Le partage des champs

La suite logistique et le chaos

HAMLETT Amy, CHABBI Rayan, BOULLIS Cyril

GROLLEAU Axel, FIGUERAS Alexis

Lycée Blaise Pascal, ORSAY

Remerciements : Mme Chipot, Mme Cochard, Mlle Galiay

Le problème initial

Alice et Bob doivent se partager un champ carré de taille 1km sur 1km.

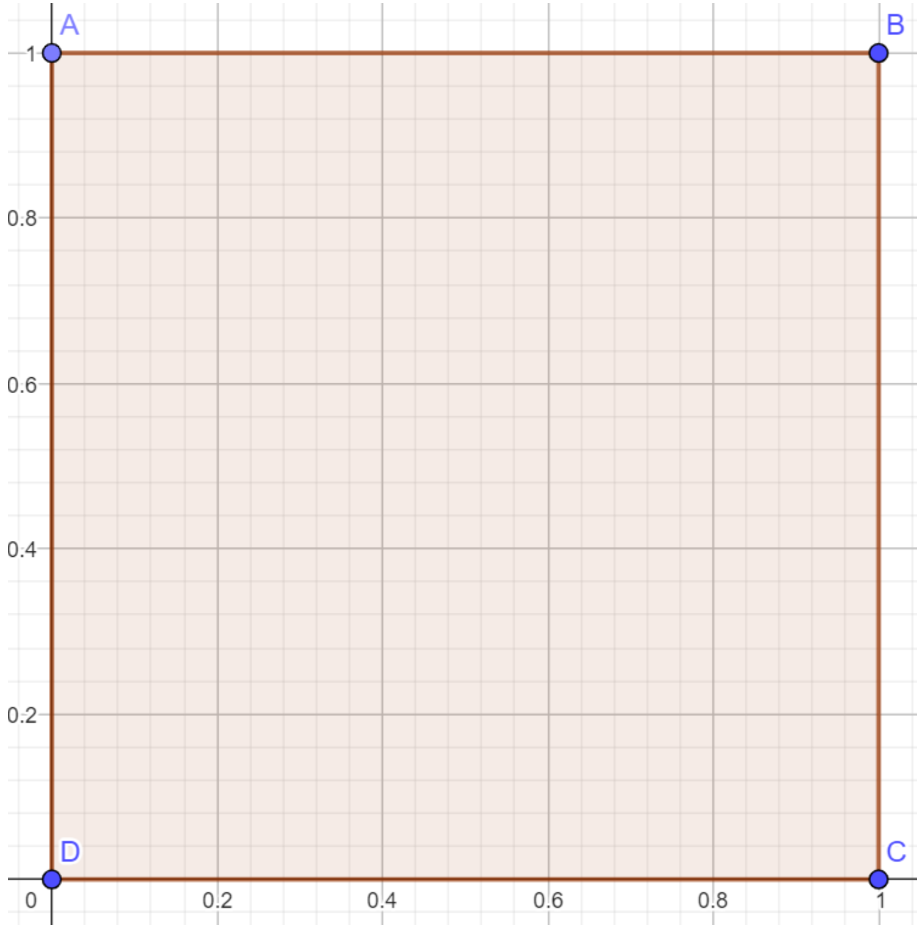
On note A,B,C,D les sommets du carré et λ ϵ $]0;+\infty[$.

Alice propose à Bob de se partager le champ de la manière suivante :

