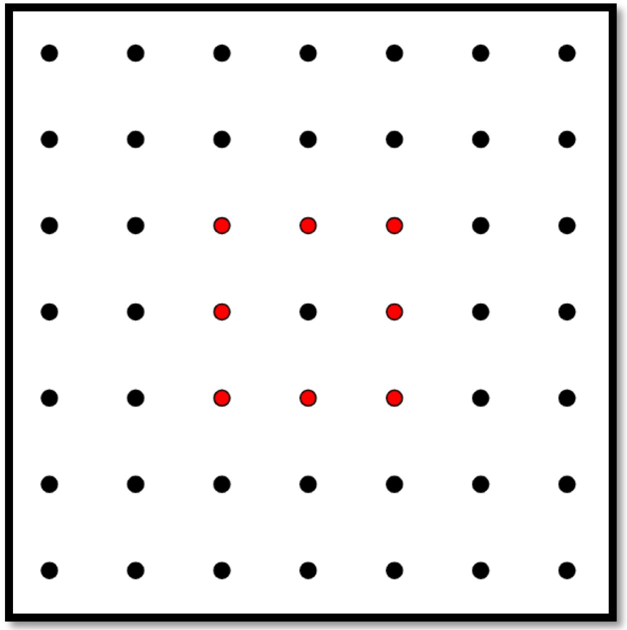




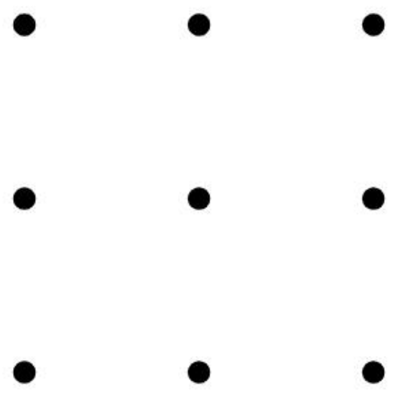








Exemples

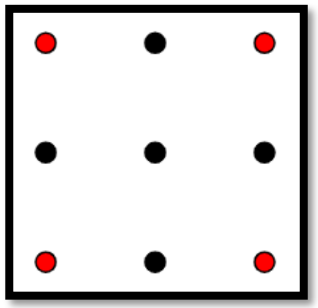








Pour n = 3



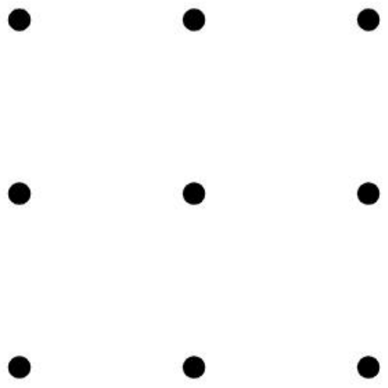
Nous appelons P_n un carré de côté n.
Nous appelons α le nombre de points choisis au début.

Nous avons trouvé un ensemble S de $\alpha = 4$ billes retirant toutes les bille de P_3.



Montrons qu'il n'est pas possible d'y arriver avec moins de billes.

Pour n = 3

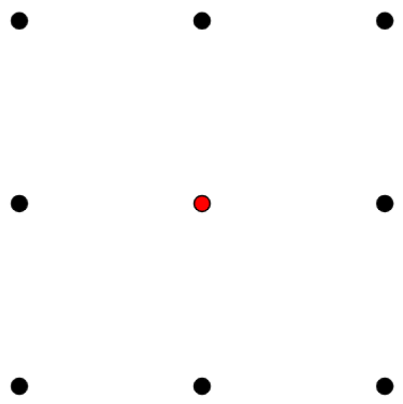


Nous appelons P_n un carré de côté n.
Nous appelons α le nombre de points choisis au début.

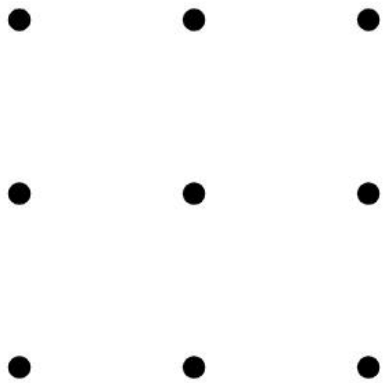
Nous avons trouvé un ensemble S de α = 4 billes retirant toutes les bille de P_3.

Montrons qu'il n'est pas possible d'y arriver avec moins de billes.

- Avec α = 1 : impossible



Pour n = 3

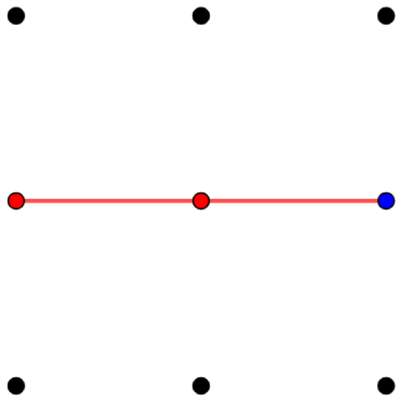


Nous appelons P_n un carré de côté n.
Nous appelons α le nombre de points choisis au début.

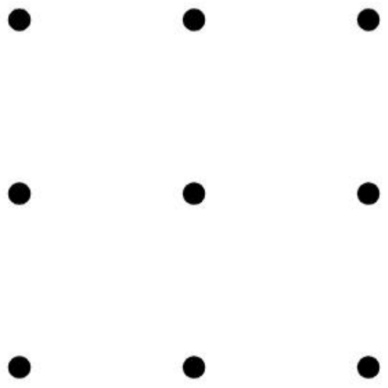
Nous avons trouvé un ensemble S de α = 4 billes retirant toutes les bille de P_3.

Montrons qu'il n'est pas possible d'y arriver avec moins de billes.

- Avec α = 2 : impossible



Pour n = 3

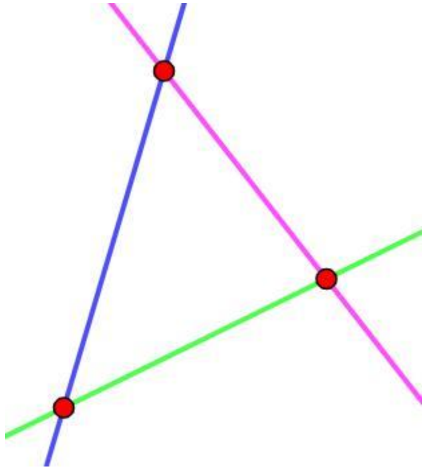


Nous appelons P_n un carré de côté n.
Nous appelons α le nombre de points choisis au début.

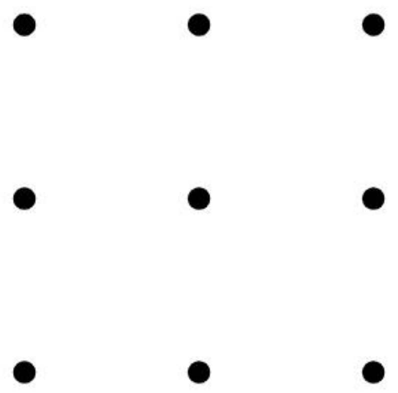
Nous avons trouvé un ensemble S de α = 4 billes retirant toutes les bille de P_3.

Montrons qu’il n’est pas possible d’y arriver avec moins de billes.

- Avec α = 3 : Il est possible de faire 3 droites.



Pour n = 3



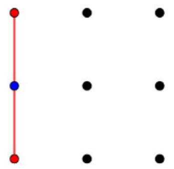
Nous appelons P_n un carré de côté n.
Nous appelons α le nombre de points choisis au début.

Nous avons trouvé un ensemble S de α = 4 billes retirant toutes les bille de P_3.

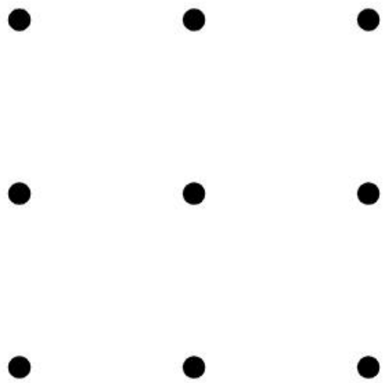
Montrons qu'il n'est pas possible d'y arriver avec moins de billes.

- Avec α = 3 : Il est possible de faire 3 droites.
  Une droite contient au maximum n = 3 points donc :

  -La première droite compte 3 points



Pour n = 3



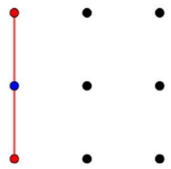
Nous appelons P_n un carré de côté n.
Nous appelons α le nombre de points choisis au début.

Nous avons trouvé un ensemble S de $\alpha = 4$ billes retirant toutes les bille de P_3.

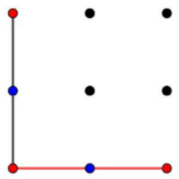
Montrons qu'il n'est pas possible d'y arriver avec moins de billes.

- Avec $\alpha = 3$: Il est possible de faire 3 droites.
  Une droite contient au maximum n = 3 points donc :

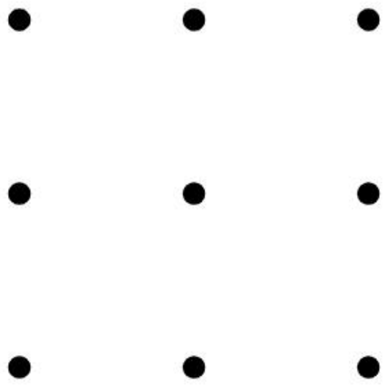
  -La première droite compte 3 points



  -La deuxième droite compte 1 point déjà compté par la première droite et 2 points supplémentaires.



Pour n = 3



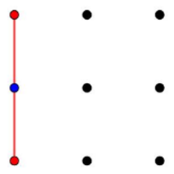
Nous appelons P_n un carré de côté n.
Nous appelons α le nombre de points choisis au début.

Nous avons trouvé un ensemble S de α = 4 billes retirant toutes les bille de P_3.

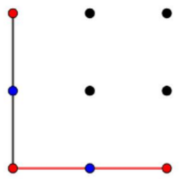
Montrons qu'il n'est pas possible d'y arriver avec moins de billes.

- Avec α = 3 : Il est possible de faire 3 droites.
  Une droite contient au maximum n = 3 points donc :

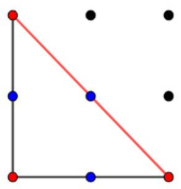
  -La première droite compte 3 points



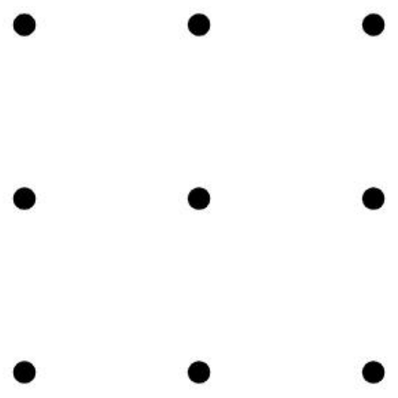
  -La deuxième droite compte 1 point déjà compté par la première droite et 2 points supplémentaires.



  -La troisième droite compte 2 points déjà compté par les précédentes et 1 point supplémentaire.



Pour n = 3



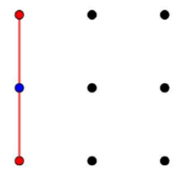
Nous appelons P_n un carré de côté n.
Nous appelons α le nombre de points choisis au début.

Nous avons trouvé un ensemble S de α = 4 billes retirant toutes les bille de P_3.

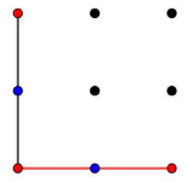
Montrons qu'il n'est pas possible d'y arriver avec moins de billes.

- Avec α = 3 : Il est possible de faire 3 droites.
  Une droite contient au maximum n = 3 points donc :

  -La première droite compte 3 points

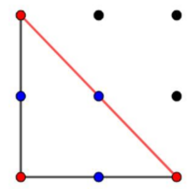


  -La deuxième droite compte 1 point déjà compté par la première droite et 2 points supplémentaires.

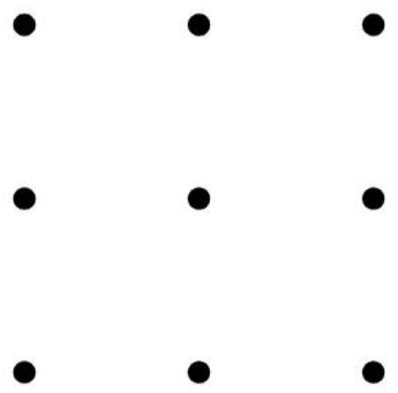


Ce qui fait 3 + 2 + 1 = 6 points.

  -La troisième droite compte 2 points déjà compté par les précédentes et 1 point supplémentaire.



Pour n = 3



Nous appelons P_n un carré de côté n.
Nous appelons α le nombre de points choisis au début.

Nous avons trouvé un ensemble S de $\alpha = 4$ billes retirant toutes les bille de P_3.

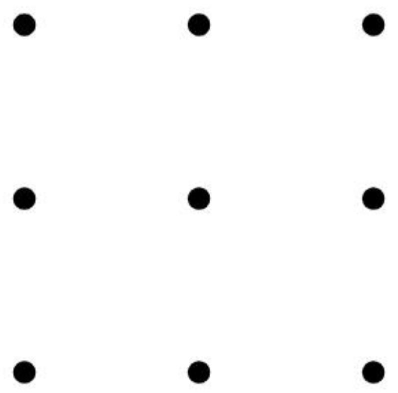
Montrons qu’il n’est pas possible d’y arriver avec moins de billes.

- Avec $\alpha = 1$: impossible

- Avec $\alpha = 2$: impossible

- Avec $\alpha = 3$: Une droite passant par 2 points de S passe au maximum par 3 points de P_3 . Il n’est donc possible de récupérer que 6 points au maximum sur les 9 points de P_3. Donc impossible.

Pour n = 3



Nous appelons P_n un carré de côté n.
Nous appelons α le nombre de points choisis au début.

Nous avons trouvé un ensemble S de α = 4 billes retirant toutes les bille de P_3.

Montrons qu'il n'est pas possible d'y arriver avec moins de billes.

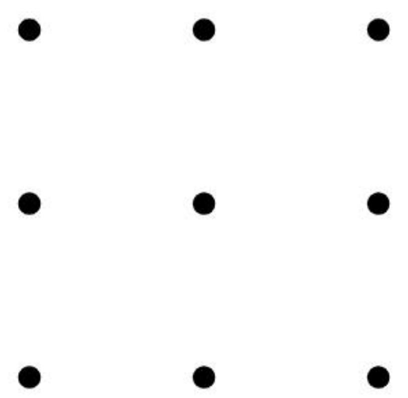
- Avec α = 1 : impossible

- Avec α = 2 : impossible

- Avec α = 3 : Une droite passant par 2 points de S passe au maximum par 3 points de P_3 . Il n'est donc possible de récupérer que 6 points au maximum sur les 9 points de P_3. Donc impossible.

Donc α > 3

Pour n = 3



Nous appelons P_n un carré de côté n.
Nous appelons α le nombre de points choisis au début.

Nous avons trouvé un ensemble S de $\alpha = 4$ billes retirant toutes les bille de P_3.

Montrons qu'il n'est pas possible d'y arriver avec moins de billes.

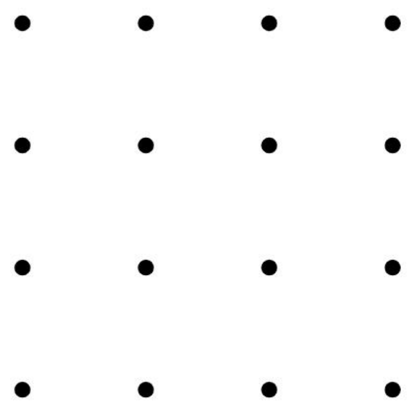
- Avec $\alpha = 1$: impossible

- Avec $\alpha = 2$: impossible

- Avec $\alpha = 3$: Une droite passant par 2 points de S passe au maximum par 3 points de P_3 . Il n'est donc possible de récupérer que 6 points au maximum sur les 9 points de P_3. Donc impossible.

Donc $\alpha > 3$
Donc $\alpha = 4$

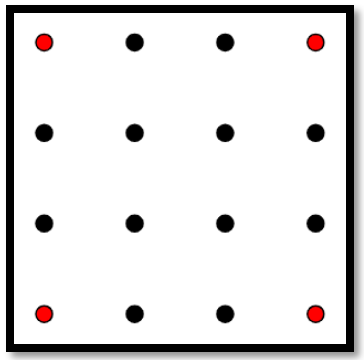
Pour n = 4



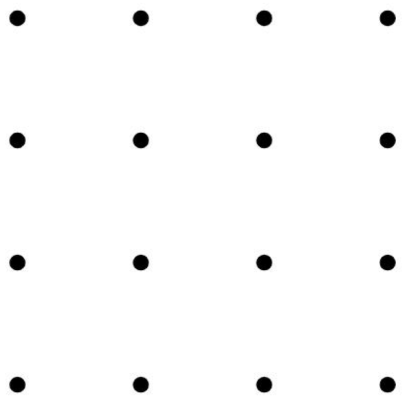
Nous appelons P_n un carré de côté n.
Nous appelons α le nombre de points choisis au début.

Nous avons trouvé un ensemble S de α = 4 billes retirant toutes les bille de P_4.

Montrons qu’il n’est pas possible d’y arriver avec moins de billes.



Pour n = 4

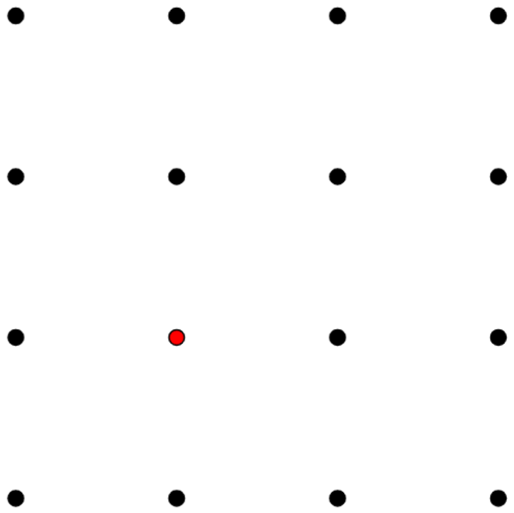


Nous appelons P_n un carré de côté n.
Nous appelons α le nombre de points choisis au début.

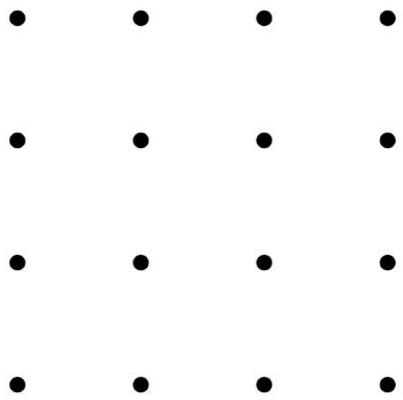
Nous avons trouvé un ensemble S de α = 4 billes retirant toutes les bille de P_4.

Montrons qu'il n'est pas possible d'y arriver avec moins de billes.

- Avec α = 1 : impossible



Pour n = 4

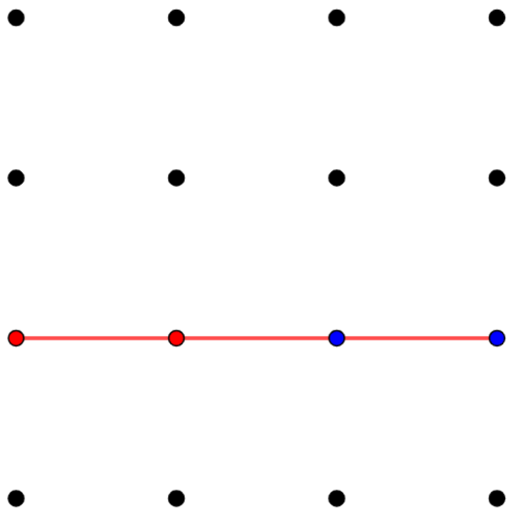


Nous appelons P_n un carré de côté n.
Nous appelons α le nombre de points choisis au début.