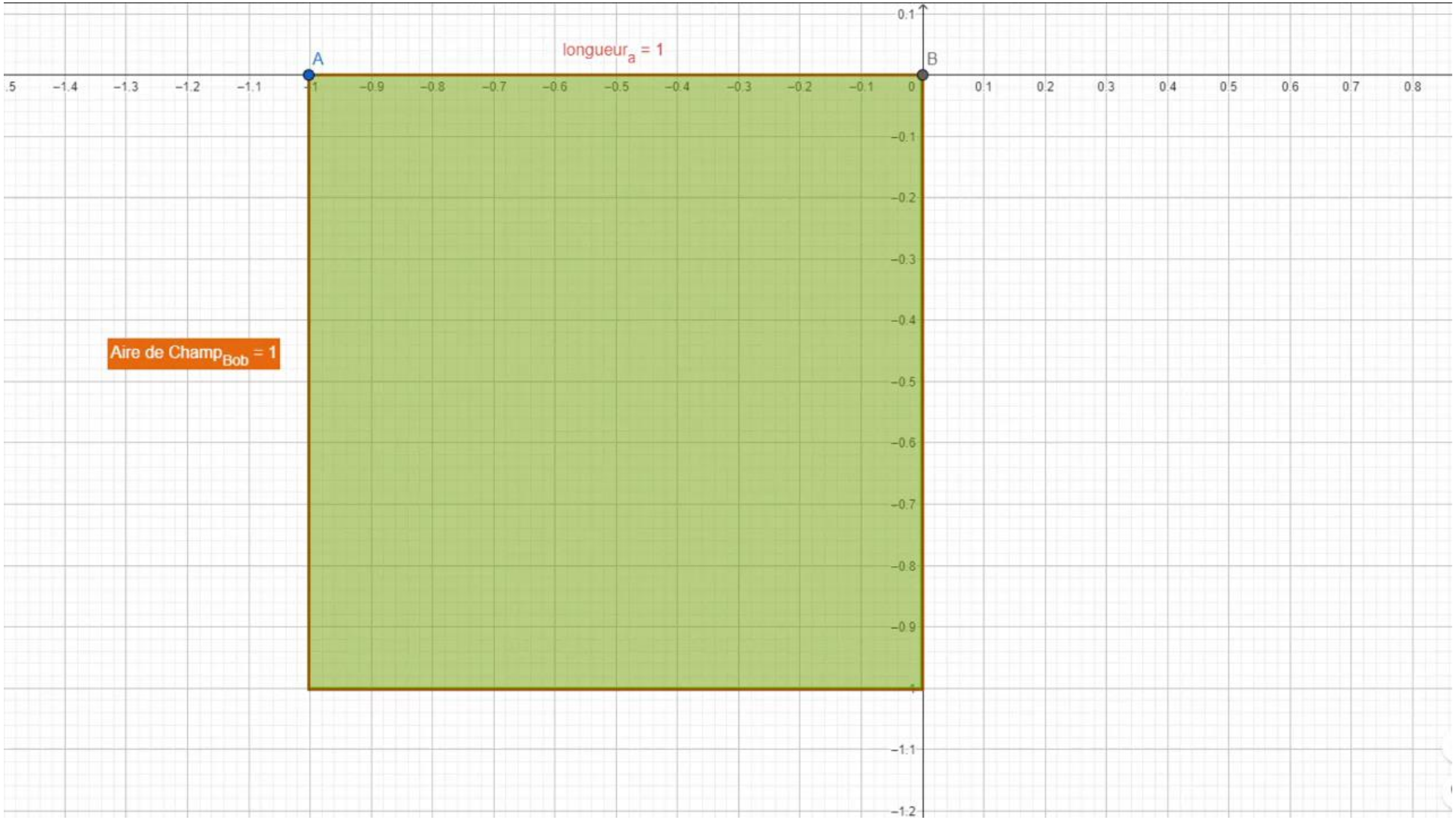
- Tout d'abord Bob doit choisir un réel a ϵ]0;1[et tracer le carré de côté a (en km) dont l'un des sommets est A
- Ensuite commence le partage : retirer à la longueur du premier carré tracé son aire en km² et multiplier le tout par λ. Tracer ensuite le carré de côté la quantité trouvée (en km), dont un des sommets est A.
- Appliquer la seconde étape sur le second carré tracé, et réitérer le processus jusqu'à 1000 fois.
- Le millième carré obtenu est le terrain de Bob, et le terrain restant revient à Alice.

Ce partage est il avantageux pour Bob ?