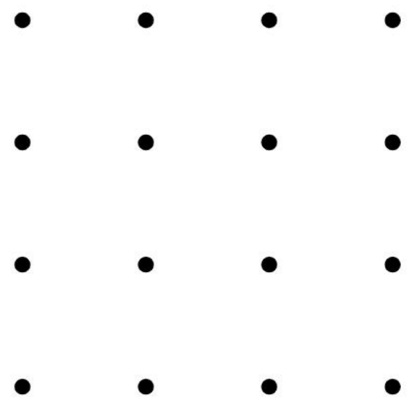
Nous avons trouvé un ensemble S de α = 4 billes retirant toutes les bille de P_4.

Montrons qu'il n'est pas possible d'y arriver avec moins de billes.

- Avec α = 2 : impossible



Pour n = 4



Nous appelons P_n un carré de côté n.
Nous appelons α le nombre de points choisis au début.

Nous avons trouvé un ensemble S de $\alpha = 4$ billes retirant toutes les bille de P_4.

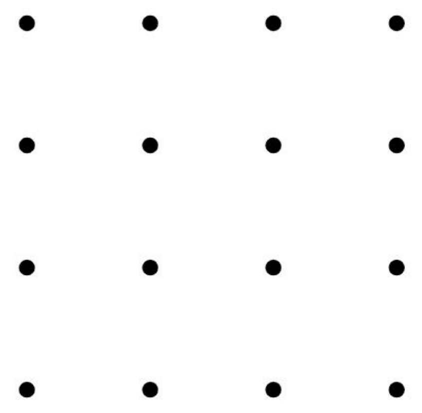
Montrons qu'il n'est pas possible d'y arriver avec moins de billes.

- Avec $\alpha = 3$: Il est possible de faire 3 droites.
  Une droite contient au maximum $n = 4$ points donc :

  Première droite : 4 points
  Deuxième droite : 3 points
  Troisième droite : 2 points

  Total : $4 + 3 + 2 = 9$ points

Pour $n = 4$



Nous appelons P_n un carré de côté n.
Nous appelons α le nombre de points choisis au début.

Nous avons trouvé un ensemble S de $\alpha = 4$ billes retirant toutes les bille de P_4.

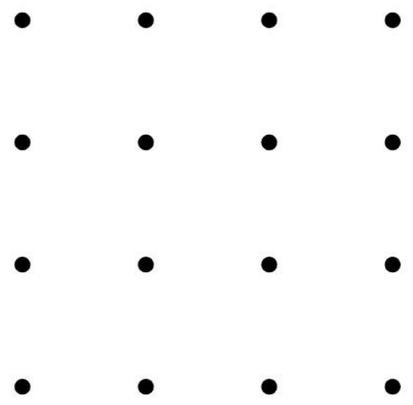
Montrons qu'il n'est pas possible d'y arriver avec moins de billes.

- Avec $\alpha = 1$: impossible

- Avec $\alpha = 2$: impossible

- Avec $\alpha = 3$: Une droite passant par 2 points de S passe au maximum par 4 points de P_4 . Il n'est donc possible de récupérer que 9 points au maximum sur les 16 points de P_4. Donc impossible.

Pour n = 4



Nous appelons P_n un carré de côté n.
Nous appelons α le nombre de points choisis au début.

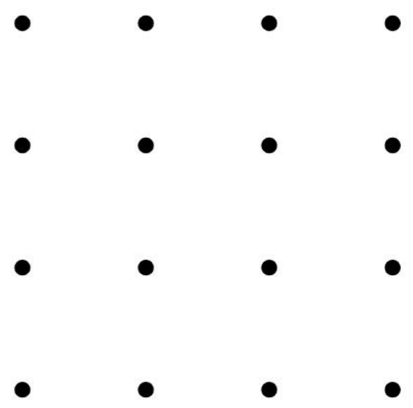
Nous avons trouvé un ensemble S de α = 4 billes retirant toutes les bille de P_4.

Montrons qu’il n’est pas possible d’y arriver avec moins de billes.

- Avec α = 1 : impossible
- Avec α = 2 : impossible
- Avec α = 3 : Une droite passant par 2 points de S passe au maximum par 4 points de P_4 . Il n’est donc possible de récupérer que 9 points au maximum sur les 16 points de P_4. Donc impossible.

Donc α > 3

Pour n = 4



Nous appelons P_n un carré de côté n.
Nous appelons α le nombre de points choisis au début.

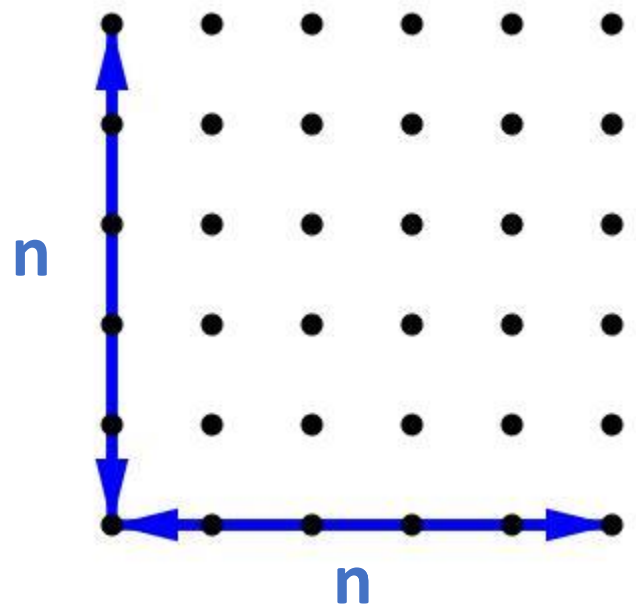
Nous avons trouvé un ensemble S de α = 4 billes retirant toutes les bille de P_4.

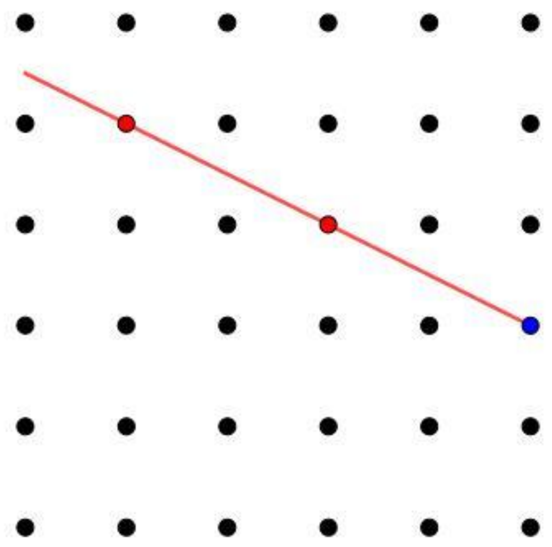
Montrons qu’il n’est pas possible d’y arriver avec moins de billes.

- Avec α = 1 : impossible
- Avec α = 2 : impossible
- Avec α = 3 : Une droite passant par 2 points de S passe au maximum par 4 points de P_4 . Il n’est donc possible de récupérer que 9 points au maximum sur les 16 points de P_4. Donc impossible.

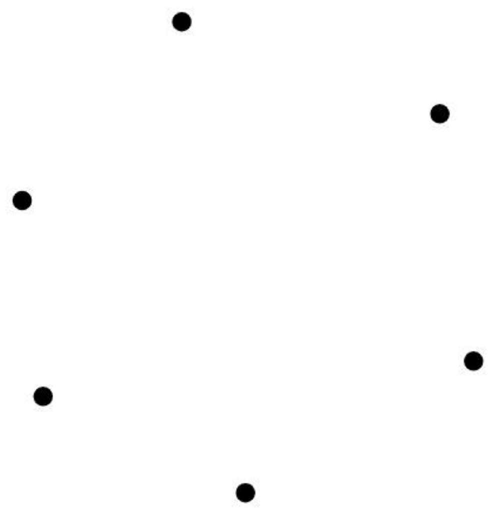
Donc α > 3
Donc α = 4

Minorer le nombre de points α à choisir

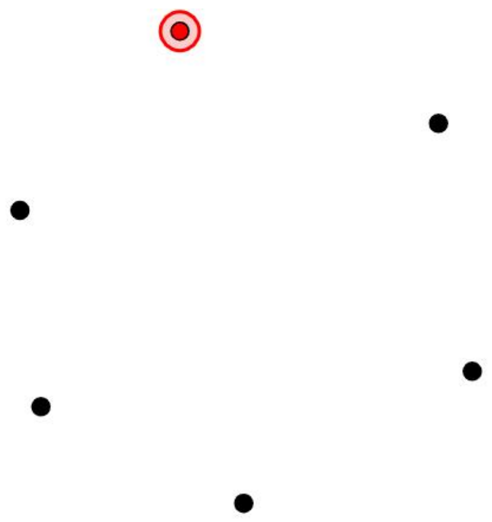




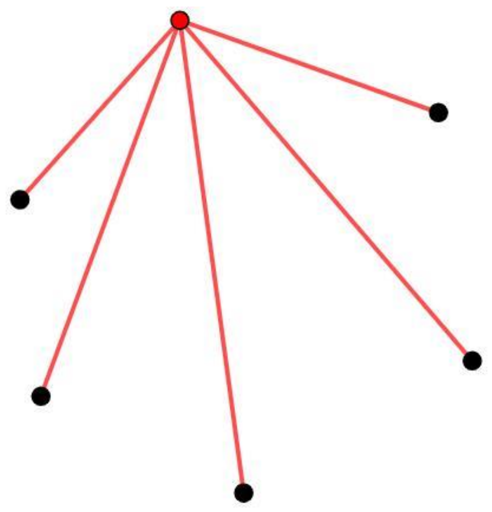
Trouver le nombre de droites formées par α points choisis au départ



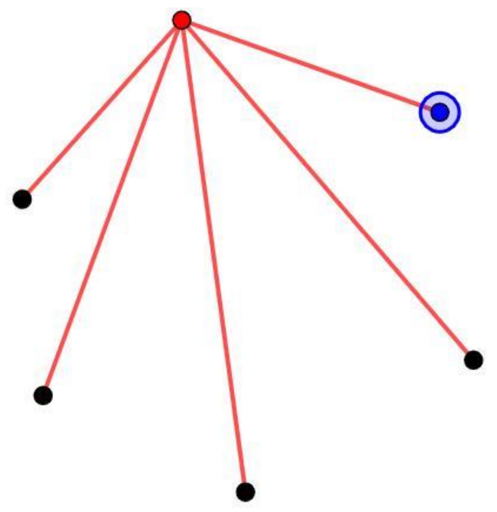
Trouver le nombre de droites formées par α points choisis au départ



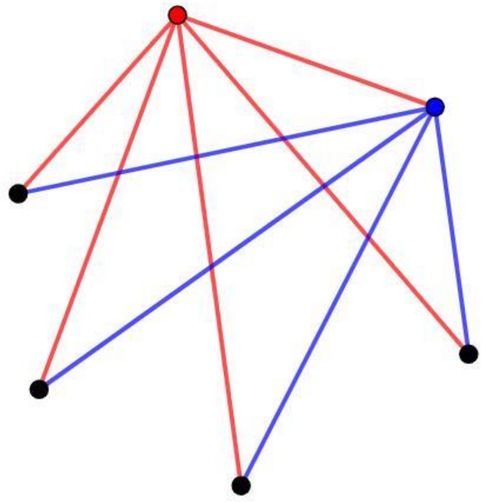
Trouver le nombre de droites formées par α points choisis au départ



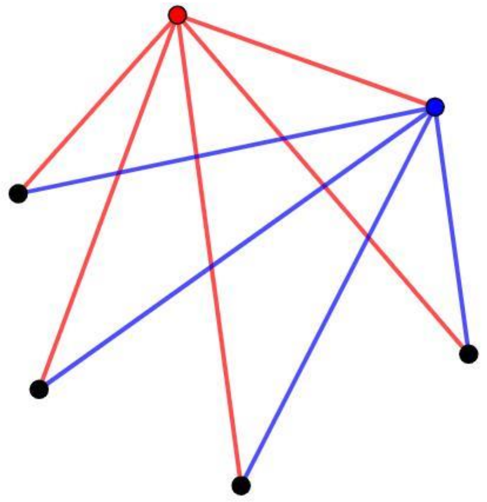
Trouver le nombre de droites formées par α points choisis au départ



Trouver le nombre de droites formées par α points choisis au départ

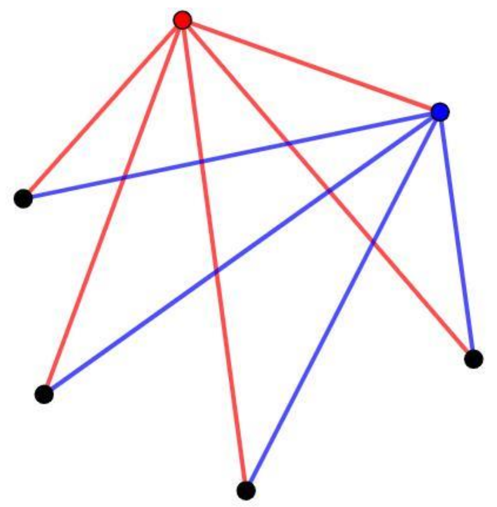


Trouver le nombre de droites formées par α points choisis au départ



Formule de la somme des α-1 premiers entiers naturels :

Trouver le nombre de droites formées par α points choisis au départ



Formule de la somme des α-1 premiers entiers naturels :

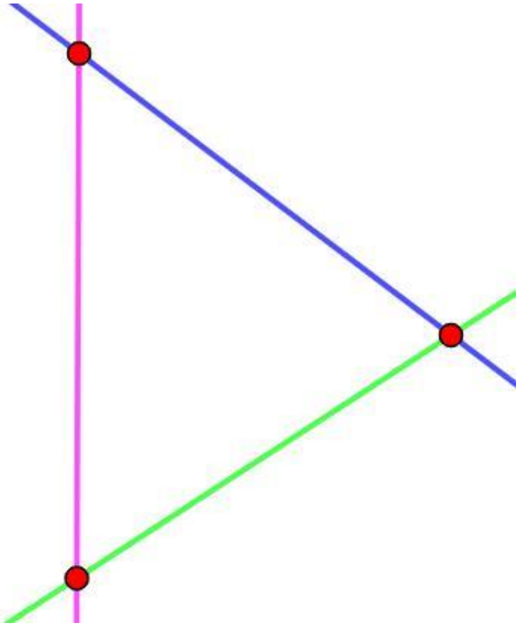
$$\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$$

Trouver le nombre de points récupérés par α points choisis au départ

Ce qui donne $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\times n$ points.

Trouver le nombre de points récupérés par α points choisis au départ

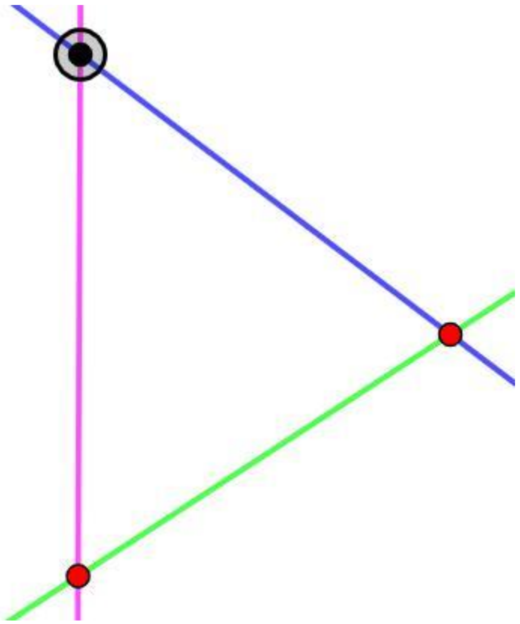
Ce qui donne $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\times n$ points.



En retirant les points comptés en double, on obtient :

Trouver le nombre de points récupérés par α points choisis au départ

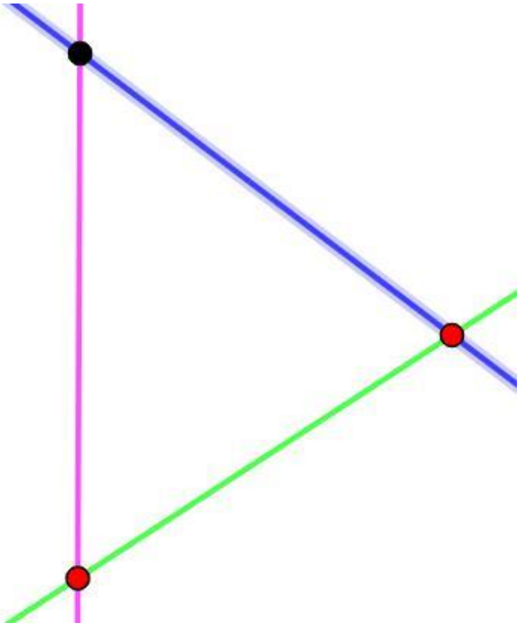
Ce qui donne $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\times n$ points.



En retirant les points comptés en double, on obtient :

Trouver le nombre de points récupérés par α points choisis au départ

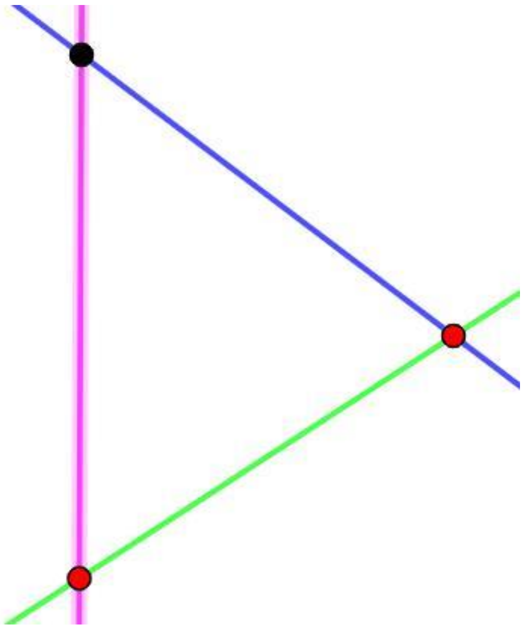
Ce qui donne $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\times n$ points.



En retirant les points comptés en double, on obtient :

Trouver le nombre de points récupérés par α points choisis au départ

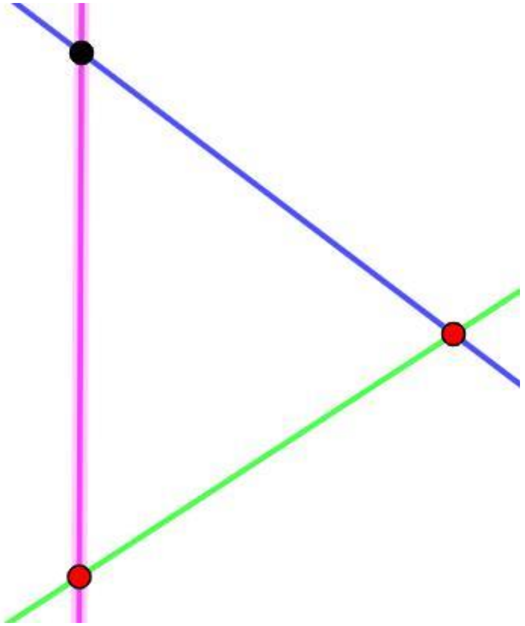
Ce qui donne $\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}\times n$ points.



En retirant les points comptés en double, on obtient :

Trouver le nombre de points récupérés par α points choisis au départ

Ce qui donne $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\times n$ points.