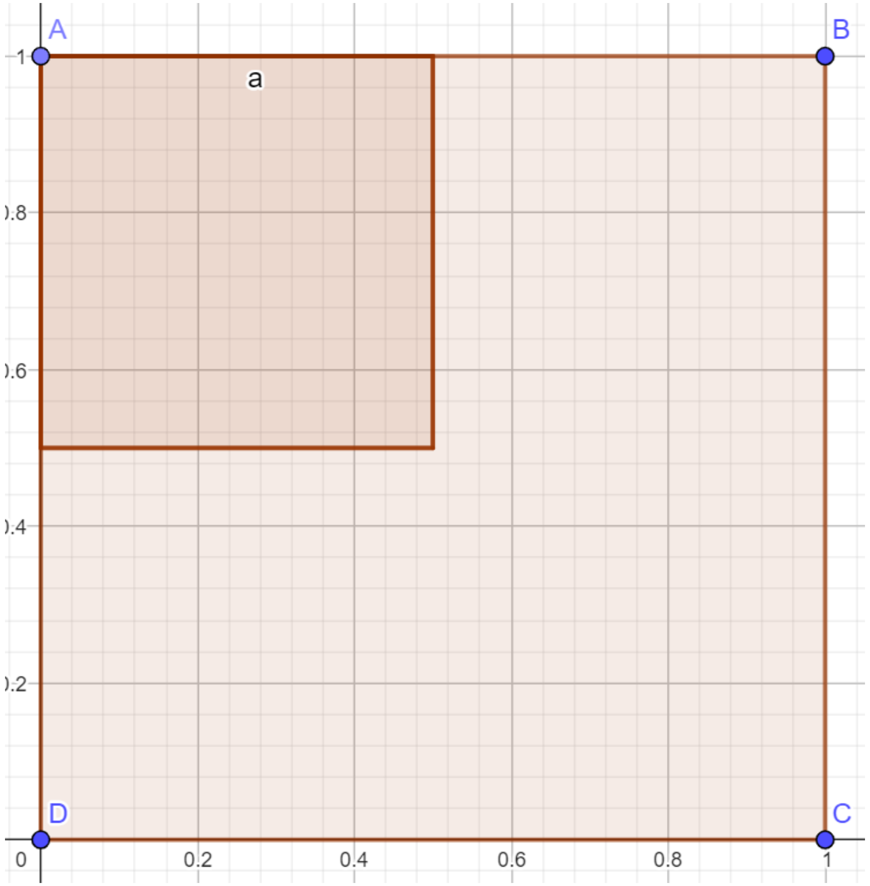
Exemple : $\lambda = 1$ et $a = 0.5$



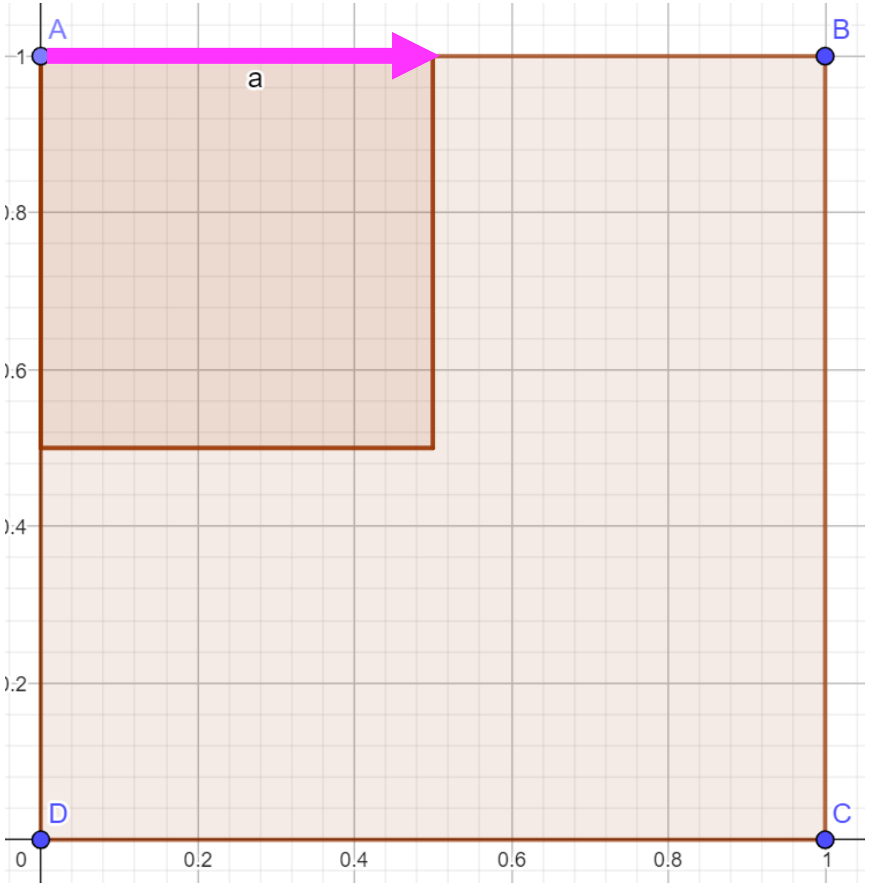
Exemple :



Exemple : λ = 1 et a = 0.5



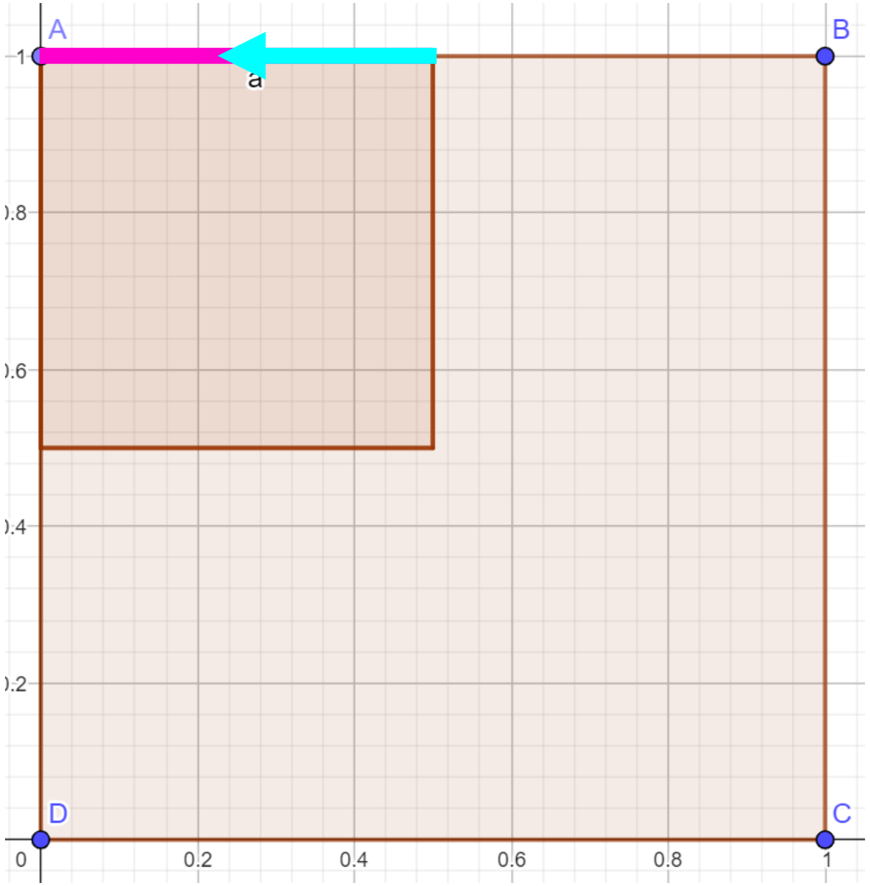
Exemple : $\lambda = 1$ et $a_1 = 0.5$



Construction de a_2 :

$$a_2 = a$$

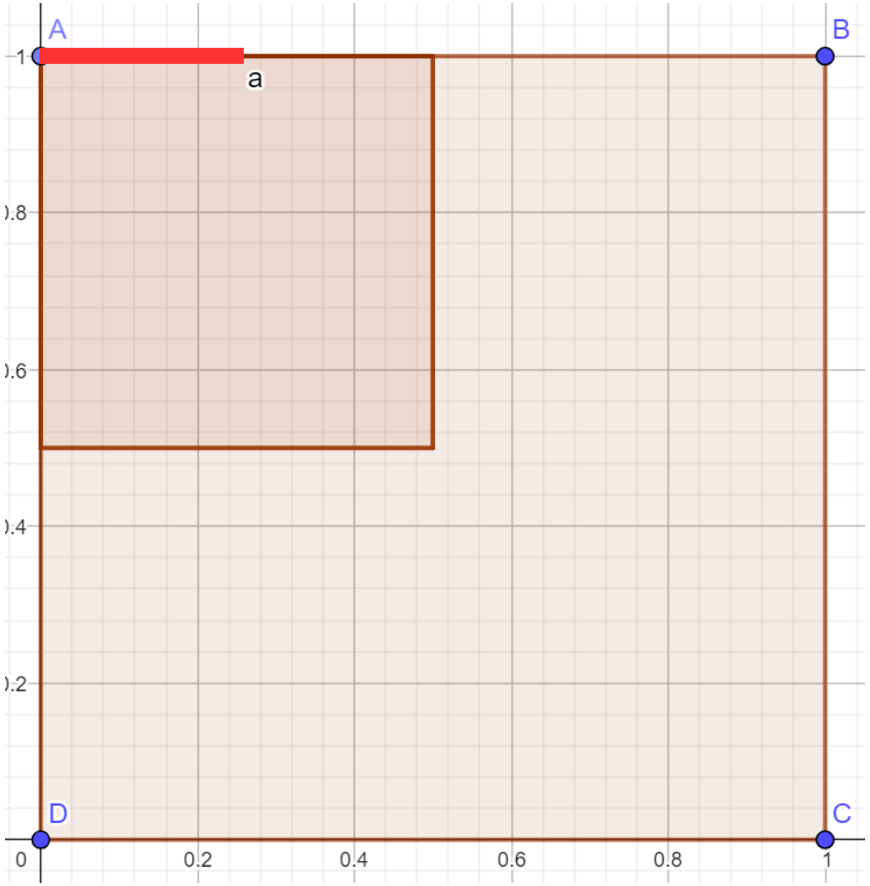
Exemple : $\lambda = 1$ et $a_1 = 0.5$



Construction de a_2 :

$$a_2 = (a_1 - a_1^2)$$

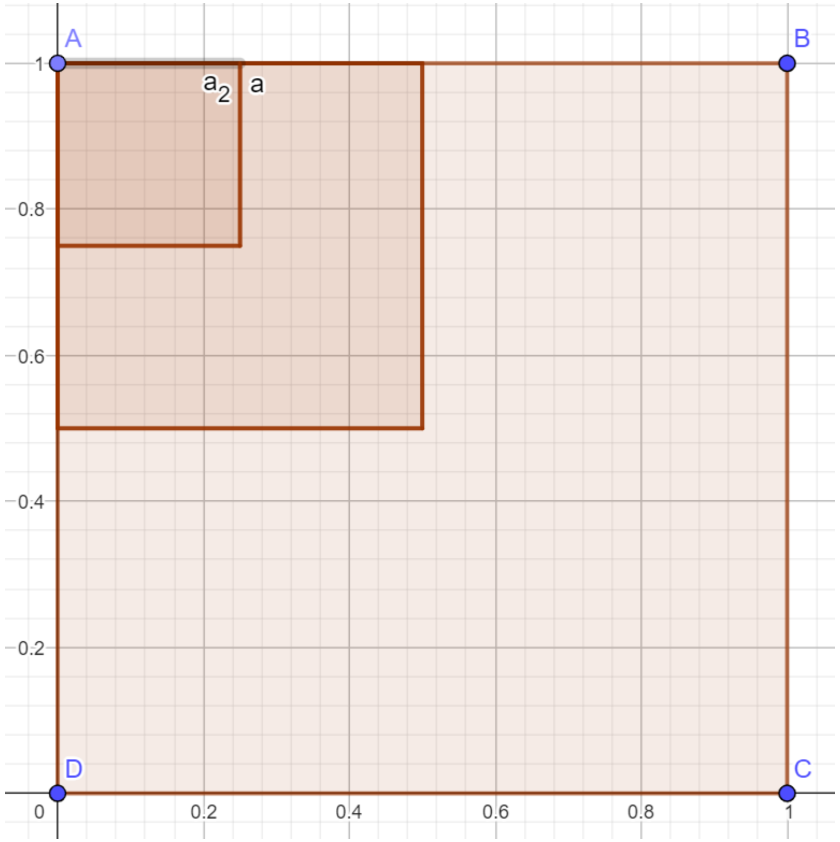
Exemple : $\lambda = 1$ et $a_1 = 0.5$



Construction de a_2 :