En retirant les points comptés en double, on obtient :

$$\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\times n-(\alpha-2)\times\alpha g$$

Minoration du nombre α de points nécessaires

Pour un carré de côté n, on obtient :

$$U_{\alpha_n} = \frac{\alpha_n(\alpha_n - 1)}{2} \times n - (\alpha_n - 2) \times \alpha_n$$

Minoration du nombre α de points nécessaires

Pour un carré de côté n, on obtient :

$$U_{\alpha_n} = \frac{\alpha_n(\alpha_n - 1)}{2} \times n - (\alpha_n - 2) \times \alpha_n$$

On obtient alors cette inégalité qui donne un minorant de α à partir duquel il est possible d'espérer trouver une solution au problème :

$$U_{\alpha_n} \geqslant n^2$$

Minoration du nombre α de points nécessaires

$$U_{\alpha_n} \geqslant n^2 \Leftrightarrow \frac{\alpha_n(\alpha_n - 1)}{2} \times n - (\alpha_n - 2) \times \alpha_n \geqslant n^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} \times n - (\alpha - 2) \times \alpha - n^2 \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n}{2} - 1\right)\alpha^2 + \left(2 - \frac{n}{2}\right)\alpha - n^2 \geqslant 0$$

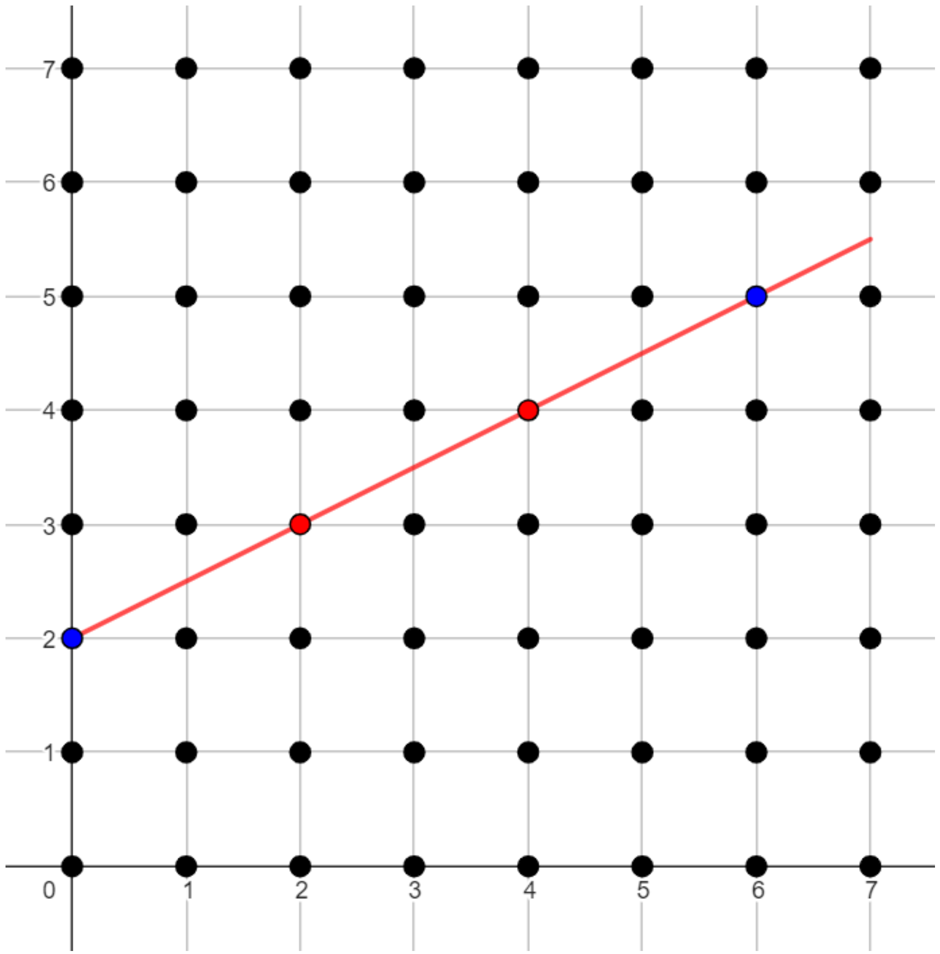
$$\boxed{\Delta = \left(2 - \frac{n}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{n}{2} - 1\right)n^2} = 2n^3 - \frac{17}{4}n^2 + 2n + 4$$

$$\forall n \in [\![3;+\infty]\!], \left(2 - \frac{n}{2}\right)^2 \geqslant 0 \; et \; 4\left(\frac{n}{2} - 1\right)n^2 > 0 \; donc \; \Delta > 0$$

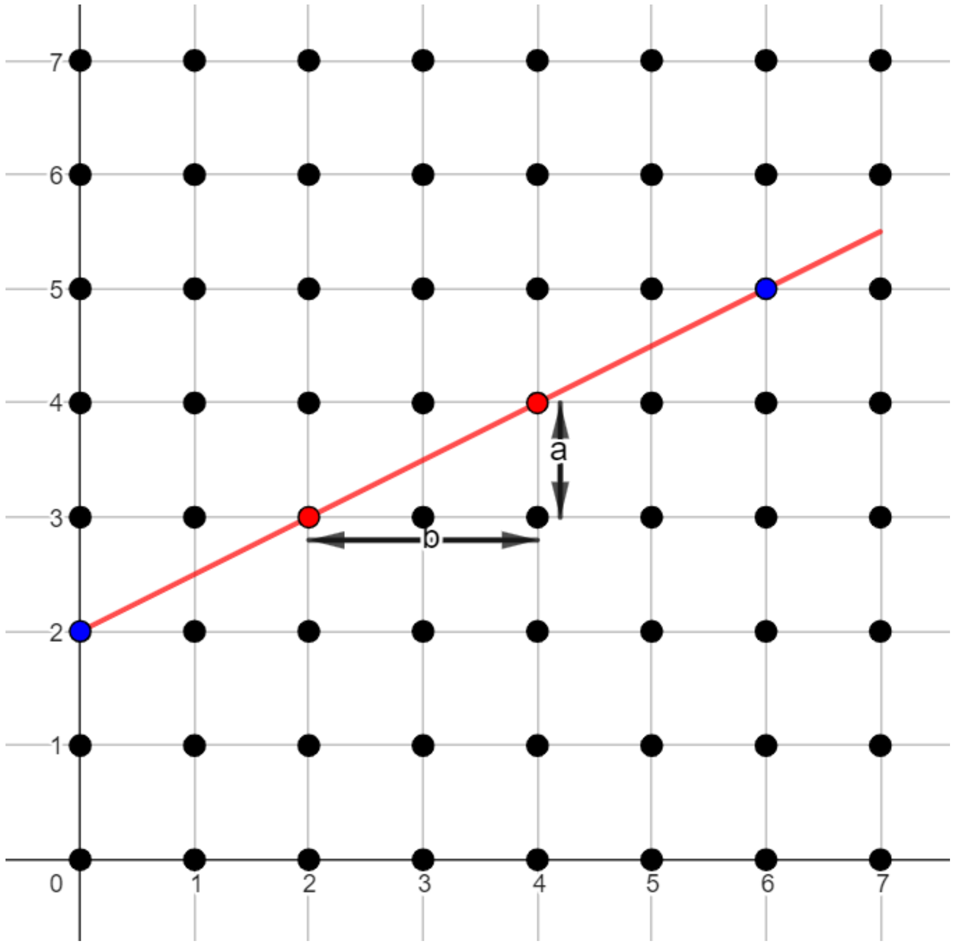
Le premier $\alpha_n > 0$ tel que $U_{\alpha_n} \geqslant n^2$ est donc :

$$\alpha_n = \frac{\frac{n}{2} - 2 + \sqrt{\Delta}}{2n - 2} = \boxed{\frac{n - 4 + \sqrt{\Delta}}{4n - 4}}$$ arrondi au supérieur

Majoration du nombre de points en fonction d’une droite



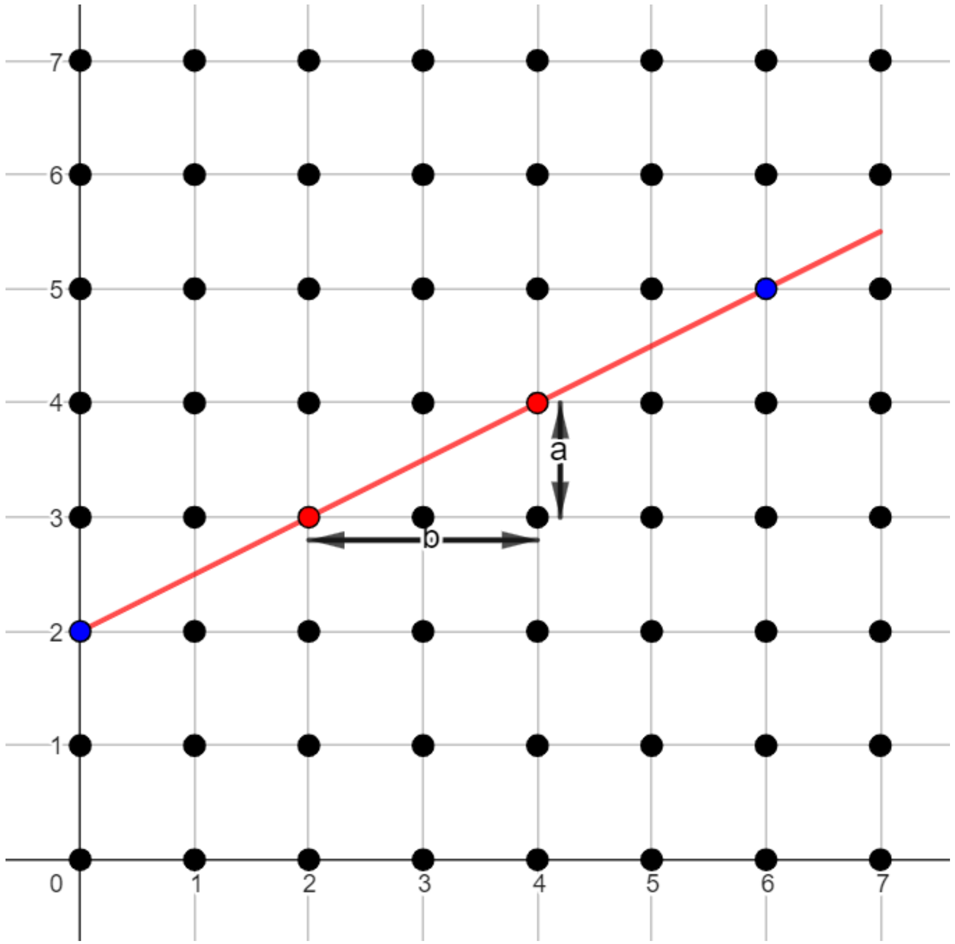
Majoration du nombre de points en fonction d'une droite