$a_2 = (a_1 - a_1^2)$

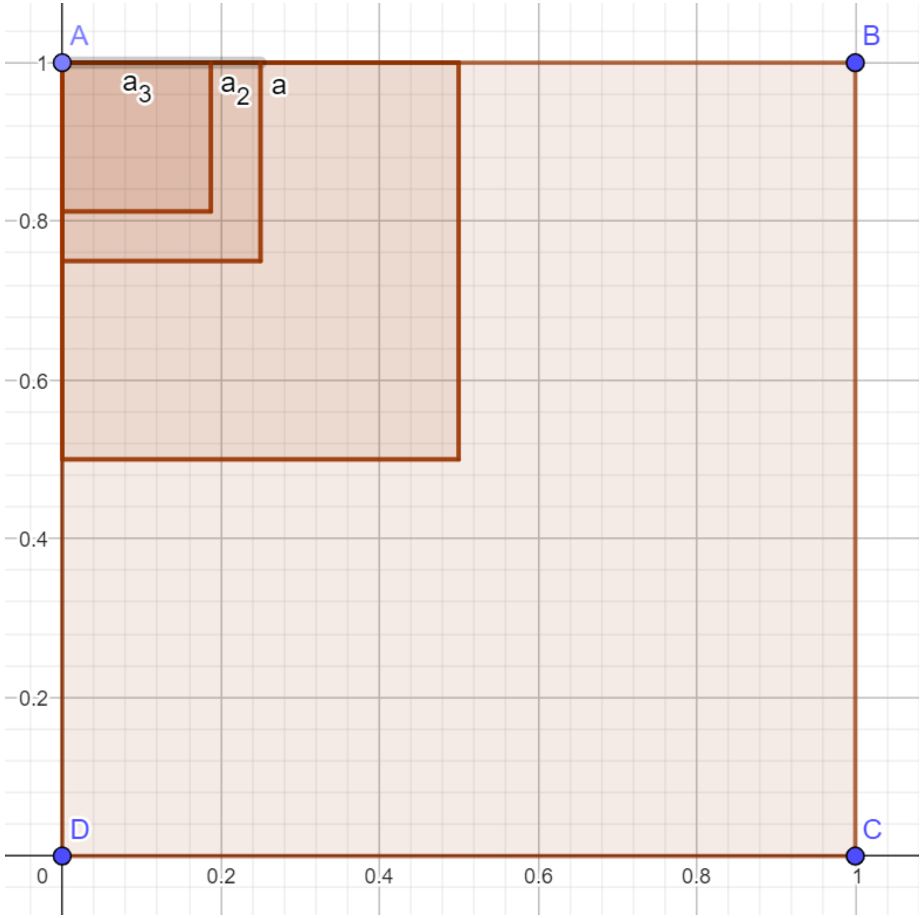
Exemple : λ = 1 et a = 0.5



D'où le carré de longueur a_2 :

$$a_2 = \lambda(a_1 - a_1^2)$$

Exemple : $\lambda = 1$ et $a_1 = 0.5$



On itère 1000 fois

Mise en équation du problème

Programme de calcul à itérer 1000 fois

Suite récurrente d'ordre 1 (u_n)

u_0 = a côté du carré d'aire *A*
$u_n \in [0; 1]$

λ ϵ $]0; +\infty[$ connu de Bob

u_0 fixé en début de partage

Equation équivalente à « prendre une longueur de côté, y soustraire la longueur initiale élevée au carré et multiplier le tout par λ » : $u_{n+1} = \lambda(u_n - u_n^2)\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$f(u_n) = u_{n+1}$, $f(x) = \lambda(x - x^2)\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

Sous réserve d'existence, l limite de (u_n)

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$ point fixe de f

Restriction de l'ensemble

Restriction de l'ensemble de définition de λ.

Etude des variations de u_n sur [0;1] :

$u_{n+1} = \lambda \times k(u_n)\ \forall\, n\ \in \mathbb{N}^*$

avec $k(x) = (x - x^2)\ \forall\, x \in [0;1]$

$k'(x) = 1 - 2x$

x	**0**	**0,5**	**1**
Signe de k'	+	0	-
Variations de k	croissante	0,25	décroissante
Valeurs de u_n	0	0,25λ	0

u_n ∈]0;1[ssi λ ∈]0;4[.

Conjectures préalables

Comportement de la suite en fonction de λ.

Disjonction de cas :

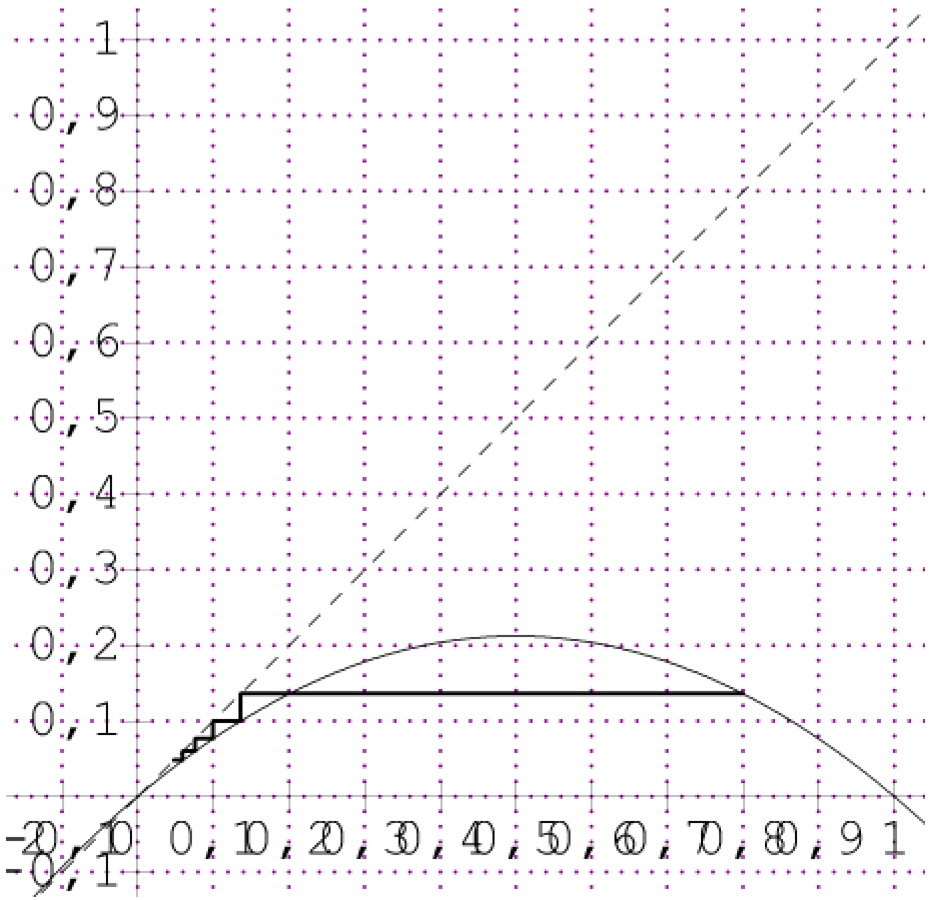
A. λ ϵ]0;1]
B. λ ϵ]1;2]
C. λ ϵ]2;3]

λ ϵ]3;4[non traité car trop chaotique et recherches non abouties

$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ pour λ ϵ]0;1] et $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$ pour λ ϵ]1;4[

Valeurs cohérentes avec les points fixes de f

A- Cas λ ϵ]0;1]



λ = 0,85 et a = 0,8

A- Cas λ ϵ]0;1]

Conjecture $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Raisonnement par récurrence

Soit n ϵ $\mathbb{N}^*$, $P(n)$: $0 < u_{n+1} < u_n < 0{,}5$.

→Initialisation pour n=1

$0 < u_2 < u_1 < 0{,}5$ donc $P(1)$ vraie.

→Hérédité

$0 < u_{n+1} < u_n$ hypothèse de récurrence

$f(0) < f(u_{n+1}) < f(u_n) < 0{,}5$

f croissante sur [0;0,5]

$0 < \lambda f(u_{n+1}) < \lambda f(u_n) < \lambda f(0{,}5)$ $\lambda > 0$

$0 < u_{n+2} < u_{n+1} < \lambda 0{,}25$

donc $P(n+1)$ vraie.

→Conclusion

Donc d'après le principe de récurrence, on a $P(n)$ vraie $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

C'est-à-dire, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} < u_n$.

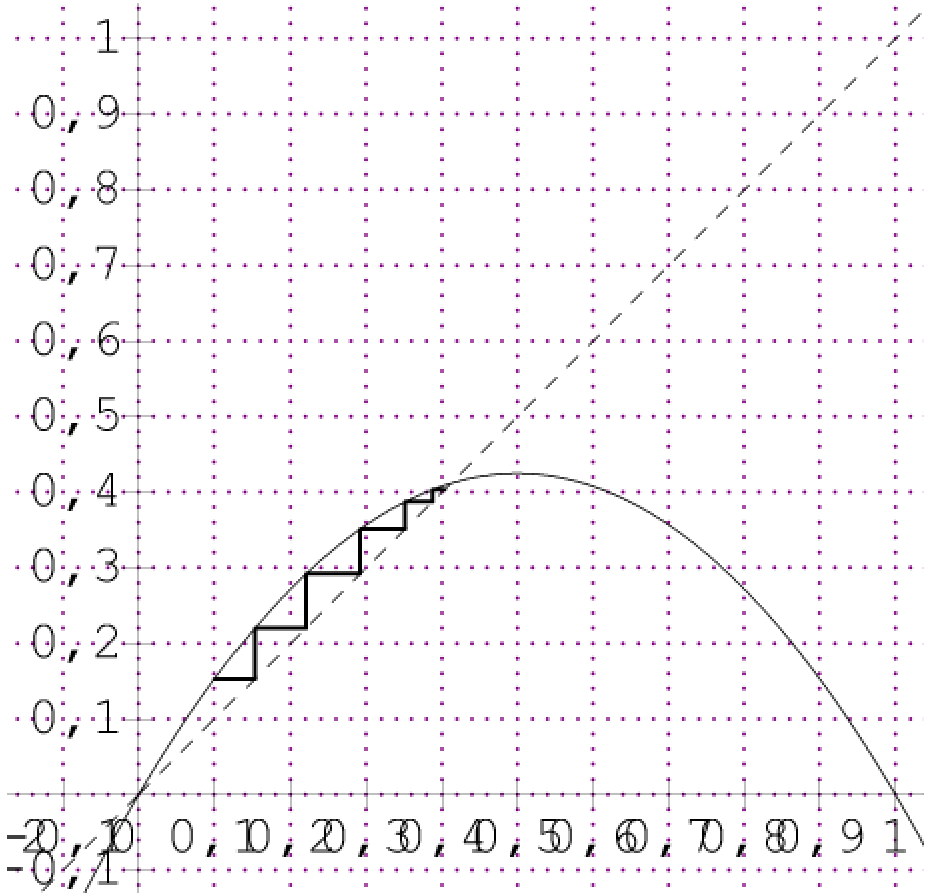
On a donc (u_n) décroissante minorée, donc d'après le théorème de la convergence monotone (u_n) converge vers une limite l point fixe de f.