On appelle D la droite étudiée.

$$\frac{a}{b}$$

Majoration du nombre de points en fonction d’une droite

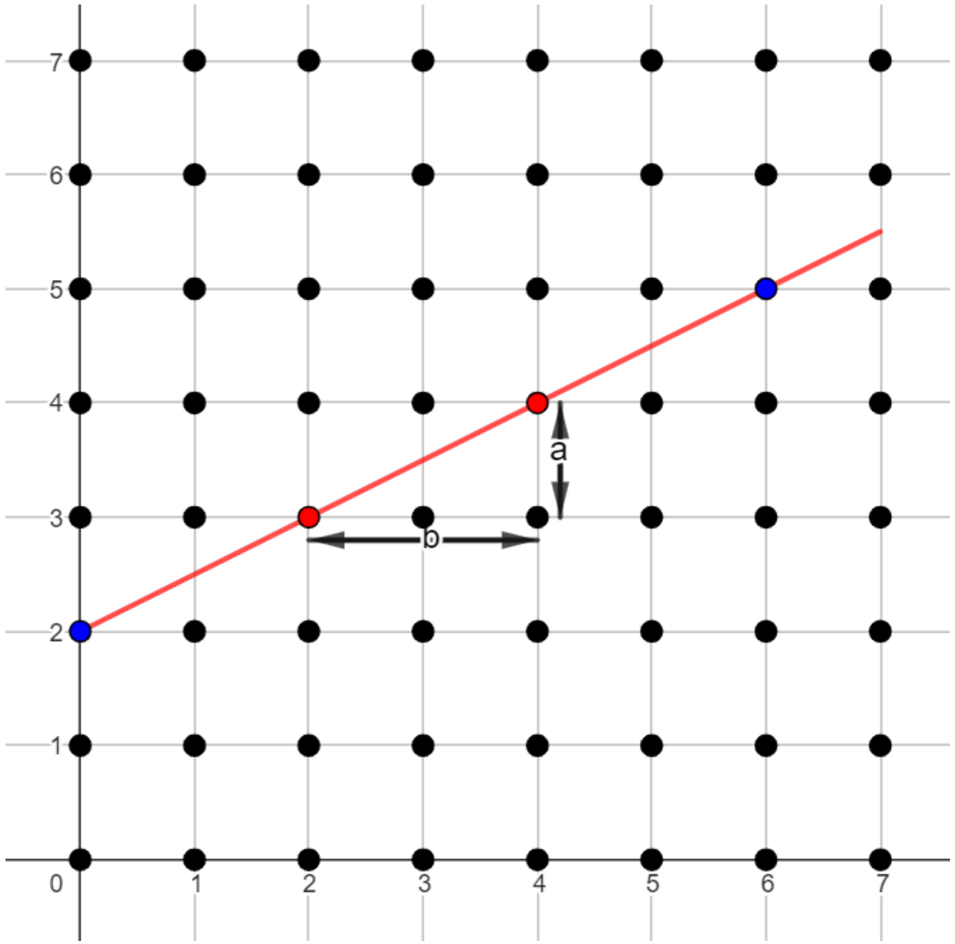


On appelle D la droite étudiée.

On note $(x_0\,;\,y_0)$ les coordonnées d’un point choisi au début appartenant à la droite D.

$$\frac{a}{b}$$

Majoration du nombre de points en fonction d'une droite

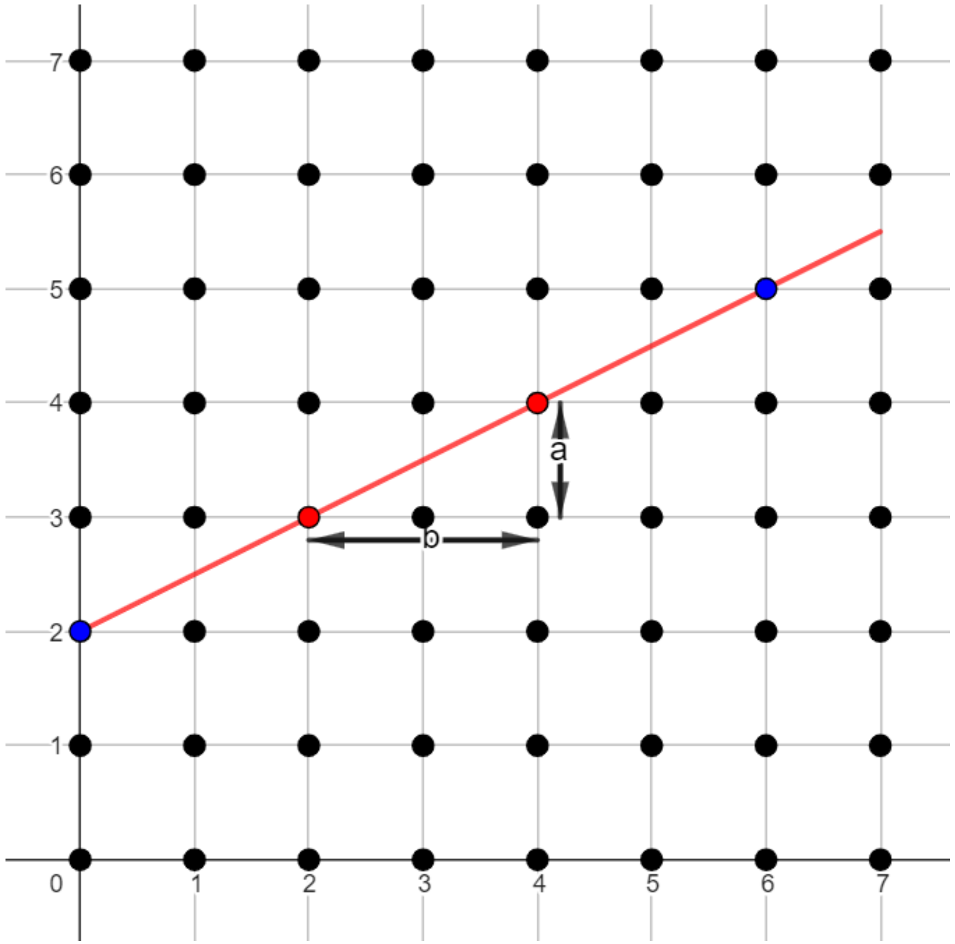


On appelle D la droite étudiée.

On note $(x_0 ; y_0)$ les coordonnées d'un point choisi au début appartenant à la droite D.

Soit a un entier relatif et b un entier naturel tels que le rapport $\frac{a}{b}$ soit égal au coefficient directeur de la droite D, avec a et b premiers entres eux.

Majoration du nombre de points en fonction d'une droite



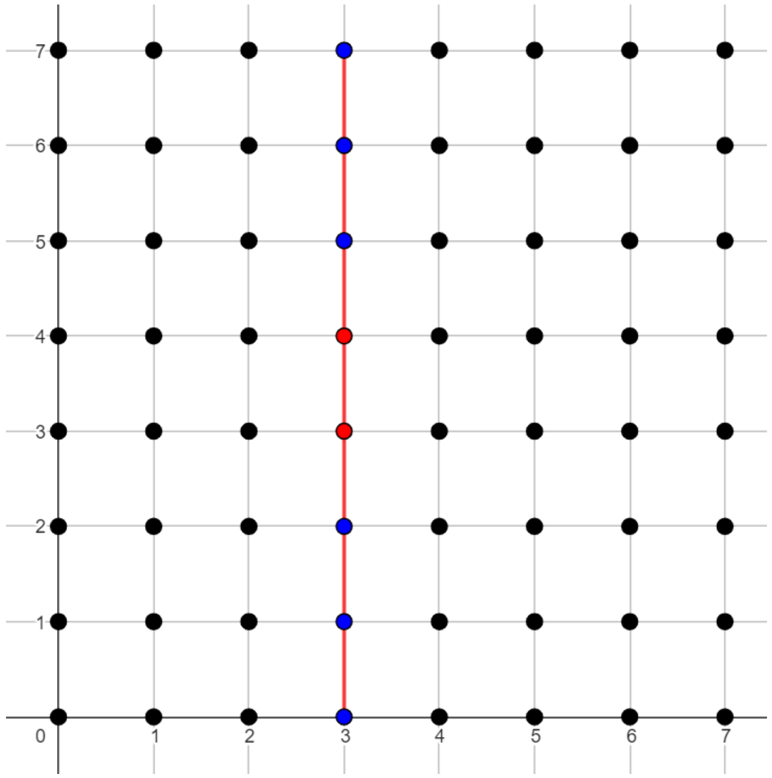
Soit D la droite étudiée.

Soit $(x_0 ; y_0)$ les coordonnées d'un point choisi au début appartenant à la droite D.

Soit a un entier relatif et b un entier naturel tels que le rapport $\frac{a}{b}$ soit égal au coefficient directeur de la droite D, avec a et b premiers entres eux.

$$D \cap P_n = P_n \cap \{(x_0 + kb ; y_0 + ka), k \in \mathbb{Z}\}$$

Majoration du nombre de points en fonction d'une droite



Cas particulier :

Si la droite D est parallèle à l'axe des ordonnées, le nombre de points de P_n compris dans cette droite est de n.

Majoration du nombre de points en fonction d’une droite

Nous avons donc $\begin{cases} 0 \leqslant x_0 + kb \leqslant n-1 \ (1) \\ 0 \leqslant y_0 + ka \leqslant n-1 \ (2) \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

$b \in \mathbb{N} \backslash \{0\}, donc\ (1) \Leftrightarrow -\frac{x_0}{b} \leqslant k \leqslant \frac{n-1-x_0}{b}$

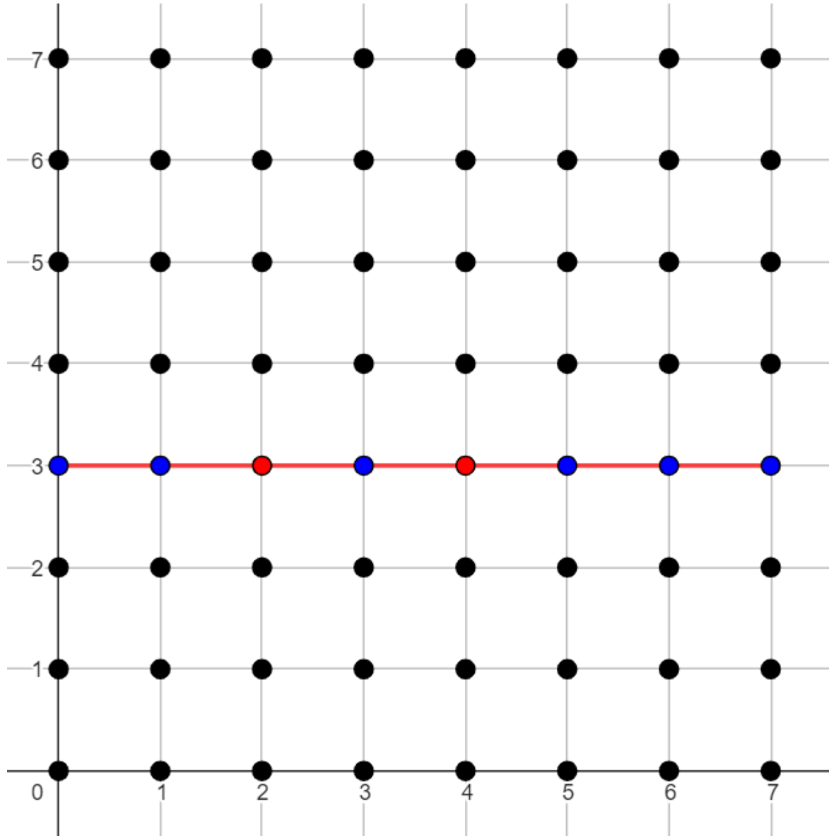
$a \in \mathbb{Z}$ donc nous devons étudier

- si a = 0
- si a > 0
- si a < 0

Majoration du nombre de points en fonction d’une droite

<u>Si a = 0 :</u>

La droite D est parallèle à l’axe des abscisses donc elle compte n points.



Majoration du nombre de points en fonction d'une droite

Si a > 0 :

$$b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, donc\,(1) \Leftrightarrow -\frac{x_0}{b} \leqslant k \leqslant \frac{n-1-x_0}{b}$$

$$a > 0\, donc\,(2) \Leftrightarrow -\frac{y_0}{a} \leqslant k \leqslant \frac{n-1-y_0}{a}$$

Donc $max\left(-\frac{y_0}{a}; -\frac{x_0}{b}\right) \leqslant k \leqslant min\left(\frac{n-1-y_0}{a}; \frac{n-1-x_0}{b}\right)$

Donc $-min\left(\frac{y_0}{a}; \frac{x_0}{b}\right) \leqslant k \leqslant min\left(\frac{n-1-y_0}{a}; \frac{n-1-x_0}{b}\right)$

$$0 \leqslant x_0 \leqslant n-1\, et\, 0 \leqslant y_0 \leqslant n-1$$

Donc $\boxed{-min\left(\frac{n}{a}; \frac{n}{b}\right) \leqslant k \leqslant min\left(\frac{n-1}{a}; \frac{n-1}{b}\right)}$

Majoration du nombre de points en fonction d'une droite

<u>Si a > 0 :</u>

$$b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, donc\,(1) \Leftrightarrow -\frac{x_0}{b} \leqslant k \leqslant \frac{n-1-x_0}{b}$$

$$a > 0\, donc\,(2) \Leftrightarrow -\frac{y_0}{a} \leqslant k \leqslant \frac{n-1-y_0}{a}$$

Donc $max\left(-\frac{y_0}{a}; -\frac{x_0}{b}\right) \leqslant k \leqslant min\left(\frac{n-1-y_0}{a}; \frac{n-1-x_0}{b}\right)$

Donc $-min\left(\frac{y_0}{a}; \frac{x_0}{b}\right) \leqslant k \leqslant min\left(\frac{n-1-y_0}{a}; \frac{n-1-x_0}{b}\right)$

$$0 \leqslant x_0 \leqslant n-1\, et\, 0 \leqslant y_0 \leqslant n-1$$

Donc $\boxed{-min\left(\frac{n}{a}; \frac{n}{b}\right) \leqslant k \leqslant min\left(\frac{n-1}{a}; \frac{n-1}{b}\right)}$

Si a > b : $-\frac{n}{a} \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{a}$ donc $\left\lfloor \frac{2n}{a} \right\rfloor$ valeurs possibles pour k.

Majoration du nombre de points en fonction d'une droite

<u>Si a > 0 :</u>

$b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, donc\,(1) \Leftrightarrow -\frac{x_0}{b} \leqslant k \leqslant \frac{n-1-x_0}{b}$

$a > 0\, donc\,(2) \Leftrightarrow -\frac{y_0}{a} \leqslant k \leqslant \frac{n-1-y_0}{a}$

Donc $max(-\frac{y_0}{a}; -\frac{x_0}{b}) \leqslant k \leqslant min(\frac{n-1-y_0}{a}; \frac{n-1-x_0}{b})$

Donc $-min(\frac{y_0}{a}; \frac{x_0}{b}) \leqslant k \leqslant min(\frac{n-1-y_0}{a}; \frac{n-1-x_0}{b})$

$0 \leqslant x_0 \leqslant n-1\, et\, 0 \leqslant y_0 \leqslant n-1$

Donc $\boxed{-min(\frac{n}{a}; \frac{n}{b}) \leqslant k \leqslant min(\frac{n-1}{a}; \frac{n-1}{b})}$

Si a > b : $-\frac{n}{a} \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{a}$ donc $\left\lfloor \frac{2n}{a} \right\rfloor$ valeurs possibles pour k.

Si a < b : $-\frac{n}{b} \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{b}$ donc $\left\lfloor \frac{2n}{b} \right\rfloor$ valeurs possibles pour k.

Majoration du nombre de points en fonction d'une droite

<u>Si a > 0 :</u>

$$b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, donc\ (1) \Leftrightarrow -\frac{x_0}{b} \leqslant k \leqslant \frac{n-1-x_0}{b}$$

$$a > 0\ donc\ (2) \Leftrightarrow -\frac{y_0}{a} \leqslant k \leqslant \frac{n-1-y_0}{a}$$

Donc $max\left(-\frac{y_0}{a}; -\frac{x_0}{b}\right) \leqslant k \leqslant min\left(\frac{n-1-y_0}{a}; \frac{n-1-x_0}{b}\right)$

Donc $-min\left(\frac{y_0}{a}; \frac{x_0}{b}\right) \leqslant k \leqslant min\left(\frac{n-1-y_0}{a}; \frac{n-1-x_0}{b}\right)$

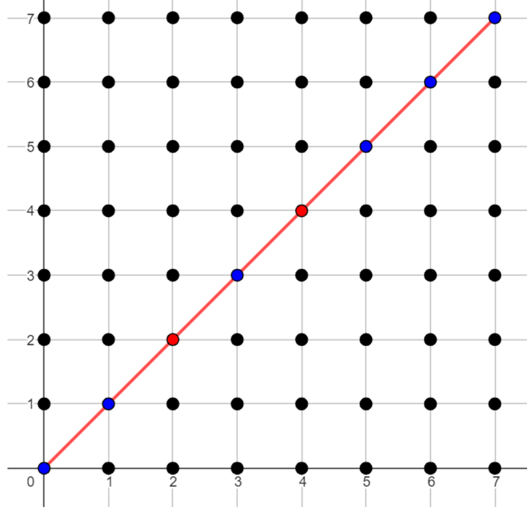
$$0 \leqslant x_0 \leqslant n-1\ et\ 0 \leqslant y_0 \leqslant n-1$$

Donc $\boxed{-min\left(\frac{n}{a}; \frac{n}{b}\right) \leqslant k \leqslant min\left(\frac{n-1}{a}; \frac{n-1}{b}\right)}$

Si a > b : $-\frac{n}{a} \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{a}$ donc $\left\lfloor \frac{2n}{a} \right\rfloor$ valeurs possibles pour k.

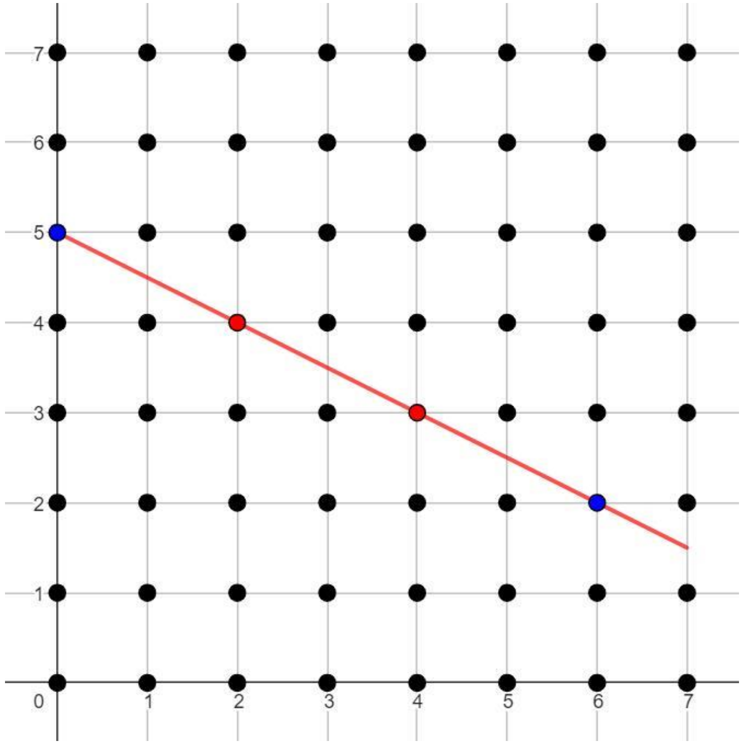
Si a < b : $-\frac{n}{b} \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{b}$ donc $\left\lfloor \frac{2n}{b} \right\rfloor$ valeurs possibles pour k.