Or $\frac{\lambda - 1}{\lambda} < 0$ pour λ ϵ]0;1]

Donc on retient $l = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

B- Cas λ ϵ]1;2]



λ = 1,7 et a = 0,1

B- Cas λ ϵ]1;2]

Conjecture si λ ϵ [1;2] alors $l \neq 0$

Absence de décroissance monotone

Emploi de fonctions auxiliaires $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$, définies $\forall\ x\ \in]0;1[$ et changement de variable λ' pour se rapporter au cas précédent

Lemme:
$\lambda' = 2 - \lambda$
$\lambda' \in [0;1]$
$f(x) = \lambda x(1-x)$
$g(x) = \lambda' x(1-x)$
$h(x) = \frac{\lambda - 1 - \lambda x}{\lambda - 2}$ bijection
$h^{-1}(x) = \frac{\lambda - 1 - (\lambda - 2)x}{\lambda}$ réciproque
$g = h \circ f \circ h^{-1}$

$f = h^{-1} \circ g \circ h$

Donc $f^n = h^{-1} \circ g^n \circ h$

Or, $u_n = f^n(u_0)$ et $g^n\left(h(u_0)\right)$

Donc $u_n = h^{-1}(g^n\left(h(u_0)\right))$

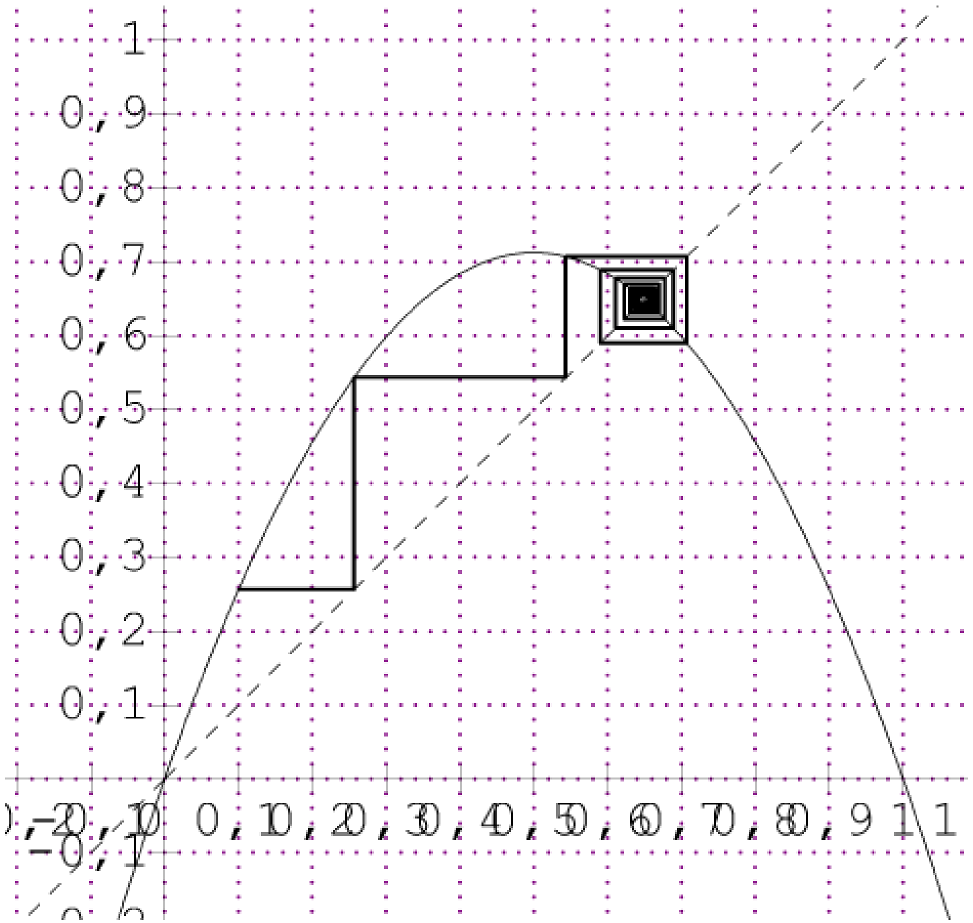
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} g^n\left(h(u_0)\right) = 0$