Si a = b : Il y a n valeurs possibles pour k



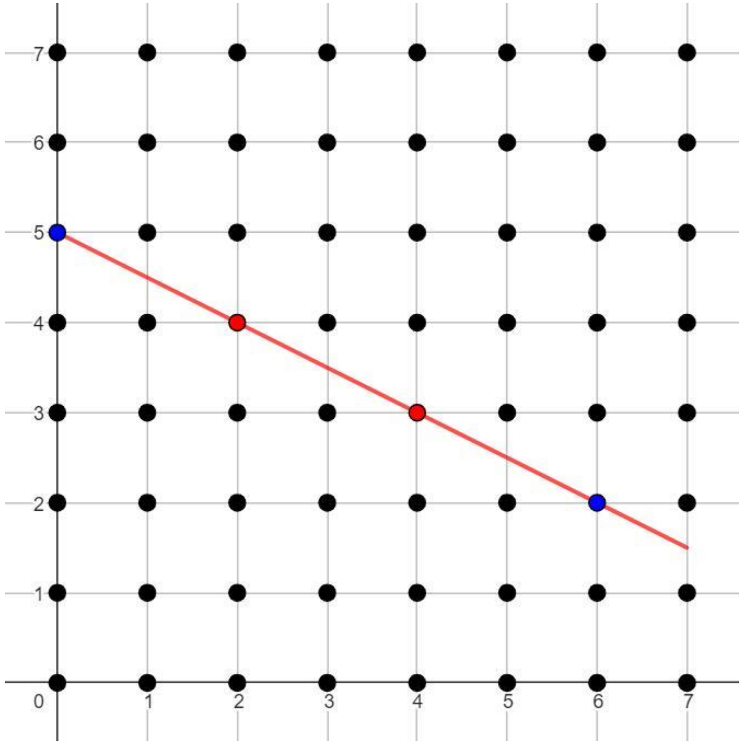
Majoration du nombre de points en fonction d'une droite

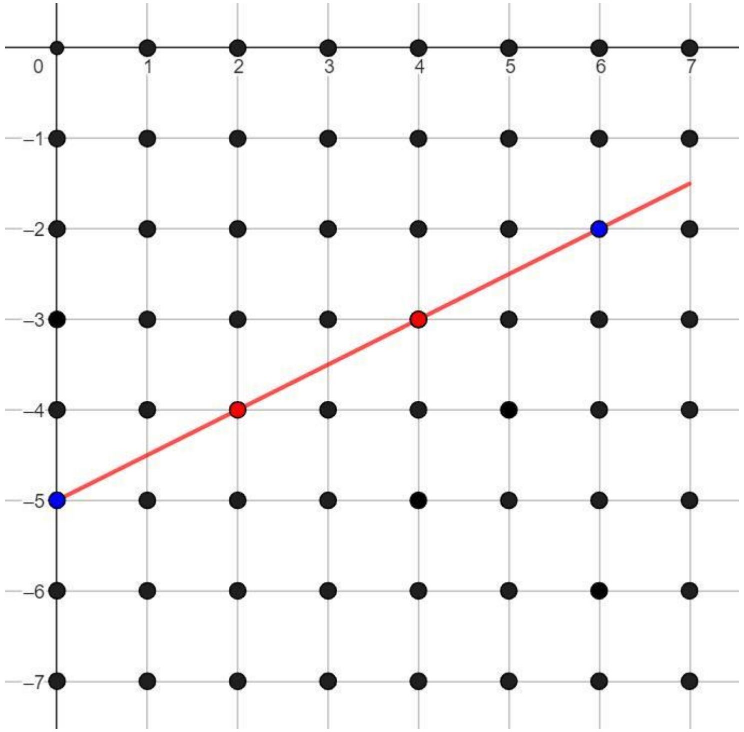
Si a < 0 :



Majoration du nombre de points en fonction d’une droite

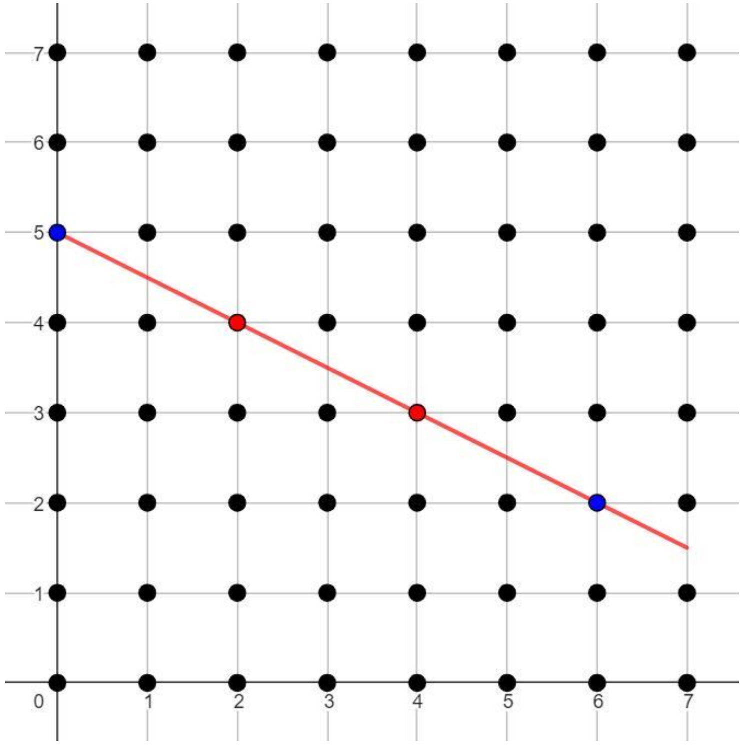
<u>Si a < 0 :</u>

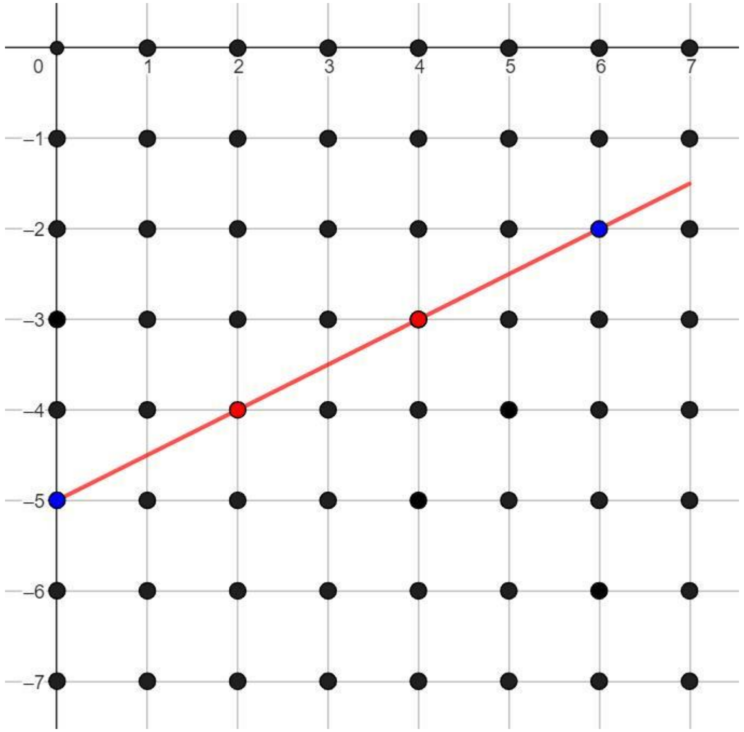


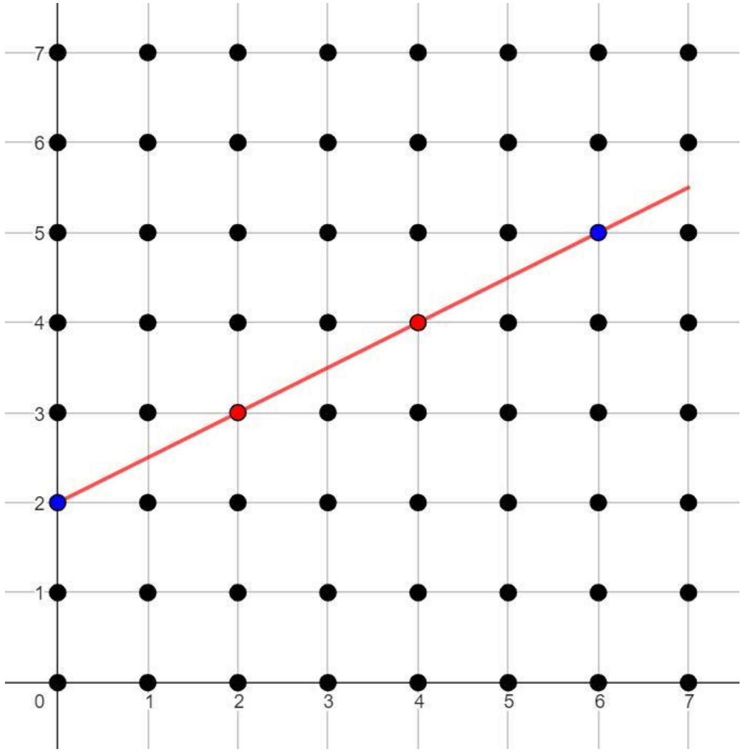


Majoration du nombre de points en fonction d’une droite

Si a < 0 :







Conclusion