u_n tend vers $h^{-1}(0) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$

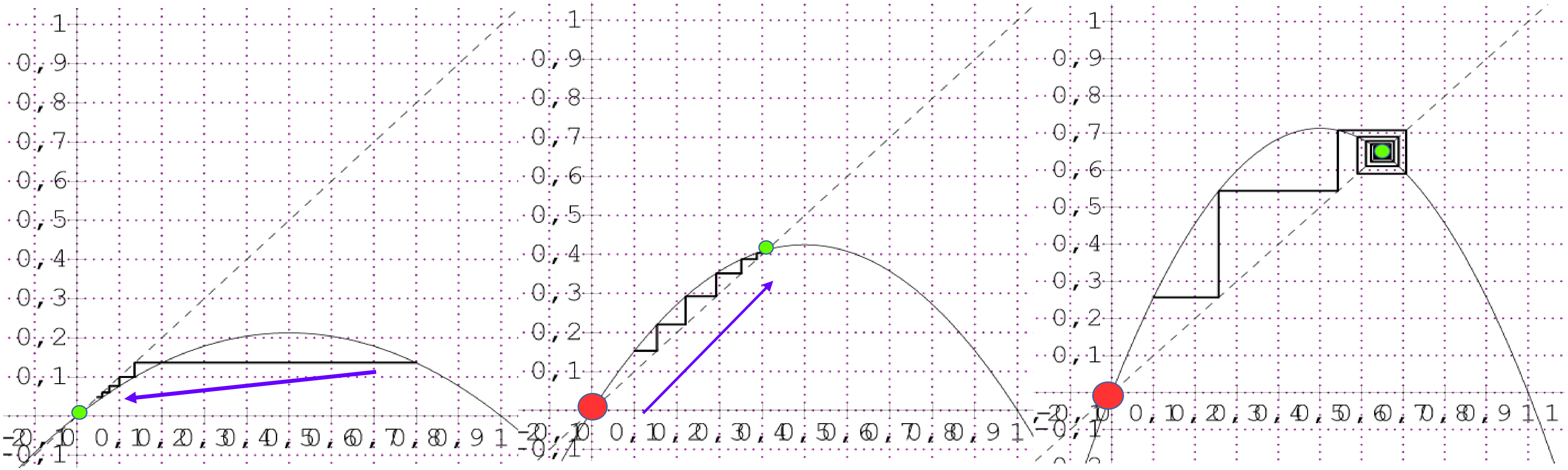
$\forall\ \lambda \in]1;2], \lim\limits_{n \to \infty} u_n = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$

$0 < \lim\limits_{n \to \infty} u_n < \frac{1}{2}$

C- Cas λ ϵ [2;3]



λ = 2,85 et a = 0,1



Point attractif

l point attractif de $C_f \Leftrightarrow |f'(l)| < 1$

Point répulsif

l point répulsif de $C_f \Leftrightarrow |f'(l)| > 1$

C- Cas λ ϵ]2;3]

Théorème général sur les points attractifs

f dérivable en l, $f'(l) = \lambda(1-2l)$

$$f'\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) = \lambda\left(1-2\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)$$
$$f'\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) = \lambda\left(1+2\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)$$
$$f'\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) = \lambda+2-2\lambda$$

$f'\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) = 2-\lambda$ or λ ϵ [2;3]

$$\left|f'\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)\right| < 1$$

$\frac{\lambda-1}{\lambda}$ point attractif de C_f

$f'(0) = \lambda(1-0)$

$f'(0) = \lambda$ or λ ϵ [2;3]

$|f'(0)| > 1$

0 point répulsif de C_f

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{\lambda-1}{\lambda}$ pour λ ϵ]2;3]

Soit $\frac{1}{2} < \lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \frac{2}{3}$

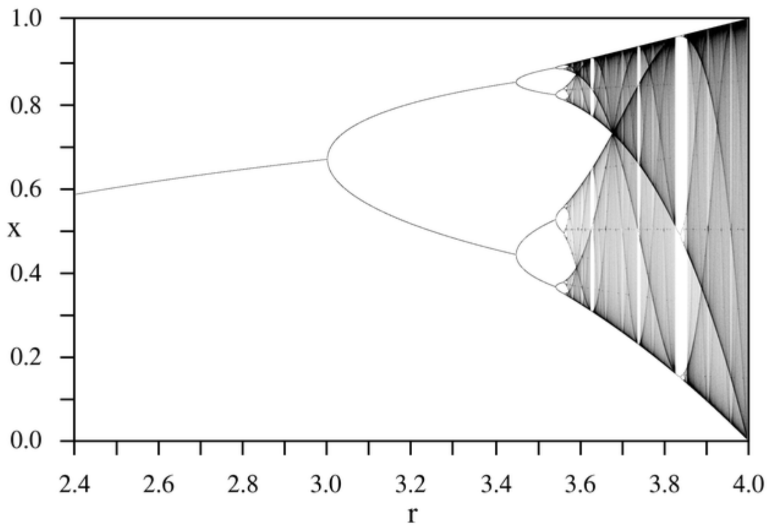
Histoire et applications

Conclusion et sources

Partage avantageux ssi

$$\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda}\right)^2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \ (\approx 3{,}41)$$

Si Bob ne connaît pas la valeur de λ, on peut lui recommander de refuser ce type de partage : en effet si $\lambda \in]0; 1+\sqrt{6}[$ le partage est désavantageux pour lui.



La suite logistique et le chaos Daniel PERRIN

logistiqueDP.pdf (universite-paris-saclay.fr)

Suite logistique – Wikipédia

Suite logistique — Wikipédia (wikipedia.org)